运筹学杂志

CHINESE JOURNAL OF OPERATIONS RESEARCH

1982

第 1 卷　第 1 期
Vol. 1　No. 1

中国数学会运筹学会《运筹学杂志》编辑委员会编辑　上海科学技术出版社出版

运筹学杂志

(半　年　刊)

第1卷　第1期

目　　录

第1卷 第1期 运筹学杂志 Vol. 1 No. 1
1982年10月 CHINESE JOURNAL OF OPERATIONS REASEARCH Oct., 1982

发刊辞

运筹学在欧美的简称是 O. R. (Operational Research)，日本译为"运用学"。我国译为"运筹学"，有了更深的意义。除掉"运用"又充实以"筹划"。但不必与"运筹帷幄之中，决胜千里之外"的"运筹"等同起来。因为即使是"兵书"、"战策"读得滚瓜烂熟，也会产生"赵括"、"马谡"这样的败军之将。何况 O. R. 毕竟不是兵书战策。

科学是实事求是的学问，夸大了不是科学，缩小了也不是科学。运筹学是一门许许多多管理单位、生产单位、设计单位、科研单位所需要的工具，是能为我国"四化"建设作出贡献的不可少的工具之一。除运筹学者之外，还是一些其他工作者所必须具备的工具。

运筹学被引进我国是五十年代的事，这二十多年中虽几经沧桑，但由于这门学科的生命力，它还是健康地存活下来，而且有了一定的群众基础，一支专业队伍。但我们的工作，除个别的情况之外，无论在理论方面和实际方面，都与国外先进水平有很大差距，还有不少空白之处。

我们出版这份刊物的目的是在于：促进我国运筹学迅速赶上国际先进水平。为了达到这一目的，本刊将及时地反映世界运筹学的新进展，新苗头，新理论，并介绍国外解决实际问题中某些好的例子和经验，当然也包括一些必要的消化和评价。科学的发展总是后浪推前浪的。

更重要的是，我国已有不少经验和成果，也需要宣传、交流和普及，展开各行各业的交流，互相切磋和讨论。只有敢于提出不同意见，进行讨论，才有助于科学的健康发展，才会扬弃旧的、建立新的。在科学的讨论中，胜不为荣，败不为辱。真理的确立，是人类的胜利，其中包括参加讨论的双方。

为了实现这些目标，我们在这儿提供一个园地。实际上，这是运筹工作者多年来的愿望。加上自一九八〇年中国数学会运筹学会成立之后，各大区的分会和协作组也相继成立，有关运筹学的各种学术活动又在蓬勃发展，本刊的出版也成为势所必然的了。

本刊的内容大致是：介绍学科的方向、具体内容和方法、实际运用的成果和经验、国内外动态、国内科研成果(摘要)及书评等等。风格是既严肃认真，又生动活泼；既深入浅出，又不回避必要的艰深数学。

当然要办好一个刊物，决不是少数编委会成员的努力所能办到的，必须有广大读者的关心和帮助。丰富的稿源，批评和建议只有来自群众，这样才能办好这一刊物。

这是由中国数学会运筹学会主办的第一份刊物，在条件成熟时我们希望能再出一份刊载创造性的学术论文的"学报"

最后，我们谨向上海科技 [illegible] 示深切的谢意，不是他们的大力支持，本刊是不会这么快地问 [illegible]

Vol. 1 No. 1 运 筹 学 杂 志 第1卷 第1期
Oct., 1982 CHINESE JOURNAL OF OPERATIONS REASEARCH 1982年10月

运筹学简介

越 民 义

在本文中，我们打算从下列三个方面来谈谈运筹学：

一、运筹学的含义及其简单历史

什么是运筹学？这是一个颇难回答的问题。按照世界上最早出现的运筹学会(英国运筹学会)所下的定义，运筹学是"运用科学方法来解决工业、商业、政府、国防等部门里有关人力、机器、物资、金钱等大型系统的指挥或管理中所出现的复杂问题的一门学科。"其目的是要"帮助管理者以科学方法确定其方针和行动"。但是，即使在上述这一定义出现的年代，关于运筹学也已经出现了几十个不同的定义，到了现在，它的定义则是数以百计了。这些定义虽各有不同，但其核心部分则是"用科学方法来处理自然环境中有关人和物的运行体系(所谓物，包括从机器一直到按人们已经接受的某些规律运转的复杂的社会结构)"。

人类社会的组织和生产只要进入某种水平，人们在考虑有关战争、管理等方面所出现的问题时，自然就要仔细筹划，设法得到对自己尽可能最有利的结果。而要达到这一目的，他的思维和使用的手段必须合乎客观规律，也就是说，必须具有一定的科学性。因此，某些朴素的运筹学思想可以说是"自古有之"。这在文献里不难找出证明。但是，把运筹学作为一门学科并进行系统的研究，则是本世纪四十年代的事了。

诚然，早在1938年，英国为了检验大型作战演习的效果，成立了一个科学小组来进行此项工作，"运筹学"(意即作战研究)一词即已提出。而且在第二次世界大战期间，英国、美国和加拿大的各个主要兵种相继成立了"运筹学"小组或"作战分析小组"(Operations Analysis Section)等组织。但毕竟当时只是对具体问题进行具体研究，还没有把"运筹学"提到学科的高度上来。因此，我们可以认为：运筹学在当时是处于一种孕育阶段。

这一孕育阶段对于运筹学的发展是极其重要的。当时参加运筹学工作的科学工作者在战争结束时估计超过700人。他们用许多实际例子证明了，即使象战争这样紧急复杂、变化多端的事件，科学分析方法在诸如对于提供技术上的支持，各种战术结果的评估，某些战术上的革新创造，战术上的规划以至战略上的选择等等皆作出了富有成效的结果。不仅如此，而且在后来更为重要的是：这些人当中的不少人通过自己的实践，从战争年代的科学工作中看到了一门从事于系统运行的研究的新兴科学的萌芽，并看到了当时所获得的知识可能会应用于和平时期的许多活动。

