

编号: 0113

内 部

科学技术成果报告

倾斜动线形成犁体曲面研究

科学技术文献出版社



目 录

序言	(1)
符号	(2)
第一章 概论	(3)
§ 1.1 倾斜动线形成犁体曲面的原理	(3)
§ 1.2 南方水田系列通用犁体曲面规律性的探讨	(4)
§ 1.3 犁面数学解析法意义	(5)
第二章 犁面设计中的几个理论问题	(6)
§ 2.1 论犁壁的可展面与非展面问题	(6)
§ 2.2 从螺旋面的自锁临界状态探讨螺旋犁面的特征参数	(10)
§ 2.3 土迹线定性微分方程及其讨论	(14)
§ 2.4 土垡运动过程的初步分析	(18)
第三章 直纹犁面的数学解析法	(20)
§ 3.1 一般表达式	(20)
§ 3.2 倾斜动线直纹面组成的犁面	(22)
§ 3.3 水平动线直纹面组成的犁面	(25)
第四章 通用(A)型系列犁体曲面的数学模型、设计和试验	(27)
§ 4.1 犁翼曲面设计参数及其方程	(27)
§ 4.2 犁铧曲面设计参数及其方程	(30)
§ 4.3 犁胸曲面设计参数及其方程	(34)
§ 4.4 组合曲面的光滑性验算	(36)
§ 4.5 犁体曲面的设计	(38)
§ 4.6 犁体工作性能估算(通-20A)	(49)
§ 4.7 A型犁体的试制与试验	(50)
§ 4.8 土迹线的测定	(54)
第五章 计算技术的应用	(66)
§ 5.1 样板曲线计算方法及程序	(66)
§ 5.2 犁胸、犁翼测地线计算程序	(73)
§ 5.3 计算物理学在犁面设计中应用的展望	(75)
结论	(76)
附录 I 水平直元线熟地型犁体曲面(ВІСХОМ标准型)导曲线方程的推导	(77)
附录 II 螺旋面上几个几何关系的推导	(78)
附录 III 理论土迹线近似计算的数值解(通-20A)	(81)
附录 IV 翻垡型犁壁曲面的测绘和一个设计方案	(85)
主要参考资料	(87)

倾斜动线形成犁体曲面研究

《倾斜动线形成犁体曲面研究》课题组

序 言

铧式犁是人类历史上出现最早、应用最广的重要生产工具。它经历了长期生产实践的不断改进，然而直到科学技术如此发达的近代，犁体曲面设计还长期停留在最原始的“试验修改法”和“经验设计”的水平上。由于犁面工作对象——土壤的性质复杂多变，农业技术要求也有多种多样，犁体设计牵连的因素繁多，要达到有理设计的目标，非开展深入的理论研究不可。

苏联订为国家标准的水平元线法，属于经验设计的范畴，这个方法还有它的局限性，不能用以设计甚至不能表达世界上出现的许多“水平截面并非直线”的优良犁体，这也包括我国的水田通用型等犁体。

我们伟大的祖国幅员辽阔，作物、土壤、地形等种类繁多，精耕细作的农业优良传统对犁提出了种种要求。犁体曲面的性能直接关系到拖拉机的油耗和农业产量。随着农业机械化的飞跃发展，对犁面设计又提出了高速化的要求，犁面理论研究的重要性也日益显著。

遵循伟大导师毛主席的教导，“外国有的我们要有，外国没有的我们也要有”，几年来，我们在各级党委的一元化领导下，实行跨学科的社会主义大协作，进行了《倾斜动线形成犁体曲面的解析法》的研究，取得了新的进展。

参加本课题研究的主要单位和主要人员有：贵州省山地农业机械研究所杜家瑤，中国科学院应用数学研究推广办公室秦元勳，云南大学数学系邹举、王国栋，镇江农业机械学院孙一源，朱金华和太仓农机二厂蒋锡琦等同志。此外还有一些所、校、厂和试验单位的同志参加协作。

本文所用符号

大写英文字母

符 号	代 表 意 义	符 号	代 表 意 义
A	耕深	L	开度, 长度
B	单铧幅宽	M	力矩
C	积分常数	N, $\bar{N}$	曲面法向力, 曲面法矢
E	弹性模量	O	坐标原点
E_1	$E_1 = \frac{t}{2\pi}$	P	作用力
E, F, G	高斯第一基本系数	Pn	正压力
L, M, N,	高斯第二基本系数	R	曲率半径
G	剪切弹性模量	R	法矢模值
H	高度	R ₁	顶边线圆弧半径
I, J	惯性矩	R ₂	翼边线圆弧半径
K	系数	S	曲面
K ₁	$K_1 = \text{ctg}(\pi - \alpha_1)$	S ₁	犁翼曲面
K _g	测地曲率	S ₂	犁铧曲面
K _r	四分之一螺距与铧宽之比	S ₃	犁胸曲面
		dS	微弧
		T	时间, 推力

小写英文字母

符 号	代 表 意 义	符 号	代 表 意 义
a, b, c, d	水平迹线系数	q	荷重
b^0	副法向单位矢	q	参数 $q = x_n - x$
d, d ₁ , d ₂	系数	$\bar{r}$	矢径
c ₁ , c ₂ , ...	常数	r	半径
f	摩擦系数	s	弧长
g	重力加速度	t	时间
h	高度	t	螺距
i, j, k	单位矢量	t _c	临界自锁螺距
l, m, n	方向数	u, v	参数 $u = y_n - y$
l	水平迹线长		$v = z - z_n$
m	质量	w	参数, 斜螺旋面上, 任一点距轴线的距离
$\bar{n}$	法矢	x, y, z	坐标系
$\bar{n}^0$	单位法矢	(x _n , y _n , z _n)	水平迹点位标
n	元线号	x _i	胫刃线开度
p	压力	z _h	胫刃线高度

