高等学校试用教材

工程数学

概 率 论

南京工学院数学教研组 编

高等教育出版社

内容提要

本书是在南京工学院数学教研组所编《高等数学》(1978年版)第十四章内容的基础上，参照1980年高等学校工科教材编审委员会审订的"工程数学教学大纲"中有关部分充实改编而完成的.

本书由任荣祖先生主审，富景隆、沈恒范编委复审，又经工科数学编委会组织审稿会审阅，推荐作为教材出版.

全书共六章，较系统地介绍了概率论的基本知识. 本书可作为高等学校工科有关专业的教材及具有高等数学基础的读者的自学用书.

高等学校试用教材
工程数学
概率论
南京工学院数学教研组 编
*
高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
河北省香河印刷厂印装
*
开本 850×1168 1/32 印张 5.5 字数 130,000
1985年10月第1版 1985年10月第1次印刷
印数 00,001—13,850
书号 13010·01134 定价 1.15元

目　录

第一章 随机事件与概率

§1-1 随机事件与样本空间

1. 随机现象

在自然界与人类社会中，人们观察到的现象是各种各样的. 把它们归纳起来，大体上可以分为两类. 一类是可以预言其结果的，即在保持条件不变的情况下，重复进行试验，它的结果总是确定的. 这一类现象称为**必然现象**或**确定性现象**. 例如，在标准大气压下，温度达到100°C时，水必沸腾；同性的电荷必相互排斥等. 另一类是无法预言其结果的，即使在保持条件不变的情况下，重复进行试验，其结果也未必相同. 也就是说，就个别试验而言，或者出现这种结果，或者出现那种结果，对于这一类现象，我们称之为**随机现象**或**偶然现象**. 例如，某电话交换台单位时间内可能接到的呼唤次数；夏季某河流可能出现的最高水位；某时间间隔内公共汽车站可能出现的等车人数；这些现象事先都无法断言其结果.

随机现象既然无法预言其结果，它是不是就无规律可循呢？并非如此. 人们通过长期观察或试验，发现所谓不可预言只是对一次或少数几次观察或试验而言，但在相同条件下进行大量的观察或试验时，这些随机现象就呈现出某种规律性来，就这点来说，它也是可以预言的. 例如，根据各国人口统计资料发现，在新生婴儿中男孩和女孩约各占一半；抛掷一枚质地均匀而对称的硬币多次，就会发现出现正面和反面次数的比例约为1:1. 对于随机现象在

相同条件下进行大量重复观察或试验，所得的结果呈现出的某种规律性，我们称之为**随机现象的统计规律性**.

概率论就是研究随机现象统计规律性的学科.

2. 随机试验与事件

为了叙述方便，我们把对一定条件下的自然现象和人类社会现象的观察或进行的实验，都称为**试验**. 如果一试验在相同条件下可以重复进行，而每次试验的可能结果多于一个，但在进行一次试验之前却不能断言它出现哪个结果，就称这种试验为**随机试验**，并记作E. 今后所说的试验都是指随机试验. 下面举几个随机试验的例子.

例 1 E_1——掷一枚硬币，观察其出现正面或反面；

例 2 E_2——记录上午八点某公共汽车站有多少人在等车；

例 3 E_3——在一批灯泡里，任意取一只，测试它的寿命；

例 4 E_4——掷一粒骰子，观察它出现的点数.

我们把随机试验中，可能发生也可能不发生的事情，称为**随机事件**，简称为**事件**. 通常用字母A, B, C……表示. 而把试验的每一个可能结果称为**基本事件**.

例如，例 4 中"出现一点"，"出现两点"，……，"出现六点"等都是基本事件. 而"出现奇数点"，"出现小于四的点"，"出现三的倍数点"等这样一些事件发生或不发生是通过试验的结果来确定的. 如"出现奇数点"这一事件是由"出现一点"、"出现三点"、"出现五点"三个基本事件来确定的，当且仅当这三个基本事件之一发生，"出现奇数点"这一事件才发生.