正是由于这种体会，所以在战争结束之后，在英国，一部分先驱者(包括Blackett, Goodeve等人)即举行一些非正式的会议，讨论如何把他们在战争中发展起来的运筹学方法

本文1981年3月17日收到。

转到民用方面来，并同意(在1948年)成立一个运筹学俱乐部，使得这些非正式会议能够持续下去。俱乐部里除了讨论运筹学在工农、服务等行业中应用的各种可能性(如棉纺、钢铁、煤、电、制鞋、牲畜饲养、建筑、运输等)之外，还为第一份运筹学杂志(运筹学季刊，1950年)的创办奠定了基础。俱乐部在1953年改为(英国)运筹学学会。

在美国，国家研究院于1949年成立了一个运筹学委员会，其目的也是培养人们对非军事运筹学的兴趣。同年，美国运筹学学会成立，这也是世界上第一个运筹学学会，学会在当年就出版了自己的杂志«运筹学»。现在世界上已经有三十多个国家成立了全国性的运筹学学会。以运筹学命名或直接与运筹学密切相关的刊物估计在40份以上。

二、运筹学所研究的对象及其方法论

要使一门学科得到发展，特别是象运筹学这样在短时期内得到快速的发展，单凭某些人的努力是不够的。它首先必须适应当时社会的需要，特别是社会生产的需要，否则即使是风行一时，也会很快消声匿迹。其次，它必须具备使该门学科得到发展的条件，否则它也难健康地成长。在第二次世界大战之后，由于战争中发展起来的一些技术转为民用，出现了一些新兴工业，其中不少在生产过程方面很复杂，规模庞大，人们遇到了一些前所未有的问题。这类问题单凭个人的经验和直观的判断是无法处理的，而运筹学的思想和方法正适合于帮助处理这类问题。另一方面，由于第二次世界大战之后，计算机科学得到迅速发展和广泛采用，这对于利用运筹学方法来解决大型的、复杂的问题提供了有力的工具，因而使运筹学方法(至少是一部分)成为切实可行。

一般说来，运筹学所能做的事情就是：把当事人所提出的问题以及涉及的系统，以科学的态度弄清楚，并以科学的语言表达出来。若有可能，尽量用数学语言来陈述。同时又必须以严格的科学态度搜集和分析可以得到的资料，挑选出其中与问题有关的，并根据过去的经验考察其中与当前情况有因果关系的部分，然后再看看缺少哪些有用的资料并设法补充。假若这些缺少的资料由于某种原因不能搜集到，则需要考察在某种给定情况之下会产生什么结果。特别是要着重考察那些可控制的因素，注意它们的变化对于整个系统可能产生的影响。研究的目的就是要对问题所涉及的系统得到确切的了解，提出解决问题的途径，以便最优地去控制系统使之服从于当事人的最大利益。总之，运筹学的目的，就是要帮助当事人作出决策：对情况作出客观的分析，对各种可能出现的情况作出科学的估计，提出控制系统的途径和方法。

运筹学虽然以“运用科学方法来解决大型系统的指挥或管理中所出现的复杂问题”为其目标，但要求一个问题得到真正解决，往往需要有某种切实可行的方法以及具备解决该问题的能力的人才(反之，通过解决问题，又可以创造出新的方法和培养出新的人才。)运筹学的发展正如同其它学科一样，也是一种从小到大，从简单到复杂的过程。也就是说，开始主要是解决一些比较简单的问题，然后发展到解决比较复杂的问题，所解决的问题的范围逐步扩大。同时，运筹学作为一门学科，在理论和方法上也取得了巨大的进展。现在我们就来简单介绍运筹学这门学科所包含的主要内容和它在当前的应用领域。

作为一门学科来说，运筹学的内容可以大致表示如下：

- 运筹学
  - 决定性模型
    - 优选、统筹
    - 数学规划
      - 线性
      - 非线性、几何
      - 整数、参数、多目标
    - 组合最优化
    - 图论、网络流
    - 动态规划
  - 随机性模型
    - 对策
    - 排队、更新、维修、可靠性
    - 存储
    - 搜索
    - 随机控制
    - 决策
    - 模拟

我们现在对每一分支作一简单解释。由于统筹和优选学在国内已有多种介绍性资料，这里不再赘述。

(1) 数学规划 数学规划所要解决的问题就是要在某种约束条件之下，决定某些可控制的因素应该取什么样的值，使得所选定的目标达到最小(或最大)。用数学的语言来表示，就是要解决下述极值问题：

$$\min_{x\in A} f(x), \quad x=(x_1, \cdots, x_n)。$$

极值问题虽然早已存在，但现在考虑的数学规划问题与古典的极值问题却有很大的差别：(i)古典方法只能处理当 $f(x)$ 和 A 很简单的情况，而现在实际中所出现的问题，$f(x)$ 和 A 一般都很复杂；(ii)古典方法只能处理 n 很小的情形，例如 $n=3, 4$。而现在 n 一般都相当大，个别问题的 n 甚至上百万；(iii)古典方法往往满足于一个表达式，而现在则需要把所需数值具体求出。基于上述原因，要想解决数学规划问题，必须另辟新路。实际上，自从 Dantzig 在 1947 年发表关于解线性规划(即 $f(x)$ 为 $x_1, \cdots, x_n$ 的一次式，A 由 $x_1, \cdots, x_n$ 的一些线性不等式所组成)的单纯形法以来，数学规划已得到非常迅速的发展。现在，数学规划本身已发展出许多分支(如上表所示)，每一分支都有许多人在进行研究工作、国际数学规划协会已于 1970 年成立。以数学规划或最优化等有关名字命名的杂志不下十种。由于数学规划的兴起，使得一些有关的学科，如凸分析、数理经济学、应用泛函等也得到相应的发展。数学规划已成为近代应用数学的一个重要组成部分。由于数学规划方面通俗的或专门的著作已经容易见到，我们就不在这里介绍它的内容了。

