

[川]新登字 019 号

责任编辑 张先金

封面设计 傅孝修

竞赛数学基础

陈永焕等编

西南师范大学出版社出版发行

(重庆 北碚)

四川省新华书店经销

重庆印制六厂印刷

开本:787×1092 1/32 印张:16.25 字数:360千

1993年10月 第一版 1993年10月 第1次印刷

印数:1—9000

ISBN 7—5621—1001—8/G·689

定价:8.50元

目 录

中学数学竞赛概况.....	(1)
第一章 解题入手十法	(17)
§ 1.1 解题思维.....	(17)
§ 1.2 从简单问题入手.....	(25)
§ 1.3 从具体情况入手.....	(35)
§ 1.4 从特殊情况入手.....	(48)
§ 1.5 从问题反面入手.....	(71)
§ 1.6 从观察联想入手.....	(97)
§ 1.7 从情况分类入手	(138)
§ 1.8 从构造方法入手	(154)
§ 1.9 从图形直观入手	(190)
§ 1.10 从归纳猜想入手	(200)
§ 1.11 从问题转换入手	(227)
第二章 几类典型问题.....	(251)
§ 2.1 非标准问题	(251)
§ 2.2 选择性问题	(272)
§ 2.3 对称性问题	(285)
§ 2.4 应用题的数学抽象	(298)
§ 2.5 抽屉原则	(311)
§ 2.6 组合基础	(327)
§ 2.7 命题方法及发展趋势	(352)

第三章 初中竞赛数学基础知识.....	(364)
§ 3.1 数论知识简单应用	(364)
§ 3.2 代数式与恒等式	(388)
§ 3.3 方程及函数	(416)
§ 3.4 平面几何问题	(445)
附录一 数学竞赛大纲.....	(487)
附录二 习题答案与提示.....	(493)

中学数学竞赛概况

如果说“数学是锻炼思维的体操”，那么，数学竞赛就是这套“体操”中高难“动作”的精华组合。

最先举办数学竞赛的国家是匈牙利。早在1894年，匈牙利物理数学学会就慎重地通过一项决议：每年为中学生举办数学竞赛。从此之后，除了在两次世界大战中和匈牙利事件期间中断过七年外，每年十月都要举行。每次竞赛有三道试题，规定四小时做完。参赛者都是刚刚从中学毕业的学生。从1923年开始，匈牙利又专门为在校学生举办了“全国中学生数学竞赛”。这项竞赛为匈牙利选拔了不少的优秀数学人才，使匈牙利成为一个在数学上享有盛誉的国家。同时，也引起了其他国家的兴趣，争先仿效。

1902年，罗马尼亚首先由《数学杂志（Gazetamathematica）》组织竞赛，1948—1950年扩大了规模。

1934、1935年，苏联开始在列宁格勒和莫斯科举办中学生数学竞赛，并最先冠以数学奥林匹克的名称。

数学竞赛大的兴起是五十年代。据不完全统计，已经举办全国性数学竞赛的国家有：保加利亚（1949年开始）、波兰（1950年开始）、捷克斯洛伐克（1951年开始）、中国（1956年开始）、德意志民主共和国（1961年开始）、苏联（1962年开始）、越南（1962年开始）、南斯拉夫（1962年开始）、荷

兰（1962年开始）、蒙古（1963年开始）、英国（1965年开始）、芬兰（1965年开始）、以色列（1968年开始）、加拿大（1969年开始）、希腊（1969年开始）、德意志联邦共和国（1970年开始）、澳大利亚（1971年开始）、美国（1972年开始）等。

由于数学竞赛与体育比赛在精神上有着相通之处，所以大多数国家的数学竞赛都叫做数学奥林匹克。1959年在罗马尼亚的倡议下，开始有了与奥运会相似的“国际数学奥林匹克”（International Mathematics Olympic）简称IMO。至1993年已经举办34届。

IMO开始只是东欧几个国家轮流做东举办，并没有多少国际性，到60年代末才渐渐地扩大到西方国家。1988年在澳大利亚首都堪培拉举行的第29届IMO，已有49个国家和地区的268名中学生参加。1989年在高斯的故乡——不伦瑞克举行的第30届IMO，来自50个国家和地区的291名中学生展开了激烈竞争。1990年在北京举行的第31届IMO，有54个国家和地区的308名选手参加，共颁金牌23枚，银牌56枚，铜牌76枚，鼓励奖32名。1991年在瑞典的锡格蒂纳举行的第32届IMO，有56个国家和地区的312名中学生参加，共决出金牌20枚，银牌51枚，铜牌84枚，除中国队和苏联队各获4枚金牌外，罗马尼亚队获3枚金牌，匈牙利、伊朗队各获2枚，法国、英国、德国、美国、加拿大队各获1枚。1992年7月在俄罗斯首都莫斯科举行的第33届IMO，有68个参赛队，360多名选手参加。中华台北队首次参加IMO，获得银牌3枚，铜牌2枚，总分124分，名列17。1993年7月在安卡拉举行的第34届IMO中，来自76个国家和地区的