在试验E中，把必然发生的事情，叫做**必然事件**，记作Ω；把必然不发生的事情，叫做**不可能事件**，记作$\varnothing$. 例如，在标准大气压下，温度达到100°C时，"水沸腾"这一事件必然发生，因而它是一个必然事件；在标准大气压下，温度达到100°C时，"水不沸腾"这

一事件必然不会发生，因而它是一个不可能事件. 必然事件与不可能事件都属确定性现象，为了今后研究方便，我们把它们看作为两个特殊的随机事件.

3. 样本空间

显然，基本事件是试验的一个可能结果，记作 ω. 对某试验而言，全体基本事件的集合叫做基本事件组或样本空间，记作 Ω①，把 Ω 的每一个基本事件 ω 叫做样本点.

试验 E 的任一个事件，都是 E 的样本空间(基本事件组) Ω 的某些样本点(基本事件)所组成的集合，因而它是 Ω 的子集. 因此在研究一随机现象或者进行一随机试验时，搞清它的样本空间是由哪些样本点组成的，以及某个事件是由哪些样本点组成的，便成了十分重要的事. 下面举几个例子.

例 5 若把例 1 中 E_1 的两种可能结果——正面或反面，分别记为 ω_1, ω_2，则 E_1 的样本空间由两个样本点组成，即 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2\}$. 若将"出现正面"这一事件记为 A，则 $A=\{\omega_1\}$ 是 Ω 的子集.

例 6 设有 50 张考签，分别予以编号 1, 2, …, 50. 任抽其中一张进行考试，把抽到第 i 号考签的事件记为 ω_i，则样本空间由 50 个样本点组成，即

$$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{50}\}.$$

若把"抽到前 10 号考签"这一事件记为 B，则

$$B=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{10}\}$$

是 Ω 的子集.

例 7 若某电话交换台，单位时间内可能接到呼唤次数是 0, 1, 2, …, 用 ω_i 表示接到 i 次呼唤的事件，则样本空间 Ω 由无穷多个样本点组成，即

① 这里所用符号 Ω 与必然事件的符号相同，是由于任一随机试验的结果，必然是全体基本事件之一，这样，样本空间作为一个事件是必然事件.

$$\Omega=\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots\},$$

若把“单位时间内接到呼唤不超过 20 次”这一事件记为C，则

$$C=\{\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_{20}\}$$

是Ω的子集.

例3 若某河流夏季的最高水位ξ在 3 米到 5 米之间，则样本空间为 3 到 5 内的一切实数所成的集合，即$\Omega=\{\xi \mid 3\leqslant\xi\leqslant 5\}$，若把“夏季最高水位在 3.5 米与 4 米之间”这一事件记为D，则

$$D=\{\xi \mid 3.5\leqslant\xi\leqslant 4\}$$

是Ω的子集.

4. 事件的关系与运算

在实际问题中，在同样条件下发生的一些事件，往往不是孤立的，而是彼此之间有联系的。例如检验圆柱形产品，要求它的长度与直径都合格时才算合格。这时，就要考虑“产品合格”，“产品不合格”，“长度合格”，“长度不合格”，“直径合格”，“直径不合格”，“长度合格而直径不合格”等等事件。显然这些事件之间是有联系的。找出它们之间存在的关系，常可以简化一些复杂的问题。

下面讨论事件之间的几个主要关系.

(1) 包含关系与等价关系

如果事件A发生，导致事件B必定发生，则称A为B的特款，或说B包含A，记为$A\subset B$，或$B\supset A$。例如上例中以A记“直径不合格”的事件，B记“产品不合格”的事件，显然$A\subset B$.

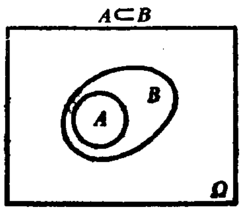

图 1-1

为了直观地表示事件之间的关系，我们常用平面上的一个矩形表示样本空间，矩形内的每一点表示样本点，用其中两块图形分别表示事件A与B。例如图 1-1 表示$A\subset B$.