(2) 组合最优化 在运筹学的最优化问题中，有一部分问题所涉及的因素的取值范围是离散的，而且在许多情况是有限的(例如，只取 0 或 1)。这类问题中，有些不能用传统的数学式子来描述；有一些虽然可以描述，但一个提法简单的问题却需要极为复杂的数学式子，以致变得不能驾驭。这类问题往往需要用某些特殊方法来处理，特别是用一些组合方法来处理，这样就产生了一门新兴的学科"组合最优化"。这门学科包含有许多常用的，但一般很难于处理的著名模型，例如排序问题、网络流问题、集的分析问题，图的着色问题，等等。有关组合最优化的文献很多，可参考 Combinatorical Optimization (ed. N. Christofioles) 一书，其中不少文章是综合性的，对各种问题的现状有较完全的介绍。

(3) 对策论 对策论的主要目的是利用数学方法去研究对抗问题。其中主要的一个问

题是：假若在一场斗(竞)争中，某一参加者的所有对手皆采取常用的策略，则该参加者应如何对付？对策论的出现虽然可上溯到本世纪20年代或更早的时间，但真正为今日的对策论的数学理论奠定基础，则始于1944年出版的J. von Neumann和Morgenstein所著“博奕与经济行为理论”一书。该书对于二人零和有限博奕这一最简单的情况作了较详细的处理。从五十年代起，关于一般的二人零和博奕，n人的合作与非合作博奕，微分博奕等的数学理论皆已取得长足的进展。有关博奕论的文献很多，但系统性论述的书籍却很少。(可参考A. J. Janes, Game Theory, mathematical models of conplict 和 Aubin, mathematical method of game and economic theory, 1980)

对策论的研究所涉及的方面有社会心理学，政治学，军事学，管理科学，经济学等。心理学家和政治科学家所关心的主要是：当人们发现自己处于斗(竞)争场合时，各人通常的表现是什么？从而有关方面应该采取什么样的策略？管理工作者则主要关心所谓的最优策略。也就是说，在各种可能出现的情况下，应采取什么样的对策。就目前来说，对策论中的理论成果大部分是定性的，这主要是由于要解决实际问题需要大量的计算和资料。对于实际应用中所出现的对策问题，人们常常采用模拟的方法去解决。在人与大自然的斗争、战争以及商业竞争等方面，为了培训人员或预测的需要，出现了许多有关处理实际模型的方法。(可参考 Naylor, T. H. Bibliography, 19, “Simulation and gaming”, Computing Review, 1969, 61～69)

(4)图论、网络流 所谓图乃是指由一组给定的点及一组给定的连接这些点的线所组成的总体，而图论则是研究图的理论，特别是研究根据连接方法所产生的各种特征。图论的产生可以上溯到十八世纪，但它得到重视而且逐渐成为一门学科，则是本世纪三十年代以后的事。特别是五十年代以后，由于许多具有离散性的问题皆可以通过图来表示，使得图论的研究越来越为人们所重视。图论所研究的问题主要可分成两类：其一是在给定的图中具有某种性质的点和(或)线是否存在？若存在，有多少？或至多(少)有多少？其二是如何构造一个具有某些给定性质的图或子图？从问题所讨论的性质来说，大致可分为：连通性、极值、嵌入、阵与拟阵、网络流等五方面。而连通性所研究的主要是如何除去最少个数的点，使一连通图变成不连通图，以及哈密顿圈之类的问题；极值问题则是研究满足某种性质的边或点的最少个数(例如，如何将一非平面图画在一平面上，使其相交的边数最少，路程最短问题等)；嵌入问题所研究的问题有：一个图能够嵌入某一曲面(使得各边不相交)的充要条件是什么，以及着色问题等等；所谓一个图的拟阵，实际上乃是一组边及一些回路，而这些回路中没有一个真正包含另外一个，且若有两个回路有一条公共边，则此两回路的和集必包含一条不包含该边的回路。近年来拟阵逐渐成为研究图论的一个重要工具。

也许，图论中得到最多应用的要算网络流了。从数学抽象的观点来看，所谓网络就是一个赋值图，也就是说各条边皆具有给定的流通量、长度、运费等数值的图。若这些线段皆有向，则称为有向网络；若只有一部分有向，则称为混合网络，否则即为无向网络。实际生活中可以用网络来描述的例子是非常多的。例如

1) 一国或一省的交通线可看成一个网络；

2) 一组电路可看成一个网络；

3) 一个管理机构的公文流通可看成一个网络；

4) 一个电视系统也可以看成一个网络。

可以用网络研究的问题很多，我们现在简单叙述下面两类问题：一类是网络本身所固有的；另一类则是属于网络流的管理方面的。前一类中常见的问题有：

a 从甲地到乙地的最短路线如何确定？

b 假若某些城市(不是全部)之间最大流通量已经确定，任何两地之间的最大流通量如何计算？

c 若某人必须通过网络中所有城市再回原地，最短的路线如何确定？

d 若网络中任何两城市之间的运费为已知，欲将某些物资从某几个城市运到别的几个城市应如何组织运输使费用最省？等等。

上述这些问题之中，有些已经有了可行的算法，例如问题d，即所谓运输问题。即使是牵涉到成百上千个城市和约束条件，在近代的计算机上也可以很快算出。但有些问题，例如问题c，通常亦称为货郎担问题，直到现在还没有一般性的算法。不过这些问题在近来也取得了一些进展，就是说，假若所通过的城市的个数不是太大，则运用某些特殊的方法可以在计算机上较快地得到解决。