413 名高中学生参加了此次竞赛。中国队 6 名选手全都获得金牌，中国台湾省选手成绩也较突出，总分由去年的第 17 名跃至今年的第 5 名。当今的 IMO 是世界上层次最高、影响最大的国际中学生知识智力竞赛。

现在的 IMO 仍然是轮流做东，没有固定的组织与章程，只是每年都由参赛国各举一人组成委员会，东道国代表任主席。每次竞赛都在七月份举行，两试六题。第一天上午用 $4\frac{1}{2}$ 小时做第一试的三道题，第二天上午又用 $4\frac{1}{2}$ 小时再做第二试的三道题。通常是每题 7 分，满分为 42 分。一般地，每个参赛国都派六名学生参加，因而各国的总分为 252 分。竞赛试题在各国提供的题目中筛选。一般认为最初几届的试题难度不大，但七十年代以后就显著地难了。1980 年的第 21 届未能举行，而以两个小规模的比赛代替，奇怪的是两者试题的难度极悬殊。1981 年在美国举行，试题难度很大，成绩却出奇地好。近年来，竞赛试题涉及代数、几何、数论、组合数学等内容。其中，IMO 的代数问题常与 IMO 的数论问题、组合问题、几何中的不等式问题和极值问题交织在一起。据不完全统计，代数问题约占全部 IMO 试题的 40%。

1985 年，我国派出两名中学生首次参加在芬兰举行的第 26 届 IMO。1986 年，我国中学生正式组队参加第 27 届 IMO。现将最近几届各国代表队所得考分略列于下：

第 27 届：美苏均为 203 分、联邦德国 196 分、中国 177 分、民主德国 172 分、罗马尼亚 171 分等。

第 28 届：罗马尼亚 250 分、联邦德国 248 分、苏联 235 分、民主德国、美国、匈牙利、保加利亚、中国 200 分等。

第29届：苏联217分、中国和罗马尼亚都是201分、联邦德国174分、越南166分、美国153分等。

第30届：中国237分、罗马尼亚223分、苏联217分、民主德国216分、美国207分、捷克斯洛伐克202分、保加利亚195分、联邦德国187分、越南183分、匈牙利175分等。

第31届：中国230分、苏联193分、美国174分、罗马尼亚171分等。

第32届：苏联241分、中国231分、罗马尼亚225分、德国222分、美国212分、匈牙利210分等。

第33届：中国240分、美国181分、罗马尼亚177分、独联体176分、英国168分、俄罗斯158分等。

第34届：中国215分、德国189分、保加利亚178分、俄罗斯177分、中国台北162分等。

在第30届竞赛中，中国队在参赛国中异军突起，一举夺得团体总分第一名，6名同学获4枚金牌，2枚银牌。在第31届竞赛中，中国选手表现不凡，成绩突出，喜获5枚金牌，1枚银牌，获金牌数列参赛国之冠，以绝对优势名列榜首。在第32届竞赛中，我国选手获得4枚金牌，2枚银牌，其金牌数与苏联队并列第一，名列第二。在第33届竞赛中，只有4名中学生获得满分42分，其中中国队3名（杨保中、沈凯、罗炜）、独联体队1名（乌克兰女中学生）。6名中学生组成的中国代表队以240分的总成绩雄居68个参赛队之榜首，比总分第二的美国队高出59分。6名选手全部荣获金牌。在第34届竞赛中，仅有两名选手得满分42分，其中之一就是北京高三学生周宏、中国队夺得团体冠军，第二次获此殊荣。在最

近几届 IMO 中,我国选手都是在各种数学竞赛中“过五关斩六将”层层选拔出来的。他们在数学方面确有超乎寻常的才能,“这 6 名同学堪称数学英才,他们代表了我国中学生的数学水平”。他们的成功,也说明了中国人民完全可以依靠自己的才能在科学领域里攀登高峰。