如果$A\subset B$并且$B\subset A$，就说A与B等价，并记作$A=B$. 例如检验圆柱形产品时，事件A_1——"直径和长度都合格"发生，必导致事件A_2——"产品合格"发生，即$A_1\subset A_2$；反之，事件A_2发生也必导致事件A_1发生，即$A_2\subset A_1$，故"产品合格"与"直径和长度都合格"两事件是等价的，即$A_1=A_2$. 又如在标准大气压下"水沸腾"与"水温达到100°C"两事件是等价的.

(2) 事件的并

"两事件A,B中至少有一个发生"的事件，称为A与B的并(或和)，记作$A\cup B$(见图1-2). 例如，前例中"产品不合格"便是"直径不合格"与"长度不合格"的并. 类似地，将"事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$中至少有一个发生"的事件，称为A_1, $A_2,\cdots,A_n$的并(或和)，记作

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n \text{ 或 } \bigcup_{i=1}^{n}A_i.$$

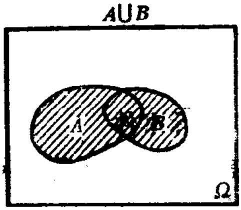

图 1-2

例如，"一分钟内接到不多于15次的呼唤"这一事件便是"一分钟内接到1次呼唤"，"一分钟内接到2次呼唤"…"一分钟内接到15次呼唤"及"一分钟内没有接到呼唤"等事件的并，即$\bigcup_{i=0}^{15}A_i$，其中A_i表示"一分钟内接到i次呼唤"的事件.

"可列个事件A_1, $A_2,\cdots$中至少有一个发生"的事件，称为A_1, $A_2,\cdots$的并，记为$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$.

(3) 事件的交

"两事件A, B同时发生"的事件，称为A与B的交(或积)，记作$A\cap B$或记为AB(见图1-3). 例如，"产品合格"便是"直径合格"和"长度合格"的交. 类似地，"事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$同时发生"

的事件，称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交，记作

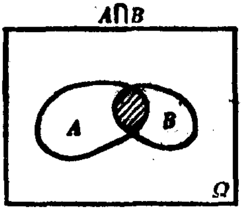

图 1-3

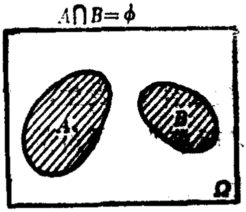

图 1-4

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n \text{ 或 } \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

“可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$同时发生”的事件，称为 $A_1, A_2, \cdots$的交(或积)，记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

(4) 互斥事件

如果事件 A, B 不能同时出现，即 $A\cap B=\varnothing$，则称 A, B是互斥事件或不相容的事件（见图 1-4）. 例如“一分钟内接到呼唤多于 10 次”的事件与“一分钟内接到的呼唤少于 10 次”的事件是不相容的.

若 A，B 是两个不相容事件，则 $A\cup B$ 常写为 $A+B$. 如果 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，即$A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j, i, j=1, 2, \cdots, n)$，则将 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 写为$\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$. 如果可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$两两互不相容，则将 $A_1\cup A_2\cup\cdots$写为$\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

(5) 事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生所组成的事件，称为事件 A 与 B 的差，记作 $A\backslash B$ 或记为 $A-B$(见图 1-5). 例如，“直径合格而长度不合格”是“直径合格”与“长度合格”两事件的差.

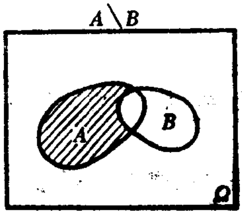

图 1-5

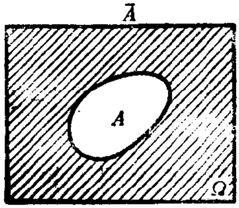

图 1-6

(6) 逆事件

如果两事件 A，B 中必定发生一个，而又不能同时发生，即 $A\cup B=\Omega, A\cap B=\varnothing$ 同时成立，则称 A 是 B 的逆(对立)事件，或 B 是 A 的逆(对立)事件，也称 A,B 是互逆(相互对立)的事件，记事件 A 的逆事件为 $\bar{A}$(见图 1-6)．例如“产品合格”与“产品不合格”是互逆的事件，“一分钟内接到电话”与“一分钟内没有接到电话”也是互逆的事件.