属于网络流向管理方面的问题主要是指在流量的管理方面受到物资(或手段)的限制时，如何管理最大流量的问题，许多实际问题皆可形成这类问题。例如

在军事方面：

a 在攻击手段受到某种限制的条件下，如何确定一种最优阻止策略，以破坏敌方的通讯及(或)交通网络；

b 确定一交通网络在受到敌方破坏性攻击的情况下的灵敏度，从而(根据某种准则)定出最优措施以疏散某些保护流通的物资。

在商业方面：

c 综合规划商品的流通渠道，例如油管、运输线路、制造车间的走道和输送线等。

d 在一工厂中确定生产部门的地点位置。

在公用事业方面：

e 设计公用事业服务系统或公路系统；

f 确定在因修理或发生事故的情况下，关闭某些通道时对于网络的流量和旅行时间所产生的影响。

g 与问题a相反，假若由于运输量的增加，已发现现有网络已不能胜任，则在该网络中应在何处增加线路才能使某种指标达到最优。

上述这些问题近年来已经逐渐为人们所注意。

(5) 存储理论 在运筹学出现之前很久，存储问题就为人们所注意。一个大型的工厂或公司要进行正常的业务活动，就必须储备大量的备件。每种备件应储备多少才能收到最好的经济效益，这自然是人们所关心的问题。

存储理论所研究的乃是关于购买所需要的项目(零件、材料、货物等)的时间、数量等方面的问题。它主要是对于某些(不是所有的)类型的策略进行分析。所考虑的内容包括：所需项目的生产(或购买)时间和数量、运输问题、需要量的概率分布、维修、变质等等。有时还需要将几种项目同时考虑，比如某些元件的生产或购买价格不能与别的元件分开计算时就

是这样。

当然我们所关心的主要是寻求出某些存储策略，它们按某种衡量指标来说是合格的或是最优的。衡量指标所涉及到的因素一般有：价格、供应、供应和需求的概率分布、存储费用、缺货时所受到的损失等等。在实际问题中，这些因素出现的形式有种种的差异，因此从处理问题的角度来看，就会有种种不同的类型。例如有的场合，需要量是定时定量的，有的场合，需要量则是随机的。这两种类型在数学处理上就大不相同。再从缺货的角度看，有的在缺货之后还必须补足，有的则不然；有的是定期检查存货，有的则是随时检查；有的模型只考虑一个货站，有的则必须几个货站同时考虑。这样，从数学处理方法的角度看，存储模型就有各种不同的类型。有的很容易得出结论，有的则很困难。

现在我们用一个很简单的、理想化的例子来说明这种模型。

假设有某种零件在生产过程中需求量是很稳定的，比如说在每单位时间里总需要 m 个这种零件。假若在缺少这种零件时，我们可以开工生产，而且很快就可以造出来。假定开工一次的开工费是 k，生产一个零件所花的费用是 c，并且若将多余的零件储备起来，则每一个零件在每单位时间内的储存费用是 h。我们现在的问题是，每次开工生产时，应生产多少才算合理？

要解决这一问题，我们先注意，由假设，这种零件在需要时很快就可以造出来。因此我们所采用的策略是：等零件快要用完时再开工生产。设所生产的数量是 Q，则开工一次所花的费用是 $k+cQ$；至于存储费用，我们应注意所生产的 Q 个零件共在 Q/m 个单位时间内用完，在第 i 个单位时间所需用的 m 个零件所用去的存储费用是 $h\cdot m\cdot(i-1)$。于是总的存储费用是 $\frac{h}{2}m\left(\frac{Q}{m}-1\right)\frac{Q}{m}$。所有这些费用都是在长为 $\frac{Q}{m}$ 的这段时间里消耗的。因此单位时间的平均费用是

$$\left\{k+cQ+\frac{h}{2}m\left(\frac{Q}{m}-1\right)\frac{Q}{m}\right\}\Big/\frac{Q}{m}=cm+\frac{km}{Q}+\frac{h}{2}(Q-m)。$$

欲求最好的 Q，只需将上式对 Q 取导数，然后令其为0，即解得 $Q=\sqrt{\frac{2km}{h}}$，也就是说，在我们的假设之下，每次以生产 $\sqrt{\frac{2km}{h}}$ 个元件为最合理。

上述的例子是一个高度简化了的情形。这还是在1915年就已得到的公式。第二次世界大战以后，存储理论得到了很快的发展，对于许多较为复杂的模型求出了最优策略。存储理论的发展有着许多不同的倾向。有的(Dvoretsky, Arrow 等)是考虑抽象的数学模型，它在一些有关供需的假设下从经济意义上来寻求最优解；有的(Magee 等)则从实效的角度出发，考虑诸如如何测量需求、供应等问题。可参考 Wagner and Whitin, Inventory Analysis, 1962。目前存储理论使用比较有效的地方是那些使用大宗常用物资的场合，在这种场合，比较容易得到可靠的统计资料。据文献报导美国海军部已有相当数量的项目都是基于存储理论的结果来控制的。

(6) 排队论(或称随机服务理论)　排队论的研究目的是要回答如何改进服务机构或组织服务对象使得某种指标达到最优的问题。例如

1) 一个机场应有多少跑道？

2) 一个港口应有多少抛锚处？

3) 一个地区应有多少停车场?

4) 一个百货店应有多少服务员?

5) 一个工厂应有多少检修人员?