小 写 希 腊 字 母

符 号	代 表 意 义	符 号	代 表 意 义
α, β, γ	方向角	μ	泊桑比, 摩擦系数
α_1	动直线与水平迹线的正向夹角	μ, ν	二组直线族系数
α, β, θ	碎土角, 翻土角, 推土角	ζ	侧压力系数
γ	容重	π	3.1416
γ	土堡对角线长度	ρ	曲率半径
δ_n	元线在 zoy 面内投影角	ρ_0, ρ_1	粘附系数
ε	犁铧安装角	σ	正应力
ζ, η, ξ	坐标系	τ	切向力
η	土粒在犁铧的进入角	τ	螺旋线切矢
η'	水平迹线与 x 轴正向夹角	$\vec{\tau^0}$	单位切矢
θ	法矢间夹角	φ_n	元线在 zoy 面内投影角
λ	系数	ψ	翻垡角
λ_n	元线在 xoy 面内投影角	φ_1, φ_1'	内摩擦角
λ_0	铧刀角	φ	摩擦角

大 写 希 腊 字 母

符 号	代 表 意 义	符 号	代 表 意 义
Γ	动直线	Ω	水平迹线
Λ	曲面族参数	Ψ_1	系数
Φ	转角		

第 一 章 概 论

在党中央的英明领导下,二十八年来我国的耕作机械水平有了很大提高。南北方的系列犁已先后定型,并已投入成批生产。

我国创型的南方水田系列通用型犁体(通-20和通-25),经过大面积的生产考核,具有耕作质量较高和综合性能较好的特点,深受贫下中农的欢迎。为了探求其形成规律和设计方法,五年来我们进行了系统的科学研究,用倾斜动线法整理了该犁体曲面,发现了形成规律,建立了数学模型,并设计和试制了通用(A)型犁体系列,进行了试验工作。

§ 1.1 倾斜动线形成犁体曲面的原理

倾斜动线形成犁体曲面的原理是:动直线(又称元线或母线)的一端沿准线移动,同时在空间的方向角又按一定规律变动,即可扫描成直纹面。在该面上截取一块作为犁体曲面。

早在三十年代,霍洛希洛夫等人,对130余种美国犁体进行了大量的测绘和参数统计工作,发现通用型、牧草地型等五类犁体,可用倾斜动线表达,提出了八种几何作图法⁽¹⁾。由于所统计的是一些孤立的参数,又未能求得曲面的特征参数,因此这些参数的偶然组合,很难揭露构成曲面的规律性,以后亦未见用于生产。

我们采用倾斜动线法, 测绘整理了通-20、通-25、宁波-22 翻垡型、美国和波兰几种犁体, 在此基础上, 进行了曲面的数学解析, 建立了通用 (A) 型犁体曲面的数学模型。

§ 1.2 南方水田系列通用型犁体曲面规律性的探讨

一个作业质量优良的犁体, 必定有其内在的规律, 我们的任务就在于揭露它、认识它和利用它, 作为犁面设计的借鉴和基础。这就是理论研究的主要目的和作用。正如毛主席指出的那样: “理论才能解决本质问题。”

从总结南方水田系列通用型犁面的宝贵实践经验入手, 探索了犁面的形成规律。我们采用倾斜动线法对曲面进行了测绘、整理和分析, 并用数学解析法计算了某些参数, 发现了以下的规律:

1. “凸胸扭翼”的犁壁曲面可用倾斜动线形成的非展直纹面表达。

2. 犁壁的水平迹线: 通-20是由二段直线连成的折线组成, 通-25是由三段直线连成的折线组成。这两种犁体的水平迹线, 都有一段与 x 轴平行的直线, 并与 x 轴的距离约等于铧宽, 通-20为 $y=1.035B$, 通-25为 $y=1.02B$ 。此段水平迹线的迹点编号为: 通-20是 $n=7\sim 12$, 通-25是 $n=4\sim 9$ 。

3. 元线投影角的变化规律: 测绘了直元线在三个坐标平面上的投影角 δ 、 λ 和 φ 随元线号 n 的变化规律^[2, 3]。

4. 在不等宽犁铧的通用型 (原名滚-20、25) 犁体上发现接缝线与铧刃线汇交于一点, 测绘看出犁铧上的其他直母线也汇交于此点, 判定犁铧曲面近似于锥面。

5. 通用型犁体的犁胸曲面大部分是双曲点构成, 具有较好的脱土性能。

6. 犁面的理论胫刃线中段近似于指数曲线 (用纵坐标为对数的坐标纸画出近于直线)。通-20的理论胫刃线的近似方程

$$z=14e^{0.0103x} \quad (1-1A)$$

通-25的理论胫刃线的近似方程

$$z=13.5e^{0.018x} \quad (1-1B)$$

7. 犁胸曲面部分, 对曲面稍加整理后发现, 除了原来的一族直母线外, 还有第二族直母线存在的可能性。根据几何学可知: 在一个“二次曲面”上, 如果同时有二族直母线存在, 则可能是单叶双曲面或双曲抛物面, 而后者又必须满足以下条件, 即任取三条同族的直母线均需平行于某一平面。根据通-20、25的倾斜动线曲面图, 没有发现后一种的可能性。因此, 我们认为犁胸曲面有近似地整理为单叶双曲面的可能。此点规律性分析, 为尔后用二次曲面逼近所得的通用 (A) 型犁体的犁胸曲面所证实^[3]。