我国代表队在 26、27、28、29、30、31、32、33、34 届 IMO 中获奖名单如下表

届次	参赛时间	地点	代表 队 人数	获奖 人数	获奖者 姓名	性 别	年 级	所在中学	获奖 等次
26	1985	芬兰 赫尔辛基	2	1	吴思皓	男	高二	上海向明中学	三等
27	1986	波兰 华沙	6	5	方为民	男	高三	河南省实验中学	一等
					张 浩	男	高三	上海大同中学	一等
					李平立	男	高三	天津南开中学	一等
					荆 秦	女	高三	西安 85 中学	二等
					林 强	男	高二	湖北南岗中学	三等
28	1987	古巴 哈瓦那	6	6	滕 峻	女	高三	北大附中	一等
					刘 雄	男	高三	湖北湘阴一中	一等
					潘子刚	男	高三	上海向明中学	二等
					林 强	男	高三	湖北黄冈中学	二等
					高 峡	男	高三	北大附中	三等
					何建勋	男	高三	华南师大附中	三等

届次	参赛时间	地点	代表 队 人数	获奖 人数	获奖者 姓名	性 别	年 级	所在中学	获奖 等次
29	1988	澳大利 亚 堪培拉	6	6	何宏宇	男	高三	四川彭县中学	一等
					陈 焱	男	高三	上海复旦附中	一等
					韦国恒	男	高三	武钢三中	二等
					王健梅	女	高三	天津南开中学	二等
					查宇涵	男	高三	南京 10 中	二等
					邹 铜	男	高三	江苏镇江一中	二等
30	1989	联邦 德国 不伦 瑞克	6	6	罗华章	男	高三	四川永川中学	一等
					蒋步星	男	高三	新疆石河子市五中	一等
					霍晓明	男	高三	江西景德镇晨光中学	一等
					俞 扬	男	高三	东北师大附中	一等
					唐若曦	男	高三	四川成都九中	二等
					颜华菲	女	高三	人大附中	二等
31	1990	中国 北京	6	6	汪建华	男	高三	陕西西乡一中	一等
					周 彤	男	高三	湖北武钢三中	一等
					王 崧	男	高二	湖北黄冈中学	一等
					余嘉联	男	高三	安徽铜陵一中	一等
					张朝晖	女	高三	北京四中	一等

届次	参赛时间	地点	代表 队 人数	获奖 人数	获奖者 姓名	性 别	年 级	所在中学	获奖 等次
					库超	男	高三	湖北黄冈中学	二等
32	1991	瑞典	6	6	罗炜		高二	哈尔滨师大附中	一等
		锡格蒂纳			张里钊			北大附中	一等
					王绍昱			北大附中	一等
					王崧	男	高三	湖北黄冈中学	一等
					郭早阳			湖南师大附中	二等
					刘彤威			北大附中	二等
33	1992	俄罗斯	6	6	杨保中		高三	郑州一中	一等
		莫斯科			沈凯		高三	南京师大附中	一等
					罗炜		高三	哈尔滨师大附中	一等
					何斯迈		高二	安庆一中	一等
					章寅		高三	成都七中	一等
					周宏		高二	北大附中	一等
34	1993.7	伊斯坦布尔	6	6	周宏	男	高三	北大附中	一等
					袁汉辉	男		华南师大附中	一等
					杨克	男		武钢三中	一等
					刘杨	男		湖南师大附中	一等

届次	参赛时间	地点	代表 队 人数	获奖 人数	获奖者 姓名	性 别	年 级	所在中学	获奖 等次
					张 镭	男		青岛二中	一等
					冯 炯	男		上海向明中学	一等

美国是西方工业国家中较晚举办全国性数学竞赛的一个。1956年起,美国国内开始有人呼吁搞全国性数学竞赛,经过了六年才实行。现在,美国数学竞赛的水平公认是不错的。迄今为止,美国的中学生数学竞赛有四:

其一,美国中学数学竞赛(AHSME)。

1950年,美国数学协会首次举行中学生数学竞赛。参加对象仅限于纽约近郊地区,到1957年,这样的数学竞赛开始发展为全国性的竞赛。现在,该竞赛已具国际性,除美国外,还有加拿大、爱尔兰、澳大利亚、卢森堡、比利时、匈牙利、意大利、波多黎各、中国、牙买加等国参加。