上述事件的运算关系与集合之间的相应关系完全一致.

为使用方便起见，现将事件之间的关系与集合之间的关系对照列表如下:

表 1-1

记　号	概　率　论	集　合　论
Ω	样本空间、必然事件	空间
$\varnothing$	不可能事件	空集
$\omega\in\Omega$	样本点	Ω 中的元素(或点)
$\{\omega\}$	基本事件	单点集
$A\subset\Omega$	事件 A	Ω 的子集
$A\subset B$	事件 A 发生导致事件 B 的发生	集合 A 含于集合 B
$A=B$	事件 A 与事件 B 是等价的	集合 A 等于(或等价于)集合 B
$A\cup B$	两事件 A，B 中至少有一个发生	集合 A 与集合 B 的并(或和)
$A\cap B$	两事件 A，B 同时发生	集合 A 与集合 B 的交(或积)
$\bar{A}$	A 的逆(或对立)事件	A 的余集
$A\setminus B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	A 与 B 的差集
$A\cap B=\varnothing$	事件 A 与 B 是互斥的或互不相容的	集合 A 与 B 无公共元素

§1-2　事件的概率

上节我们介绍了事件的概念，本节讨论概率的概念.

表面上看，随机事件在一次试验中发生或不发生，似乎看不出什么规律，但是，在同样条件下，经过长期观察或多次试验，可以发现它们具有某种规律. 为了说明这一点，先来对事件的频率下一个定义.

定义　若事件 A 在 N 次试验中出现 n 次，则称

$$F_N(A)=\frac{n}{N}$$

为事件 A 在 N 次试验中出现的**频率**，称 n 为事件 A 在 N 次试验中出现的**频数**. 下面来举两个例子.

例 1　蒲丰(Buffon)与皮尔逊(Pearson)曾分别掷一枚质地均匀而对称的硬币，其结果如下表：

实验者	掷硬币的次数	正面出现的频数	正面出现的频率
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12700	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

我们知道，掷硬币次数不多时，正面出现的次数是带有偶然性的，但上表说明，当试验次数充分多时，正面出现的频率在 1/2 左右摆动. 可见出现正面次数的规律由它的频率显示出来.

例 2　检验某工厂大批产品，当这些产品的长度在 13.60 厘米到 13.90 厘米内时，认为是合格的，否则是次品. 我们分别抽出 5 件，10 件，…，1800 件来检查，其合格品件数的情况如下表所示：

抽取件数	5	10	60	150	600	900	1200	1800
合格件数	5	7	53	131	548	820	1091	1631
合格频率	1	0.7	0.883	0.873	0.913	0.911	0.909	0.906

上表说明，抽出的产品中，出现合格品的件数是随机的，但随着试验次数的增加，它的规律性就由合格品的频率(合格件数与抽取件数之比值）显示出来．从表中可以看出，抽取的件数充分多时，其频率在 0.9 左右摆动．

上面两例揭示了随机事件的一个极其重要的特性：**频率稳定性**，即在充分多次试验中，事件的频率总是在一定值左右摆动．而且在相同条件下（如水平相同的检验员用同一种方法对同一个工厂的同一批产品检验)，去进行试验，这个频率所接近的定值是不会改变的；这表明事件发生的可能性的大小，是事件本身所固有的，是客观存在的一种属性．这就启发我们用一个数来表征一随机事件 A 发生的可能性的大小，这个数称为事件 A 的**概率**，记为 $P(A)$．当试验次数 N 增大时，频率 $F_N(A)$ 就是概率 $P(A)$ 的实际近似值，即 $P(A)\approx F_N(A)$．试验次数越多，频率就越稳定在这个数 $P(A)$ 的附近（这句话的正确解释参看 § 6-1 大数定律)．在这里可以打一个比喻：一直棒的长度 L 是客观存在的，我们对棒长进行测量时所得的数值只是棒长 L 的近似值．我们知道，事件 A 发生的可能性也是客观存在的，而事件 A 的概率是这种可能性大小的一种反映(如同 L 反映了棒长一样)，频率则不过是概率的一种实际近似值而已(如同测得的棒长不过是 L 的近似值而已)．