8. 动直线与水平迹线的夹角 $(\pi-\alpha_1)^*$ 有以下关系

$$\cos(\pi-\alpha_1)=\frac{\cos(\lambda-\eta')}{\sqrt{1+(\sin\lambda+\operatorname{tg}\delta)^2}} \quad (1-2)**$$

式中 η' —水平迹线与 x 轴的正向夹角, 当 $\eta'=0$ 时有

* 在犁面上 $\alpha_1 > \frac{\pi}{2}$, 故取其补角 $(\pi-\alpha_1)$ 来计算 (图12)。

** 推导见章末附注。

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \lambda}{\cos \delta} \quad (1-3)$$

以通-20之 $n=7\sim 12$ 和通-25之 $n=4\sim 9$ 元线角代入(1-3)式,得(表1)^{〔2〕}。

表1 通-20、25的 $(\pi - \alpha_1)$ 的数值变异状况

犁体 类型	元线号 角 度 n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\pi - \alpha_1$ 平均值	备注
通-20	$\pi - \alpha_1$				74°28'	74°30'	73°40'	73°51'	73°20'	72°39'	73°45'	与平均 值之差
	$\Delta \alpha_1$				-0°43'	-0°45'	0°5'	0°6'	0°25'	1°6'		
通-25	$\pi - \alpha_1$	75°3'	74°54'	74°13'	72°54'	71°10'	70°6'				73°14'	与平均 值之差
	$\Delta \alpha_1$	-1°49'	-1°43'	-0°59'	0°20'	2°4'	3°8'					

9. 通-20的犁翼部分和通-25犁翼及犁胸连接的一大部分曲面近似于斜螺旋面。

两种犁体的犁翼片的参数,经过计算,特别引起我们注意的是:

- ①两种犁体螺旋面片的轴线(即水平迹线)与 x 轴平行,与 x 轴的距离,略等于单铧幅宽。
- ②动直线与水平迹线的夹角 α_1 基本保持不变。通-20之平均值为 $106^\circ 15'$,通-25为 $106^\circ 46'$,二者只有半度之差。
- ③通-20各条动直线与水平迹线之夹角与其平均值之偏离不到一度(仅最后一根12号元线为 $1^\circ 6'$,未计入)。
- ④动直线以其一端沿水平迹线的位移与转角的关系,通-25为正比,通-20近似于正比。
- ⑤两种犁体的四分之一螺距与单铧幅宽之比,相同到小数后第一位,通-20为1.26,通-25为1.29,可以认为近似于1.30。

一般螺旋犁面采用正螺旋面作为整个犁壁,四分之一螺距与单铧幅宽之比,经我组统计的经验数为 $1.5\sim 2.5$,也有人认为是 $2\sim 2.5$ ^{〔5〕〔6〕}。

我国南方水田犁的犁翼设计有其独特之处:

- 第一,斜螺旋面只作为犁体组合曲面的一部分(如通-20的犁翼)而非全部。
- 第二,采用斜螺旋面,而非正螺旋面。
- 第三,螺距与铧宽之比较小。
- 第四,螺旋轴与 x 轴平行,其距离略等于铧宽。

§1.3 犁面数学解析法的意义

犁体曲面的数学解析是探索犁面形成规律的重要手段,只有建立了犁面的数学模型,才能较为深刻地揭露其本质属性。过去人们对犁面的研究,大都是些定性分析,仅限于对某些剖面线族形状的讨论,这就很难抓住曲面的实质性问题。也有些人曾用数学逼近的方法,描述过已有的某些犁面,但却罕见用诸于新的犁体曲面设计者。

通过犁面的数学解析,不但可寻求犁面的形成规律,还可望将曲面的几何、土壤物理力学

性质、和与耕速伴生的动力学诸参数之间建立起某些函数关系。正如 § 1.1 节指出，长期以来，人们对犁体曲面的研究，往往停留在各个孤立的参数试验和统计分析上，以致众说纷纭，莫衷一是，难得科学的定论。我们认为，探求自然的规律性，建立有关参数的函数关系，显然要比探求大量孤立参数的偶然组合来得简单明瞭。

数学解析既是力学分析的基础，也是工程技术和基础科学间的桥梁。只有建立了数学模型，才有可能借助计算数学，计算物理、相似理论和模型试验等等较先进的科研方法和手段，以提高研究水平。

我们课题对犁面的研究，就是采用数学解析的方法把工程制图、投影几何、空间解析几何和微分几何等沟通起来，既用投影图绘制了倾斜动线形成的直纹犁面和性能曲线，又用参数方程表达了同一曲面和曲线，经过实践与理论的多次反复，抽象出较能反映客观实际的数学模型，经过改进提高，再用于设计，使认识逐步深化，最后提出了《倾斜动线形成犁体曲面的数学解析法》。正如革命导师列宁所说：“遵循马克思的道路前进，我们将愈来愈接近客观真理（但决不能穷尽它），而遵循其他的道路前进，除了混乱和谬误之外，我们什么也得不到”。

犁面数学模型的建立，是我们研究进程中的一个重要突破，也为今后犁体曲面的有理设计探索了方向。

附注：求动直线与水平迹线之夹角 α_1

设水平迹线与 x 轴之夹角为 η'