美国中学数学竞赛的范围完全以标准的中学课程为基础,它面向中学的几种不同水平的学生,而不是只为高能力的学生服务。

其二,美国数学邀请赛(ALME)。

在1982年以前,美国中学数学竞赛是作为美国数学奥林匹克的资格赛。通过中学数学竞赛,选出100名左右选手参加美国数学奥林匹克。然后,再从中选出参加当年的国际数学奥林匹克的选手,在总结前一时期竞赛的基础上,为了更全面、更准确地培养和考察学生,在美国中学数学竞赛和美国数学奥林匹克这两者之间,一个美国数学邀请赛诞生了。这样,美国数学邀请赛就成为参加美国数学奥林匹克的资格赛。

1983年3月22日举行了第一届美国数学邀请赛。现在举行的邀请赛中,有各个国家和地区的上千所中学的学生参加。竞赛试题由美国数学协会提供,15道填空题,每题1分,满分为15分,每题的答案均不超过999的正整数。

其三,美国数学奥林匹克(USAMO)。

从1972年起,这项竞赛已经举行多届。1983年以后,凡在美国数学邀请赛中得分大于或等于8分的学生将被邀请参加这一竞赛。美国数学奥林匹克是美国国内水平最高的,且在国际上有一定影响的数学竞赛。每次竞赛的试题有5道,要求在3.5小时内完成。对优胜者再进行数学奥林匹克训练,最后从中选出6名学生作为美国国家队员参加IMO。

其四,美国初中数学竞赛(AJHSME)。

1985年12月10日举行第一届美国初中数学竞赛。它是由美国数学协会等六个单位联合举办的。参加的对象是7年级和8年级的学生。命题范围是7、8年级的数学课程包括的若干内容(但不含极限)。如:算术中的整数、分数、小数;比和比例;数论;简单的几何、周长、面积、体积;概率与统计;逻辑推理等。

随着中学数学竞赛的组织成功,一些国家又举办了大学生(主要是低年级)的数学竞赛。美国从1938年起就有一个大学低年级学生的数学竞赛——普特南(William Lawell Putnam)竞赛,它远远先于其他国家。

普特南曾任哈佛大学校长,1933年退休,1935年逝世。他留下了一笔基金,两个儿子就与全家的挚友、著名美国数学家G·D伯克霍夫商量,举办了一个数学竞赛。伯克霍夫强调说,再没有一个学科能比数学更易于通过考试来测定能力

了。首届竞赛于1938年举行。以后，除了1943—1945年因大战停了两年，其余一般都在每年的11、12月举行。这项竞赛由美国数学会具体组织。为了保证竞赛质量，由一个三人委员会主办其事。三个委员是：波利亚（G·Polya 1887—？，著名数学家、数学教育家、数学解题方法论的开拓者，曾主办过延续多年的斯坦福大学数学竞赛）、拉多（Tiber Rado 1895—1965 匈牙利数学竞赛的早期优胜者，对复变函数、测度论有重大贡献）、卡普兰斯基（Kaplansky 1917—？著名代数学家，第一届普特南竞赛的优胜者）。普特南竞赛的优胜者中，日后成名的很多，有三个人得到菲尔兹奖：米尔诺（Mitnor）、孟福德（Mumfard）、奎伦（Quillem）。有人说：“伯克霍夫父子（儿子B·伯克霍夫是当代活跃的代数学家）是普特南家族的密友，这一点是美国低年级大学数学事业的幸运。”

1956年，我国在北京、上海、天津、武汉四大城市举办了第一届数学竞赛。57、62、63、64年各举办了一次。1980年8月中国数学会普及工作委员会成立后，数学竞赛和有关的科普活动便作为它的一项主要工作。十余年来，已经走过了这样的奋斗历程：

1980年大连会议上明确了数学竞赛是一项群众性课外活动，其目的有四：提高学生数学的兴趣，推动课外活动的开展；促进中学数学教学的改革；发现和培养人才；为参加国际数学奥林匹克作准备。确立了“民办公助”、“精简节约”、“自愿参加”三项原则。

1981年5月北京会议决议举办“省、市、自治区联合高中数学竞赛”。从此。我国数学竞赛活动出现了新局面。

1982年6月昆明会议，讨论了第一次“联赛”的成功与不足之处，促成了所有省、市、自治区都参加“联赛”，从此“联赛”也就成为全国数学竞赛。

1983年5月屯溪会议上，经对“联赛”命题方向的深入讨论，确定了“在普及的基础上不断提高”的方针，规定了“联赛的命题范围不超出现行教学大纲”。

1984年11月宁波会议，确定了高中联赛时间是每年10月中旬的第一个星期天。从85年起举办初中“联赛”。从此，全国“联赛”已形成制度，并走上正规化的道路。

1985年7月，我国首次参加IMO。12月在上海举行的中国数学会成立五十周年纪念会上，中国数学会与北京大学、南开大学、中国科技大学、复旦大学达成共同轮流举办冬令营的协议，我国数学竞赛活动又有了新的发展。