6) 一个医院应有多少病床?

7) 对于飞入一个城市的定期航空班机应如何安排时间表?

8) 如何安排火车或运输车队的时间表?

等等。排队问题在国民经济生活中和生产实际中是大量存在的。

一个随机服务模型主要由两个因素构成:一是服务机构(称为服务站),一是被服务的对象(称为顾客)。此外还加上一些规则,例如排队规则,服务规则等等。有些模型是一目了然的,例如公共汽车站的排队现象;有些则并不是那么直接可以看出。例如电话,电话公司的交换机可看作是服务站,叫一次电话则可看成是一个顾客的到来。假若设备的服务能力跟不上顾客的需要,则会出现等待现象,造成经济上或时间上的损失。例如一个轮船码头,假如装卸能力跟不上来船的需要,在经济上就会受到损失,这时就要考虑扩建码头的问题。反之,假若服务能力超过了实际的需要,就会发生空闲的现象,这时就要考虑缩减机构的问题。无论哪种情况,都有一个问题必须考虑,即如何预测服务机构改变之后将会发生的变化。例如某一工厂的工人在工具损坏后要送修理处排队等待修理,这时生产上因排队误工所引起的损失,可以根据以前的统计数字估计出来。但若工厂要考虑增加修理设施是否合理,就需要预测增加修理设施后,所收到的经济效益是否能抵消增加修理设施所需的费用。这种预测工作就需要进行理论方面的研究。

随机服务理论的研究早在本世纪初就已开始。1909年瑞典工程师 Erlang 在研究电话网络的壅塞问题时,就曾对电话呼叫的到来所形成的“流”作了系统的研究。关于电话方面壅塞问题的研究直到现在仍然是电话机件设计的重要课题之一。随机服务问题受到广泛注意是第二次世界大战以后的事。在1951年,英国的 D. G. Kendall 采用了嵌入马氏链的方法,对队长与服务能力的关系作了系统的研究。此后就引起了大量的理论性的文章。这些文章主要是讨论各种模型中的一些基本量,例如队长的分布,服务站空闲时间的分布等等。近年来排队论的研究逐步走向实际应用方面。这表现在:

1) 与排队问题有关的统计分析问题正受到注意。这是对于分析数据,以选取适当的模型作为进一步研究的基础所不可缺少的。

2) 如何使一个系统达到最优化也逐渐受到更多人的注意。不少实际问题都是以网络形式出现的,特别是工序安排这类问题更是如此,这类问题逐渐引起人们的重视。

3) 对于一些刻划排队现象的函数,如何用一些简单的函数去逼近,这也是一个近年来受到注意的问题。要使排队论真正得到实际应用,这种工作是必要的。

4) 从理论方面看,对于较一般性的排队过程的某些性质(例如排队分布的凸性与单调性)进行研究,从而增加对排队系统的了解,是很必要的。另一方面,由于对于一般性的排队过程很难得出精确的解答,因此关于这类过程的定性研究也就成为很自然的事情。

(7) 更新论及可靠性理论 更新论的研究目的,就是要回答工业中或军事上所使用的

设备应该在什么时候，采取什么样的策略来更换、维修、检查之类的问题。下述这些问题都属于更换问题：

1）一些设备越来越陈旧，维修费和因停工而受的损失越来越大，应在何时更换才算合理？

2）某些大量使用的设备（例如计算机上的三极管）单价不高，若坏一个换一个，则因停工而受的损失甚大，应该采取什么样的更换策略才算合理？

3）某些设备随年龄而退化并且只在紧急情况之下才使用（例如，消防蛇管、导弹之类）。这些设备需要随时检查，否则到使用时发觉已经失效，因而引起重大的损失。检查一次费时费工很多，应该采取什么样的检查制度才算合理？

与更新论密切有关的是关于可靠性的理论。它主要研究具有随机失效的元件（或系统）圆满地完成它的使命的可能性有多大；以及在元件的可靠性已知的情况下，要使某种设备达到预定的效果，应如何使用这些元件。

更换问题早在三十年代就受到人们的注意。例如，N. R. Campbell(1941)就曾讨论路灯的更换是坏一个换一个好，还是集体更换好这样的问题，但是只是由于近代技术的需要和第二次世界大战中所得到的经验（战争开始时美国库存的物资，不少已经失效），更换问题和可靠性问题才受到工业部门和军事部门广泛的注意。这种情况也反映到数学方面来，其结果就是一些在决策中起重要作用的基本量（例如在特定时期内设备失效次数的概率分布、在特定时期内平均的更换次数，在某一时刻正在使用的设备的剩余寿命的分布，系统可靠性的上界和下界，种种模型的可靠性计算等等）在数学中得到了深入的研究。

(8) **搜索理论** 假设有一目标需要搜索，已知该目标或位于某一区域之中（连续性的情况），或位于某有限个或无穷多可能的点上（离散的情况）。假定目标的确切位置不知道，并假定搜索者在开始点已知该目标处于各个位置的可能性大小（概率分布）。假如搜索者用于搜索该目标的手段（资源、经费等）是受到一定限制的。搜索论所要研究的一个基本问题就是：如何将这些手段分配到搜索区域使得能够搜索到该目标的可能性最大。上述问题假定目标为静止的，但搜索论也研究活动目标的情况。在此种情况，一般假定目标的活动规律与搜索者的行为无关。对于被搜索者已知被追击而设法逃避的情况，问题就困难得多。这方面只有少量的结果，主要是利用对策论来处理。