则水平迹线的方向数为

$$[l_1, m_1, n_1] = [\cos \eta', \sin \eta', 0]$$

动直线之方向数为

$$[l_2, m_2, n_2] = [\operatorname{ctg} \lambda, 1, -\operatorname{tg} \delta]$$

则

$$\cos(\pi - \alpha_1) = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

将上项数值代入化简即得 (1—2) 式。

第二章 犁面设计中的几个理论问题

§ 2.1 论犁壁的可展面与非展面问题

犁面究竟用可展还是非展曲面有利的问题，尚无定论。

苏联郭列契金在多次论述中，认为可展曲面“……看来对犁壁是有利的”，这个观点在近代格亚捷夫等^[7]的著作中还加以肯定，为了获得可展曲面，若干年来，它们不断探索接近于原非展曲面的可展面的方法。

对此，我们持相反观点。我们认为：犁面可用双曲点或抛物点构成，不宜用椭圆点（凹面）构成。而用双曲点构成的非展直纹面比用抛物点构成的可展直纹面（作为犁壁）具有优越性。

认为可展曲面对犁壁有利的理由，在格亚捷夫的著作中指出：“这首先是因为这种类型的曲面可指望土堡更正确地依附在犁壁上，更有规律地沿曲面移动，土堡在这样的曲面上承受简单的弯曲变形。土堡更好地依附在犁壁上，这使犁壁磨损更为均匀，并且粘土趋向很

小，这种类型犁壁的优点在于制造简单便宜，因为制造可不要冲模，用于研究目的很方便。最后，可展曲面作为平面简单的单参数系列的弯曲面，它的参数的理论论证（当拥有相应的设计方法时）比其它类型曲面参数的论证更加简单”。

我国南方水田通用型犁面及倾斜动线法设计的通用A型犁面，已从理论和实践上对上述观点提供了相反的例证，“挺胸扭翼”犁面的实质是曲面为双曲点组成的非展面。

国外采用非展曲面的先例也不胜枚举。《犁体曲面理论》中也提到“所有美国犁体曲面具有负的总曲率（马鞍型），并且这些曲面对可展的偏差大大超过熟地型扭柱面犁壁”。

可展面固然易于制造，但近代犁壁生产工艺采用冲模红压，非展面制造也属易事，铸造犁壁则不论可展或非展面均属同等。

至于所谓“可展面能与土堡良好依附（贴合），有利于脱土，以及土堡在这样的曲面上承受简单的弯曲变形，……粘土趋向很小”等论点，我们却持相反意见。

从感性及理性认识上我们得出以下论点：

1. 贴合良好反而贴附力大。
2. 双曲点犁面有利于破坏土堡沿犁面运动时可能产生的“半真空吸附现象”（分析见后）。
3. 粘附力及摩擦力均随曲面上正压力而增，正压力则随土粒沿犁面运动方向的法曲率而减（分析见后）。
4. 曲面上各点正压力分布的方向，椭圆点构成的凹面（好象饭勺）上的正压力分布是会聚性的（指犁面施加于土堡的正压力）。双曲点的曲面有两个主方向，沿最大曲率方向者是会聚性的，沿最小曲率方向者则是发散性的，而抛物点的曲面由于有一个主方向（即直母线方向）的曲率为零，故分布在直母线上各点的正压力是平行的，而分布在最大曲率方向上各点的正压力是会聚性的。

证论如下：

1. 半真空吸附现象的实践体会与分析

土堡沿犁面运动过程中，在某些地方，土堡与犁面间有间隙存在，如果是周边贴合而中部有空隙时，呈封闭状态，此封闭空隙随土堡沿犁面运动时如容积逐渐变大（例如犁壁后部弯曲比前面大就有此趋势），空隙内封闭之空气压力小于大气压力，则将产生半真空状态。这就是半真空吸附的道理。

双曲点构成的犁面，一个主方向为向前凹，另一个主方向为向前凸起，故有利于破坏封闭空隙及半真空吸附状态，而由椭圆点构成的凹曲面，两个主方向的弯曲都是向前凹的。则易于产生半真空吸附。

过去在试制冷硬铸铁犁壁时曾遇到光滑的犁壁上，有时发生缩窝或气塘，试验中发现在此凹下的缩窝附近粘泥。

我国传统的“凸钱”就是在凹犁面上铸出一个个凸起的小圆包（至今江苏、山西等地有些步犁仍可见到）。农民说：它可以免得“闭气”。这就是为了防止发生半真空吸附的道理（在水田耕作中它还有使水浸入犁面与土堡间产生润滑的作用）。

2. 在同等条件下比较三种类型曲面的脱土性能

脱土性能在粘性土壤地区耕作时具有重要意义，土壤对犁壁的粘附力与摩擦力都随犁壁曲面和土堡间的法向压力而增长。

外摩擦和粘附是同时发生的，在土堡沿犁壁滑动过程中总滑动阻力可用下式表达：

$$T = T_m + T_n = fN + (\rho_1 NS + \rho_0 S_A)$$

式中: T ——总滑移阻力;

N ——曲面的法向压力;

T_m ——滑移摩擦阻力;

T_n ——由粘附而产生的滑移阻力;

f ——土壤与金属间的摩擦系数;

S_A ——可见的接触面积;

ρ_0 ——无正压力(起始时)单位粘附切向阻力系数(公斤/厘米²);

ρ_1 ——单位接触表面上的粘附阻力强度系数(1/厘米²)。

由上式可见,总滑移阻力随 N 而增大,当总滑移阻力大于或等于土堡传递之切线推力时,土堡就将不能在犁面上滑动,一旦犁壁上附着了土(甚至不大的局部薄层),那么与附着层接触的土层即继续粘附,耕作一段时间后它就完全破坏了犁面的形状。(有人认为附着力与犁面设计无关大概指的是此意)。在这种粘土的状态下,耕作时土壤的内摩擦及粘结代替了土壤(与犁壁)的外摩擦及粘附。