1986年4月西安会议上，再次强调“在普及的基础上不断提高”的方针，对“命题范围不超出现行教学大纲”补充了“对考生能力的要求将逐步有所提高”。

1988年11月九江会议，通过了“中国数学奥林匹克等级教练员暂行条例”，决定全国高中联赛一试试题要紧密结合中学教学实际，一试要出一份“高考”水平的试题，这一规定三年内不变。

1989年7月济南会议，对高、初中联赛一二试各种题型数目、评分标准作出了明确规定，使“联赛”的试卷走向规范化。

1990年11月湖南宁乡会议，鉴于人才的培养需要从小抓起，小学生数学课外活动需要正确引导，有必要搞一个强调普及和基础的小学生数学竞赛，使之成为“重视基础，激

发兴趣，培养能力，减轻负担”的小学生课外活动。提出了今后工作的两个着重点：加强基础，理顺普及与提高的关系，在重视尖子生培养的同时，要更加注意基础，强调普及；提高教练员队伍和命题队伍的学术水平。

1992年3月重庆会议，通过了数学竞赛大纲，会议认为大纲的制定是方兴未艾的数学竞赛活动进一步规范化的标志。会议决定，根据数学竞赛大纲立即组织力量编写《数学竞赛基础教程》，以便使学有余力的学生能更好地发展他们的运算能力，逻辑思维能力，空间想象能力，分析问题和解决问题的能力，独立思考和自学能力，逐步学会分析、综合、归纳、演绎、抽象、概括、类比等数学思维方法，成为一代具有探索和创新精神的科学人才。会议审议了1989年以来数学奥林匹克等级教练员制度的执行情况。会议认为，在我国已经进入世界数学奥林匹克强国行列的形势下，更要着眼于普及，着眼于提高大多数学生学习数学的兴趣，着眼于进一步推动边远省份和少数民族地区数学课外活动的开展。会议认为，应该鼓励更多的同志对数学奥林匹克活动中出现的理论问题和实践问题进行学术性的探讨，以便进一步提高我国奥林匹克数学的学术水平，确保中国数学奥林匹克活动沿着健康的轨道顺利地发展。

1992年9月24日在天津师大举行了“数学奥林匹克暨数学课外教育研讨会。”会议分析了我国数学奥林匹克和数学课外教育面临的形势和任务。会议认为从1985年我国首次参加IMO以来，各地重视数学课外教育，一些省、市、自治区相继成立了数学奥林匹克学校及各种类型的数学尖子生培训班，这对于开展数学课外教育、培养数学尖子生发挥了巨大

作用，给我国选手在IMO中连创佳绩打下了坚实的基础。全国涌现出一批数学奥林匹克教育的积极分子，他们做了大量而卓有成效的工作，应当充分肯定他们的成绩。我国数学奥林匹克和数学课外教育事业已经形成了一定的规模，形成了一定的发展势头，在发现和培养人才方面已经取得了明显的成效。在这种情况下，随着事业自身的发展，提出了有关理论建设方面的要求。研讨会上涉及到的问题有：数学奥林匹克教育和数学课外教育的本质、方法、规律和途径；课外学习与课内学习的关系；普及与提高；数学尖子生的发现与培养；辅导教师的进修与提高；命题与解题研究；辅导资料与教材建设等。目前，对其中的一些问题的研究已具有一定深度。

现在，我国各级各类数学竞赛的规模越来越大，参赛的人数越来越多，它已成为广大青少年学生所喜爱的课外活动。

为了纪念著名数学家华罗庚逝世一周年，更好地发现和培养人才，1986年我国举办了首届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛。这项竞赛分初赛、复赛、决赛三个阶段进行。全国22个城市的近150万少年参加了这一活动。

为了纪念南北朝时期著名数学家、天文学家祖冲之在科学上的卓越贡献，自1988年11月27日举办第一届初中《祖冲之杯》数学邀请赛以来，迄今已举办了五届，受到了越来越广泛的欢迎。应广大参赛单位的要求，为配合全国小学数学奥林匹克竞赛，1991年11月24日又举办了第一届小学《祖冲之杯》数学邀请赛，参赛单位已遍布全国25个省市。这项竞赛每年一届，赛期定为当年11月的最后一个星期天。

为了鼓励中学生在学现行中学数学课本知识的同时，