搜索论起源于第二次世界战争时期：当时急需设法尽量有效地利用飞机和船只去发现敌方潜艇。当时作出的理论虽然很粗浅，但在军事上已经起了很好的作用。一般说来搜索论是由两部分组成：一部分是塑造模型，并从数学的角度去寻求问题的解答（确定搜索策略），另一部分则是如何设计和使用用于搜索的设备，以及在目标搜索到了之后如何处理的问题。目前已发表的文献以前者为主，对于后者则极其稀少，主要原因是出于对技术保密。搜索论在实际应用中已取得不少效果：它主要用于军事目的（Enslow, P. H. Jr., "A Bibliography of Search Theory and Reconnaissance Theory Literature", Nav. Res. Log. Quart. 13, 172～202(1966), Stone, L. D., Theory of Optimal Search, 1975.）。但在民用工业中，诸如寻找一个复杂设备的毛病，一个生产制造过程中的差错，以及寻找矿藏等等，搜索论也收到很好的效果。

三、展　　望

上面，我们已对运筹学的几个主要分支作了一些简单的描述。要对运筹学这样一门内容非常广泛，发展又很深入的学科的未来发表某种看法，这远非作者力所能及。下面所说的几点乃是根据国外某些同行的看法和作者自己的工作体会作出的。

(1) 运筹学的理论研究将会得到进一步系统的、深入的发展。前面曾经提到，数学规划是在四十年代末期才开始出现的，经过十多年的时间，到了60年代它即已壮大成长，形成了应用数学中一个重要的分支。各种方法和各种理论纷纷出现，蔚然壮观。但是，数学规划也与别的学科一样，在各种方法和理论出现之后，自然要逐渐走向统一的途径，也就是说，用一种或几种方法和理论把现存的东西统一在某些系统之下来进行研究。而目前这种由分散到统一，由具体到抽象的过程正在形成，而且将得到进一步的发展。这种情况同样发生在运筹学中有关随机模型的分支之中。

各种特殊的数学规划，例如组合最优化、参数规划、多目标规划，由于它们具有鲜明的实际背景将日益得到重视。

当一个具有较普遍性的运筹学问题提出之后，一些数学家、经济学家将会接踵而至来研究它的理论性问题，这些人往往来自于他们自己原来的学科，其结果，他们往往从事一些与运筹学无直接关系的课题研究。在这种情况之下，近年来有人担心，运筹学将会形成一些与她原来的目的不相适应的分支，而这些分支有被别的学科（例如数学、经济学等）吸收进去的危险。作者认为，对于象运筹学这类边缘学科来说，这是一种不可避免的趋势，这类分支的发展虽然会距它们的出发点越来越远，但却有助于人们对问题的深入了解，并对某些问题提供可靠的理论基础和方法。同时，我们已可把这种现象看作是运筹学的长处；它为别的学科的发展提供了源泉和动力。

(2) 军事运筹学将会对一般的运筹学带来日益重要的影响。在一些工业比较先进的国家，它们都有不少人在从事军事运筹学工作。据估计，美国就有一万到一万五千人在国防部门进行此类工作。由于军事运筹学问题的目的性和时间性都比较明确，从其中发展起来的方法将有助于民用工业中实际问题的解决。过去一些年中，由于保密等原因，军事运筹学很少为一般运筹学工作者所注意，但是诸如最优搜索理论，价格效用分析等原属军事领域的学科在民用事业中也已逐渐起作用，这可以说明军事运筹学方法将日益对一般运筹问题的解决产生影响。

(3) 塑造模型问题将日益得到重视。从事实际问题研究的运筹学工作者常常感到，他们所遇到的困难往往是：如何把一个实际的运筹学问题，变成一个可以用数学方法或别的方法来处理的问题。就目前来说，关于运筹学的理论和方法的研究，远远超过了对上述困难（问题）的研究。要使运筹学能保持她的生命力，这种研究非常必要。由于运筹学在国际上已经拥有如此庞大的队伍，对于这种研究的需要就日益迫切。

(4) 中长期的复杂的规划问题将受到重视。不少的实际问题主要关心的是未来的结果（例如厂房设置）。这类问题牵涉的因素很多，例如对未来的工艺、环境、预算、政治、社会条件等等，而对于这些因素的未来情况大部分只能从估计得出。如何对之进行估计，则成了重

要的研究课题。一个大的、中长期的规划问题的解决效果，固然受各种因素的制约，但它又影响别的许多因素。如何在众多相互制约的因素之下决定方针政策，使得某些指标达到最优，这样的问题当运筹学发展到一定阶段之后自然要出现。但是目前还缺乏有效的系统的理论和方法来处理这类问题。要使运筹学能适应客观的需要，寻求这种理论和方法是十分必要的。

总之，运筹学作为一门学科，在理论及应用方面，无论就广度或深度来说，都有着无限广阔的前景，它对于加速我国的四个现代化建设必将起到十分重要的作用。

《运筹学杂志》征稿简则

一、本刊贯彻执行百家争鸣，繁荣科学的方针，宣传和普及有关运筹学的知识，使运筹学在我国得到迅速和健康的发展。

二、本刊的主要任务是：

1．介绍有关运筹学的学科方向，学科的具体内容与方法。

2．发表国内运筹学方面的科研成果（摘要）。

3．刊登运筹学的实际应用的经验总结。

4．报道国内外运筹学动态以及书评等等。

三、来稿要求：

1．来稿内容必须符合上述规定的方针和任务。

2．文章力求精炼，内容充实，文字生动，含义明确，字迹清楚。公式推导务需简明扼要。科研成果简报以一千字为限，并需附寄全文。其他文章一般以七千字为限，正文前附200字以内的中文摘要。

3．来稿务必做到清稿定稿，一经排版，不得再作任何文字上的修改。文稿要用钢笔在同样大小的方格稿纸上单面书写，每字一格，标点符号也占一格。稿中图表要精确，线条匀称，图面整洁，并注明图表在稿中的位置及图号。