曲面的法向压力 N 可由土粒沿曲面运动的自然方程式的曲面法向投影求得:

$$m \frac{V^2}{R} = F_n + N$$

式中: m ——质量;

V ——速度;

R ——土壤运动方向的法曲率半径;

F_n ——重力在曲面法线方向的投影;

N ——曲面法向反力;

由上式可见:法曲率大则 N 值大,导致动粘附增加。

所以对于三类曲面的脱土性的比较,必须在法曲率相同的点的近旁去比较,(即是说应在同等条件下)。试以三类典型曲面(用最简单表达式)比较:

A. 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

B. 柱面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

C. 单叶双曲面(非展直纹面)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

显然在 $z=0$ 的截线上三者对应点的法曲率相同而且都是主曲率之一。

在此法曲率相同的截线上对应点的附近,当土粒进入方向相同时,(不论进入方向如

何，因三者在此截线上是公切的），则可见单叶双曲面的凹方曲线的法曲率在三者比较中总是最小值（犁体曲面总是用凹方工作），而法曲率最小意味着 N 最小，因而摩擦阻力及动粘附力均较小，从而说明非展直纹面较其他曲面形成犁体是比较有利的。

当然这不等于说只要是非展直纹面就能脱土，必须具体情况具体分析即是说必须视法曲率的大小所产生之摩擦力及动粘附阻力的大小（与土壤性质有关）并与土堡运动过程中传递之推力相比较，当推力大于阻力的情况下才能脱土。

此外，曲面的光滑性只能解决摩擦问题，过于光滑的犁面往往愈易粘附。

3. 土堡沿不同曲面运动的离心力

离心力与土粒的轨迹的曲率半径 ρ 成反比。

$$F = \frac{mv^2}{\rho}$$

式中： F ——离心力

m ——质量

v ——切线速度

取犁面与土壤之一接触微面 ds 而论，对于椭圆点（总曲率为正）构成的曲面， ds 上土粒各点的离心力总是冲向曲面凹方，这样引起的曲面反力的合力势必大于双曲点构成的曲面。

对于双曲点（总曲率为负）构成的曲面，由于有两个主曲率方向，主曲率一正（前凹）一负（前凸）， ds 上各点土力的离心力引起的曲面反力的合力势必较小。抛物点构成的曲面则在以上二者之间。

4. 从曲面各点的法向力对土堡的弯、扭变形和破碎作用来评价可展与非展直纹面。

格亚捷夫认为：可展曲面对于犁壁有利，……土堡在这样的曲面上承受简单的弯曲变形……可展曲面作为平面简单的单参数系列的弯曲面，它的参数的理论论证比其他类型曲面参数的论证更加简单。

我们认为犁面的作用是为了获得良好的耕作质量，不能为了论证简单就肯定可展曲面有利。

下面我们试从曲面各点的法向力对土堡的弯、扭变形和破碎作用来评价可展与非展直纹面。

对于可展直纹面，在任一条直母线上，各点的切平面只有一个，即是说在任一条直母线上各点的法线方向相同，而在非展直纹面上各点的法线方向则不一致，这是由于各点的切平面均不同所致。

直纹面是由直母线的运动所构成（或扫描出）的。

对于可展直纹面上任一条直母线上各点的曲面法向力只能有大小的差别，而没有方向的差别，可以按平行力系合成一个合力。

非展直纹面上任一条直母线上各点的曲面法向力除有大小之别外，还有方向的改变，在任一直母线上任一点之曲面法向力位于此直母线之法平面内（过该点）。直母线上各点法向力之投影见图1a，在任一点 P 之法平面上表现为真实投影，（在此位置直母线的投影成为一点）；而图1b为包含此直母线之切平面上的投影（ P 为切点）。

这些法向力是既不平行也不相交的，故不能合成一个合力，但可合成一个合力及一力

偶。即是说直母线上各点之法向力对在此直母线上之土粒产生“力螺旋”的作用—这是非展直纹面的特点。

直纹面是由直母线运动构成，取一倾斜动线法构成犁面的直母线族，它将上面各点之法向力表示出来，即可显示犁面对土堡翻转、弯曲及扭转作用。

取土堡与非展直纹面接触之一块小面积 ΔS 来看，由于它上面各点之正应力方向及大小均有变化(不平行也不相交)，故对此微面 ΔS 必然产生一个合力及一力偶(即力螺旋)，此力偶除可导致土粒间之粘结性受到一定程度的破坏外，还将导致土粒与曲面间之粘附性受到一定程度之破坏，从而有利于松碎和脱土。

再以土堡与单叶双曲面(由两族直母线构成)上任一点 P 接触之一微面 ΔS 而论，两个主方向之正应力分布(指方向)不同，我们规定 K_1 、 K_2 表示最大及最小曲率，曲面沿主曲率 K_1 方向之截面线为凹线，沿 K_2 者为凸线，则在 K_1 方向线上各点之正应力为会聚性的，沿 K_2 方向线者则为发散性的。

在过 P 点之切平面上可绘出 ΔS 上主方向及渐近方向(即直母线)各点之正应力投影(见图2)，可见在两个互相垂直的主方向上正应力对土堡产生之弯矩方向相反，最大曲率方向(凹方)者为前弯，最小曲率方向(凸方)者为前凸，故其碎土能力较可展面之单向弯矩作用为强。在两个渐近方向(直母线上)之土粒则产生扭转，相当于受到两个方向相反的力偶之作用，同样有较强的碎土能力。