因此在实际应用中，当试验次数足够多时，常用事件 A 的频率来度量其概率．由频率出发所定义的事件 A 的概率常称为**统计概率**．

频率与概率的关系如此密切，因此我们常通过频率所具有的

性质来推想概率也应具有哪些性质．而频率具有以下基本性质：

1° 非负性　对任一事件 A, $F_N(A)\geqslant 0$;

2° 规范性　对于必然事件 Ω, 有 $F_N(\Omega)=1$;

3° 可加性　如事件 A, B 互不相容，则

$$F_N(A+B)=F_N(A)+F_N(B).$$

证　性质 1°, 2° 的成立是显然的，现证性质 3° 如下：

设在 N 次试验中，事件 A, B 出现的频数分别为 $n(<N)$, $m(<N)$. 由于 A, B 互不相容，所以事件 $A+B$ 出现的频数为 $n+m(\leqslant N)$. 于是有

$$F_N(A+B)=\frac{n+m}{N}=\frac{n}{N}+\frac{m}{N}$$
$$=F_N(A)+F_N(B).$$

这个性质用数学归纳法可以推广到 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 有限个两两互不相容的事件，即

$$F_N(A_1+A_2+\cdots+A_m)$$
$$=F_N(A_1)+F_N(A_2)+\cdots+F_N(A_m) \tag{1}$$

由频率定义及其基本性质 1°, 2° 可得

$$0\leqslant F_N(A)\leqslant 1 \tag{2}$$

对于任意事件 A 成立.

统计概率指出，任一事件 A 的概率 $P(A)$ 是存在的．在实际问题中，即使 $P(A)$ 不知为何值，但可取事件 A 出现的频率作为它的近似值．这是统计概率的长处．但它也有不足之处，当我们取频率作为它的近似值时，并不能肯定试验的次数该取多少为好，因为我们没有理由认为作 $N+1$ 次试验比作 N 次试验所得的频率更逼近所求的概率．而且当试验次数增多时，很难保证试验的条件都完全一样．例如掷硬币试验，很难保证每次抛出的角度、高度等等条件都是一样的．这就促使我们去考虑这样的问题：能否采用

其它方法来规定事件的概率. 下面我们将看到对于所谓古典概型事件与几何型事件是能够办到的.

§1-3 古典概型

1. 古典概率定义

所谓古典概型，就是指具有下列两个特征的一些随机现象:

1° 试验的可能结果只有有限个，记为 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$，且两两互不相容，即

$$\omega_i \cap \omega_j = \varnothing \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

2° 事件 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ 的发生是等可能的(每个事件发生的可能性的大小是相同的). 也就是

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}.$$

例如掷一枚质地均匀而对称的骰子，出现的可能结果只有六个: ω_i, $i = 1, 2, \cdots, 6$, ω_i 表示出现 i 点，而且

$$\omega_i \cap \omega_j = \varnothing \qquad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \cdots, 6.$$

又

$$P(\omega_i) = \frac{1}{6}, \qquad i = 1, 2, \cdots, 6.$$

所以这是一古典概型. 求"出现奇数点"这一事件 A 的概率 $P(A)$，在这里已不是一件困难事. 因为试验的可能结果是六个，因此，样本空间

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_6\},$$

而导致事件 A 出现的可能结果有三个: $\omega_1, \omega_3, \omega_5$，即 $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$. $\omega_1, \omega_3, \omega_5$ 中任一个出现必导致 A 出现，所以很自然地规定:

$$P(A) = \frac{A\text{含样本点个数}}{\text{样本点总数}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

下面给出古典概型事件的概率定义.