4．来稿必须附寄英文题目。外文字母一律用 印刷体书写，大小写严加区分。

5．参考文献一律附在文末，并应选择最主要的列入，未公开发表的请勿引用。书写格式如下：

[编号]，作（译）者姓名，文章题目，刊物名称，卷数：期数（年份），页码。

[编号]，作（译）者姓名，书名，出版社名称，年份。

6．来稿如不符合上述要求，本刊编辑部将先退请作者改抄后再送审。

四、稿酬

来稿一经发表，按有关规定酌致稿酬。

五、编辑出版

本刊由中国数学会运筹学会《运筹学杂志》编辑委员会编辑，上海科学技术出版社出版。来稿请寄：上海市嘉定县上海科技大学数学系转《运筹学杂志》编辑部，并注明作者通讯地址。

《运筹学杂志》编辑部

一九八二．十．

Vol. 1 No. 1　　运 筹 学 杂 志　　第1卷 第1期
Oct., 1982　　CHINESE JOURNAL OF OPERATIONS REASEARCH　　1982年10月

方法介绍

分枝与定界(Branch and Bound)方法简介

管 梅 谷
(山东师范学院)

§1 引 言

不少组合最优化问题可以归结为下面的形式:

$$\max_{x\in s} f(x) \quad 或 \quad \min_{x\in s} f(x),$$

这里 s 是一个有限集合。让我们看几个例子。

【例 1】 分配问题(Assignment Problem, 以下简称为 AP):

设有 n 个人 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 另外有 n 件工作 $B_1, B_2, \cdots, B_n$, 又设 A_i 做工作 B_j 可以生产的价值为 C_{ij}, 现在要分配每一个人 A_i 做一件工作 B_j, 规定每一个人都恰好做一件工作,问应该如何安排,才能使生产出的总价值为最大?

这个问题当然可以提成一个线性规划问题,但是也有另一种提法,例如设 $n=4$, 那末可以用下述办法表示一个分配方案:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_2 & B_3 & B_1 & B_4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

即 A_1 做工作 B_2, A_2 做 B_3, A_3 做 B_1, A_4 做 B_4, 简单些,也可以写成:

$$x=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}。 \tag{2}$$

(2) 叫做 1, 2, 3, 4 这四个数字的一个置换。因此,一般情况下可以说,每一个分配方案可以用 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个置换来表示,反过来,每一个置换也确实代表一个分配方案。

当然,每一个置换,即一个分配方案,对应一个价值。仍以 $n=4$ 为例,例如设:

$$C=\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 3 & 9 & 2 \\ 10 & 1 & 7 & 5 \\ 8 & 4 & 6 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

是价值 C_{ij} 组成的矩阵,那末(2)的置换 x 对应的价值是:

$$f(x)=c_{12}+c_{23}+c_{31}+c_{44}=5+9+10+6=30。$$

一般情况下,我们令 s 是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的所有置换 x 的集合,x 对应的价值用 $f(x)$ 表示,其定义为:

本文 1981 年 6 月 15 日收到。

若 $x=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}$，则 $f(x)=c_1i_1+c_2i_2+\cdots+c_ni_n$，$f(x)$是定义在 s 上的一个函数，而 AP 就可以归结为：

$$\max_{x\in s} f(x)$$

【例 2】 旅行售货员问题(Traveling Salesman Problem, 以下简称为 TSP)：

假设一个售货员住在城市 1，他要到城市 2, 3, …, n 去出售货物，问应该怎样走，才能既走遍他要去的所有城市(最后回到城市 1)，并且使所走的路程又最短。

仍以 $n=4$ 为例，下面的矩阵 C 中的数字代表从城市 i 到 j 的距离 C_{ij}(C_{ij}不一定等于 C_{ji}，例如两个城市，一个在上游，一个在下游，则可以认为往下游走较近)

$$C=\begin{bmatrix}0 & 3 & 5 & ④\\ 6 & 0 & ⑧ & 4\\ ⑨ & 2 & 0 & 3\\ 8 & ⑥ & 3 & 0\end{bmatrix}。$$

这时，售货员的每一种走法可以用一个排列来表示，例如排列

$$x=(1,\ 4,\ 2,\ 3) \tag{3}$$

就表示他从城市 1 出发，先到城市 4，然后再依次到城市 2 与 3，最后回到城市 1，按照这种走法，所走的路程将是：

$$f(x)=c_{14}+c_{42}+c_{23}+c_{31}=4+6+8+9=27$$

因此和例 1 相似，如果我们令 s 为所有第一个数字是 1 的排列 x 的集合，$f(x)$为按照与排列 x 对应的路线走时所走的里程数，那末，TSP 就也可以归结为：

$$\min_{x\in s} f(x)。$$

【例 3】 包裹问题

假设有一个人要出发旅行，他可以考虑带七种东西，每件东西的重量与价值如表 1 所示，现在他最多只能带 35 公斤东西，问他应该带哪几样东西最合算。

表 1

物品	重量(公斤)	价值
1	3	12
2	4	12
3	3	9
4	3	15
5	15	90
6	13	26
7	16	112

我们可以用下述方式来表示他带什么东西，例如

$$(1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1) \tag{4}$$

表示他带 1, 3, 4, 7 四样东西。简单说，我们是用：

$$x=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7) \tag{5}$$

表示他带什么东西，这些 x_i 只能取 0 或 1，$x_i=1$，表示带物品 i，$x_i=0$ 表示不带物品 i。不难看出，形如(5)的数组共有 $2^7=128$ 个，当然这 128 个数组中，有些是不可行的，例如：