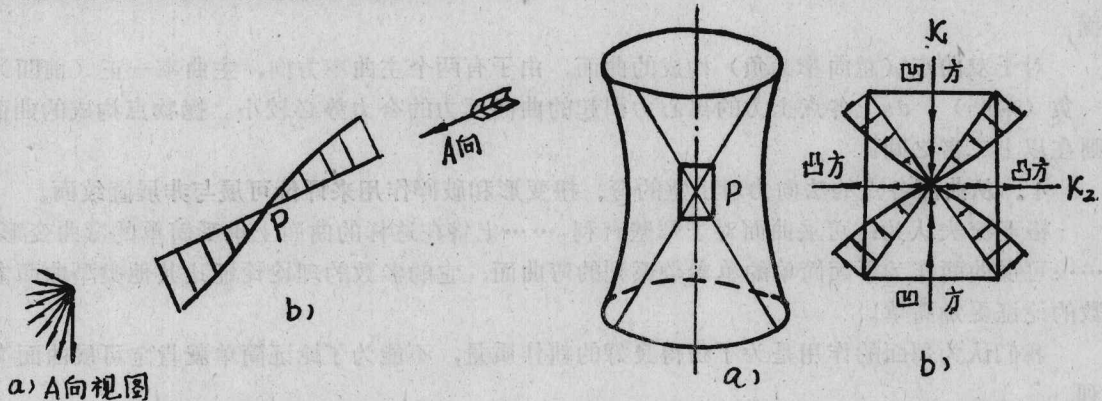


图1 直母线上各点法向力的分布

图2 单叶双曲面上一点切平面正应力之投影

- a) 过 P 点之切平面(取一微块表示)。
- b) 曲面作用于与它接触之土堡微块之正应力在 P 点切平面上之投影。

土堡沿犁面运动过程中由于各点轨迹在曲面上之主曲率存在着方向与大小的变化，由上述分析可知，土粒间之粘结性及土壤与犁壁之粘附性均将受到不同程度之破坏。故有利于使土堡松碎及犁壁脱土。

犁面可用双曲点与抛物点构成，不宜用椭圆点构成。用双曲点构成的非展直纹面比用抛物点构成的可展直纹面作为犁壁曲面具有优越性。

§ 2.2 从螺旋面的自锁临界状态探讨螺旋犁面的特征参数

螺旋犁面的设计属于传动螺旋的范畴，必然应避免产生自锁现象，从而对螺距的选用数

值，确定了下限。

1. 螺旋犁面方程：

$$\left. \begin{aligned} x &= w \operatorname{ctg} \alpha_1 + E_1 \delta_n \\ y &= -w \cos \delta_n \\ z &= w \sin \delta_n \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

δ_n 之范围，一般： $0^\circ \leq \delta_n \leq 110^\circ$ ，通用A型犁体： $42^\circ \leq \delta_n \leq 105^\circ$ ， α_1 表直母线与螺旋轴线之夹角，而螺旋轴线与X轴平行。

w 取有限正值，取值范围由设计图纸之轮廓线确定。

$$90^\circ \leq \alpha_1 \leq 120^\circ$$

2. 斜螺旋面与正螺旋面摩擦阻力的比较

以下分析中， P 表示作用于螺面上任意点之轴向力（即平行于x轴之力），这即是在耕作层土壤中沿螺旋轴向推动一螺旋面的近似受力状态。

螺旋面法线之方向余弦为： $\left[w/R, \frac{-1}{R} (E_1 \sin \delta_n - w \operatorname{ctg} \alpha_1 \cos \delta_n), \frac{-1}{R} (E_1 \cos \delta_n + w \operatorname{ctg} \alpha_1 \sin \delta_n) \right]$ 。

$$\text{式中： } R = \sqrt{\left(\frac{w}{\sin \alpha_1} \right)^2 + E_1^2}$$

在螺旋面上任意点（ $w=\gamma$ ， $\delta_n=\delta_n$ ）的正压力为

$$P_n = P \frac{\gamma}{\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\sin \alpha_1} \right)^2 + E_1^2}}$$

γ -土堡对角线长；

$$\text{类摩擦阻力为： } P_F = P_n \cdot f = P \frac{\gamma f}{\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\sin \alpha_1} \right)^2 + E_1^2}}$$

式中： f 为土壤与犁面之类摩擦系数（即 f 之测定值包含了粘附力的一些影响）。
推论：

$$\alpha_1 = 90^\circ \text{ 为正螺面： } P_F = \frac{P \gamma f}{\sqrt{\gamma^2 + E_1^2}}$$

$$\alpha_1 \neq 90^\circ \text{ 为斜螺面： } P_F = \frac{P \gamma f}{\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\sin \alpha_1} \right)^2 + E_1^2}}$$

可见斜螺面之类摩擦阻力比正螺面的小。

3. 土粒沿斜螺面之最易滑动方向——在轴向力 P 之作用下此即 P 力在着力点切平面上的投影的方向。

从几何学可知, 包含“斜螺面法线和P力的平面”与“切平面”的交线, 就是最易滑动方向〔证明见(附录II)〕。

最易滑动方向矢量 $\vec{K}$ 的方向数为:

$$[(w^2 \cos^2 \alpha_1 + E_1^2 \sin^2 \alpha_1), -(w^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1), w E_1 \sin^2 \alpha_1]。$$