定义 设样本空间 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$，古典概型事件 A 是由 $k(k\leqslant n)$ 个样本点(基本事件)组成的集合，则定义事件 A 的概率 $P(A)$ 为

$$P(A)=\frac{k}{n} \tag{3}$$

在式(3)中，n 是样本点(基本事件)总数，k 是 A 含的样本点数. 因此，计算古典概型事件 A 的概率时，必须搞清样本空间是由哪些样本点组成的，样本点总数是多少，以及随机事件 A 是由哪些样本点组成的，共有多少个.

下面举两个例子.

例1 §1-1 例5显然是一古典概型. 现求事件 A——"出现正面"的概率. 据古典概率的定义，$P(A)=\frac{1}{2}$.

例2 §1-1 例6也是一古典概型. 现求事件 B——"抽到前10号考签"的概率. 据古典概率定义，$P(B)=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}$.

2. 古典概型的概率计算举例

例3 袋中有 a 个白球，b 个黑球，(1) 从袋中任取两球，问两球都是白球的概率是多少？(2) 从袋中接连任意取出 m $(m\leqslant a+b)$ 个球，如每次取出的球不再放回去，求最后取出的是白球的概率.

解 (1) 设 A 表示所取两球都是白球的事件. 基本事件的总数为 C_{a+b}^2，事件 A 含有的基本事件个数为 C_a^2，于是得

$$P(A)=\frac{C_a^2}{C_{a+b}^2}=\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)};$$

(2) 据题意，取出的球要考虑球的排列次序，每取出 m 个排列好的球就构成一个基本事件，从 $a+b$ 个球中取出 m 个球有 A_{a+b}^m 种取法，最后取出的是白球，可以是 a 个白球中的任何一个，故有

a 种取法，其余 $m-1$ 个可以从 $a+b-1$ 个球中任意取出，共有 A_{a+b-1}^{m-1} 种取法，因此"取出的 m 个球中最后一个是白球"的事件 A 含有 $a\cdot A_{a+b-1}^{m-1}$ 个基本事件，于是

$$P(A)=\frac{aA_{a+b-1}^{m-1}}{A_{a+b}^{m}}=\frac{a}{a+b}.$$

值得注意的是此结果与 m 无关.

如将此例中"白球"、"黑球"分别换为"合格品"、"次品"或"甲物"、"乙物"，它就变成生产中所遇到的一些实际问题. 因此，抽球问题具有典型意义.

例 4 在一批 n 件产品里，有 m 件是次品，从这批产品中任意取出 $N(N<n)$ 件，其中有 $M(M<m)$ 件是次品的概率是多少？

解 由题意可知，基本事件的总数为 C_n^N，"M 件是次品"这一事件可以看作是在 $n-m$ 个正品中取出 $N-M$ 个，在 m 个次品中取出 M 个所构成的，因而它包含的基本事件总数为 $C_m^M\cdot C_{n-m}^{N-M}$，故所求事件的概率为

$$\frac{C_m^M\cdot C_{n-m}^{N-M}}{C_n^N}.$$

例 5 号码锁有 8 个拨盘，每个拨盘上有从 0 到 9 共 10 个数字，当这 8 个拨盘上的数字组成某一个 8 位数(开锁号码)时，锁才能打开. 若不知道开锁号码，一次就把锁打开的概率是多少？

解 基本事件的总数为 10^8，"一次就把锁打开"包含的基本事件的个数等于 1，故一次就把锁打开的概率是

$$\frac{1}{10^8}=0.00000001.$$

可见，不知道开锁号码而一次就把锁打开，几乎是不可能的.

例 6 n 个质点在 N 个格子中的分布问题：设有 n 个不同质点，每个质点都能以同样的概率 $\frac{1}{N}$ 落在 N 个格子 $(N\geqslant n)$ 的每一