$$(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

就是，因为这表示七种东西都带，结果总重量就超过 35 公斤了。现在我们用 s 表示形如(5)的数组中，所有可行的数组的集合，那末显然，这个问题也可以归结为：

$$\max_{x\in s} f(x)$$

类似的例子还可以举出很多，这里就不多举了。一般说来，如果集合 s 包含的元素不很多，那末我们可以把 s 中每一个元素 x 对应的 $f(x)$ 都求出来，通过比较，就可以求出最好的 x (以后称为最优解)了，这种方法可以叫做完全的枚举法。但是，在大部分实际问题中，用完全枚举法是不切合实际的，因为 s 中包含的元素往往非常多。拿 TSP 来说，不难看出，由 1, 2, …, n 组成的第一个数为 1 的排列共有 $(n-1)!$ 个，当 $n=30$ 时，$(n-1)!=29!$，这是一个极大的数，想通过一个一个的计算来求最优解，即使用很大的计算机，也是根本无法办到的。

当然，对于有些问题，我们可以用一些很好的解法来求它的最优解，例如 AP，虽然 s 中不同的置换将有 $n!$ 个，比 TSP 还要多(在 n 相同时)，但是已经找到了一些有效的算法，可以在较短的时间内求出它的最优解来。但是有不少问题，例如 TSP，却至今还没有找到有效的解法。

对于那些找不到有效解法的问题，人们设计了一种方法，即本文要介绍的分枝与定界方法。这种方法虽然不能说对所有的问题都很有效，但是它却能解决不少从生产实际中提出来的问题。

分枝与定界方法的基本思想是通过部分枚举来找出最优解，一般说来，往往只要计算 s 中一小部分 x 对应的 $f(x)$ 的值，就可以把最优解求出来了(注意，找到的并不是近似最优解，而是精确最优解)。至于具体做法，将在下面几节中再详细介绍。

§2 松弛问题与最优值的下界

为确定起见，下面专门讨论

$$\min_{x\in s} f(x) \tag{6}$$

形式问题的解法。很显然，只要形如(6)的问题会解了，稍加变化，也就会解形如

$$\max_{x\in s} f(x) \tag{7}$$

的问题了。

对于问题(6)，我们把 s 中的每一个元素 x 叫做一个可行解，使 $f(x)$ 达到最小的 x 叫做最优解，$f(x)$ 的最小值叫做最优值。

现在设 A 与 B 是两个有限集合，并且 $A\subseteq B$，另外，有一个定义在 B 上的函数 $f(x)$，这时，我们可以考虑两个最优化问题：

$$\min_{x\in A} f(x) \tag{8}$$

$$\min_{x\in B} f(x)。\tag{9}$$

一般我们称问题(9)是问题(8)的松弛问题。现在来研究这两个问题之间的关系。因为问题(8)的可行解集合 A 是(9)的可行解集合 B 的一部分(见图1),很显然,问题(9)的最优值一定小于或等于问题(8)的最优值。

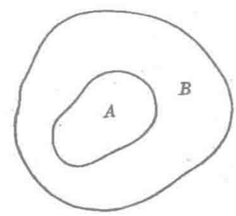

图 1

大家可能会这样认为,要解问题(9),搜索的范围大,而解问题(8),搜索的范围小,因此问题(9)比问题(8)要难解。这种看法似乎有道理,但是,实际情况却不一定是这样的,在不少场合,问题(9)反而比问题(8)容易解。

为了说明上面这一结论,让我们看几个例子。先看一个普通生活中的例子。例如 B 代表全国100米跑运动员的集合,A 代表年龄恰好是18岁的100米跑运动员的集合,对于每一个运动员 x,$f(x)$ 表示他的100米成绩,这时,要解决:

$$\min_{x\in B} f(x)$$

是不难的,只要一查全国纪录,就可以知道谁是目前全国纪录的保持者,成绩是多少。但是要解决

$$\min_{x\in A} f(x)$$

就困难得多了。

在数学中,类似的情况也常遇到。例如给定了一个 $n\times n$ 矩阵 C,它的主对角线的元素都是0,考虑以 C 中的元素为城市间的距离的 TSP,前面已经讨论过,这个问题的每一个可行解是一个排列(第一个元素是1),但是不难看出,每一个排列可以看成是一个置换,例如:

$$(1423)$$

代表的是:$1\to4$, $4\to2$, $2\to3$, $3\to1$ 这样一种走法,从而可以看成是置换:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}。$$

因此,如果把所有 TSP 的可行解的集合记作 A,以同一个矩阵 C 作为价值矩阵的 AP 的可行解集合记作 B,则由上面的讨论,不难看出 AP 是 TSP 的一个松弛问题。前面讲过,AP 要比 TSP 容易解,因此,我们又遇到了一个松弛问题比较容易解的例子了。

现在假设对于某一个最优化问题(8)来说,已经找到了一个比较容易解的松弛问题(9)。这时,可以采取下述办法来解问题(8):先解松弛问题(9),设 x_0 是(9)的最优解,它的最优值是:

$$z_0=f(x_0)。$$

然后再来看看,x_0 是否属于 A,如果碰巧是的,那就很好,因为很显然,x_0 一定也是问题(8)的最优解,也就是说,问题(8)已经解决了。当然在许多情况下,x_0 不属于 A,但这时 x_0 也有用,因为至少可以由 x_0 知道问题(8)的最优值的一个下界,因为很显然,问题(8)的最优值大于或等于问题(9)的最优值,即 z_0,所以 z_0 是问题(8)的最优值的一个下界。

从以上的讨论可以看出,解松弛问题(9),找出它的最优解 x_0 总是有好处的,如果 x_0 属于 A,则 x_0 就是问题(8)的最优解,而如果 x_0 不属于 A,那末就可以得到问题(8)的最优值的一个下界。