令螺旋线切矢用 $\vec{\tau}$ 表示, 求最易滑动方向与螺旋切线间之夹角:

$$\cos(\vec{K}, \vec{\tau}) = E_1 \sqrt{\frac{w^2 + E_1^2 \sin^2 \alpha_1}{(w^2 + E_1^2 \sin^2 \alpha_1) E_1^2 + w^4 \cos^2 \alpha_1}}。$$

推论: 当 α_1 愈趋近于直角时, 则最易滑动方向愈趋近于螺旋线之切线, 当 $\alpha_1 = 90^\circ$ 为正螺面, $\cos(\vec{K}, \vec{\tau}) = 1$ 。说明正螺面之最易滑动方向就是螺旋线切线方向(与母线垂直)

α_1 值之选用须适当, 因它与土粒沿犁面运动的轨迹有关, α_1 偏离直角过大时, 土粒将从翼边下滑落于犁沟之中, 我国南方水田通用型犁之 α_1 采用 107° 可供参考。

4. 轴向力P沿最易滑动方向分力

轴向力单位矢: $\vec{P} = 1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$, $\vec{P}$ 与最易滑动方向单位矢 $\vec{K}$ 之夹角为:

$$\cos(\vec{P}, \vec{K}) = \sqrt{\frac{w^2 \cos^2 \alpha_1 + E_1^2 \sin^2 \alpha_1}{w^2 + E_1^2 \sin^2 \alpha_1}}$$

轴向力P作用点为($w = \gamma$, $\delta_n = \delta_n$), 最易滑动方向的切线分力 P_t 为:

$$P_t = P \cos(\vec{P}, \vec{K}) = P \sqrt{\frac{\gamma^2 \cos^2 \alpha_1 + E_1^2 \sin^2 \alpha_1}{\gamma^2 + E_1^2 \sin^2 \alpha_1}} = P \sqrt{\frac{\gamma^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha_1 + E_1^2}{\gamma^2 \operatorname{csc}^2 \alpha_1 + E_1^2}}$$

推论: 对于一般螺旋犁面之参数来说, α_1 值最大不超过 120° , 即 $90^\circ \leq \alpha_1 \leq 120^\circ$ 。

$$\text{当 } \alpha_1 = 120^\circ \text{ 时, } P_t/P = \sqrt{\frac{\gamma^2 + 3E_1^2}{4\gamma^2 + 3E_1^2}}。$$

$$\text{当 } \alpha_1 = 90^\circ \text{ 时, } P_t/P = \sqrt{\frac{E_1^2}{\gamma^2 + E_1^2}}。$$

$$\text{而 } \frac{\gamma^2 + 3E_1^2}{4\gamma^2 + 3E_1^2} / \frac{E_1^2}{\gamma^2 + E_1^2} = \frac{4E_1^2\gamma^2 + 3E_1^4 + \gamma^2}{4E_1^2\gamma^2 + 3E_1^4} > 1, \text{ 可见正螺面的 } P_t/P \text{ 比斜螺面的小}$$

又 $E_1 = \frac{t}{2\pi}$, 故正螺面的切向分力为:

$$P_1 = P \frac{t}{\sqrt{(2\pi\gamma)^2 + t^2}} = P \sin \theta$$

θ 为展开螺旋线之升角。

5. 自锁临界螺距

自锁临界状态指: 切向分力=摩擦阻力。

斜螺面在最易滑动方向之自锁临界条件为:

$$P \cos (\vec{P}, \vec{K}) = P_n f.$$

$$\therefore f P_n = f \frac{P \gamma}{\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\sin \alpha_1}\right)^2 + E_1^2}} \quad \text{及} \quad \sqrt{\frac{\gamma^2 \cos^2 \alpha_1 + E_1^2 \sin^2 \alpha_1}{\gamma^2 + E_1^2 \sin^2 \alpha_1}} = \cos (\vec{P}, \vec{K}),$$

$$\therefore \gamma^2 \cos^2 \alpha_1 + E_1^2 \sin^2 \alpha_1 = f^2 \gamma^2 \sin^2 \alpha_1.$$

以螺距 $t = 2\pi E_1$ 代入, 从而求得自锁临界螺距

$$t_c = 2\pi \gamma \sqrt{f^2 - \operatorname{ctg}^2 \alpha_1}. \quad (2-2)$$

推论: 当 $\alpha_1 = 90^\circ$ 为正螺面 $t_c = 2\pi \gamma f$ 。

当 $\alpha_1 \neq 90^\circ$ 为斜面 $t_c < 2\pi \gamma f$ 。

说明斜螺面之自锁临界螺距较短 (犁体斜螺面 α_1 之值一般不超过 120°)。

6. 国内外螺旋面犁壁设计参数之比较及验算

我国南方水旱通用型犁体的设计是独特的——区别于国外螺旋犁体用正螺旋面构成整个的犁壁曲面。

水旱通用型犁壁的翼部采用斜螺旋面。其设计参数为:

1. 螺旋轴线与 X 轴平行, 二者距离略等于单铧幅宽。

2. α_1 角 (母线与轴线的正向夹角) 为 107° 。

3. 螺距为单铧幅宽之 5.2 倍。

国外正螺旋面犁体的螺距约等于单铧幅宽之 6 至 10 倍。

以上实践经验数据可验算及分析如后。

自锁临界螺距:

$$\text{斜螺面} \quad t_c = 2\pi \gamma \sqrt{f^2 - \operatorname{ctg}^2 \alpha_1}$$

$$\text{正螺面} \quad t_c = 2\pi \gamma f.$$

设: γ 之最大值为土堡矩形断面之对角线。

A 为耕深, B 为单铧幅宽

当 $B/A = 1.4 \sim 1.1$ 时, 则 $\gamma = 1.23 B \sim 1.35 B$ 。

设: t 为设计之螺距, t_c 为自锁临界螺距, ψ_1 为比例系数。

则 $t = \psi_1 t_c$

设计者可按土壤情况及农业技术要求来选定 ψ_1 值, 一般应稍大于或接近于 1, 但不能小于 1。

$$\text{由于} \quad f \leq \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha_1 + \left(\frac{t}{2\pi \gamma \psi_1}\right)^2}. \quad (2-3)$$

表 2 当 $\psi_1 = 1$ 时, 即 $t = t_c$ 可验算 f 之适应范围

设计参数	我国斜螺面	国外正螺面		
α_1	107°	90°	90°	90°
令 t_c/B 为	5.2	6	8	10
令 B/A 为 1.4	$f \leq 0.8$	$f \leq 0$	$f \leq 1$	$f \leq 1.3$
当 B/A 为 1.1	$f \leq 0.7$	$f \leq 0$	$f \leq 0.9$	$f \leq 1.2$

国外(正)螺旋面犁主要用于开荒,需要适应于摩擦系数(及粘附力)较大的土壤,故其设计螺距与铧宽比值较大。^{[4][5]}这种犁体用于耕水田不符合农业技术要求。它虽具有较强的翻土、复盖性能,但断条、碎土性能不好,翻转的土垡形成一条长垄,不能使垡片相互架空,不能满足透风晒垡的农业技术要求。

我国水田通用型犁体主要用于水田地区的水旱耕作,其犁壁胸部不是螺旋面,仅犁壁翼部采用斜螺旋面。在保证翻垡、复盖性能的同时,为了兼顾断条、架空的农业技术要求,故设计螺距与铧宽之比不宜过大。

犁体沿X的负方向前进,土壤之相对运动即是X轴的方向由于犁胸曲面设计具有使土垡沿犁面“窜升”的作用,并将土壤导向犁翼,土垡在受翼部X轴向力推挤的同时,还有犁胸部“窜升”土粒间的切向力传递,故可减轻产生自锁现象。

上述切向力及土壤与犁壁间的初粘附力我们在推导斜螺旋面自锁临界螺距时未能包括,此二者之作用是一正一负,又犁翼部重力的法向分力不大,也可忽略,总之本节推导之临界自锁螺距公式用于犁翼计算时,偏于传动螺旋之安全侧。故设计者如已采用土壤适应范围之最大 f 值来计算 t_c ,则 η_1 可以接近1,而不必比1偏大过多,即是说设计螺距可以在稍大并接近于 t_c 之间来选用,以求得全面兼顾农业技术要求。设计值当否,须通过多种条件下的试验加以验证。(对凝聚性很小而粘附力极大的土壤状态,主要是粘附作用,则不能用摩擦力之自锁现象去分析)。

由试验可以看出,犁耕中土壤成垡时(尤以旱耕稻板田最明显)自锁现象一般不会发生。由于土壤凝聚性较大时土力间传递的切向力一般足以消除粘附力及摩擦阻力,而当水耕中发生“拖堆拥土”情况时,犁壁推挤着拥起的泥土,这时沿螺旋轴向推进的螺旋面是否发生自锁现象,就易观察了。

※ ※ ※

1. 在总结我国水田通用型犁体实践经验的基础上,从传动螺旋面自锁临界状态分析其设计参数,推导了自锁临界螺距与土壤类摩擦系数的函数关系式。

2. 通过验算表明,我国斜螺旋面犁翼及国外正螺旋面所采用的经验数据与上述理论基本相符。

3. 螺旋面沿轴向推挤土壤时,斜螺面上产生的类摩擦阻力较正螺面的小,斜螺面的自锁临界螺距较正螺面的短(当 η 、 f 数值相等时)说明我国南方水田通用型犁体采用斜螺面犁翼的设计具有一定的优越性。

§ 2.3 土迹线定性微分方程及其讨论

为了研究土垡在犁面上的运动,初步估算犁面的工作性能,应对土迹线进行分析,建立定性(估算)微分方程。土迹线的研究,涉及的问题很多,如多变的土壤物理力学性质、犁耕速度和犁体曲面等,难于纳入一个统一的数学模型,为此,必须先作必要的简化,提出假设条件。

1. 假设条件

a. 脱土:犁面在一般的土壤条件下要具有脱土性能。这一点可以用推力是否大于摩擦力来预先验明。

b. 成条:犁体耕作时土壤成垡,虽有裂纹及碎落,但基本形成垡条。如秋耕稻茬田时,便是这种情况。

c. 流场基本上是二维(n, v)稳定场:即由曲面一点引出的法线上各点的土粒运动是

一致的，不因时间的改变而变化。

2. 理论土迹线定性（估算）微分方程

a) 活动标架（即流动坐标系）

单位切矢 $\vec{\tau}^0$ ：在土迹线上任取一点 M_1 作它的单位切矢，即为 $\vec{\tau}^0$ 。

单位法矢 $\vec{n}^0$ ：即曲面于 M_1 点的单位法矢，由犁面上的点指向土层。

单位法矢 $\vec{b}^0$ ：即曲面于 M_1 切平面上垂直于 $\vec{\tau}^0$ 者，且使 $\vec{b}^0 = \vec{\tau}^0 \times \vec{n}^0$ （图3，4）

b) 土条微段（图4）

过犁面土迹线上一点 M_1 ，取一轨道元微弧 ds ，它在 M_1 点的切平面 P 上的投影微弧为 ds' （图4）。现取一假想土条微段来分析， ds' 为中心线，截面积为1单位面积（图4）。

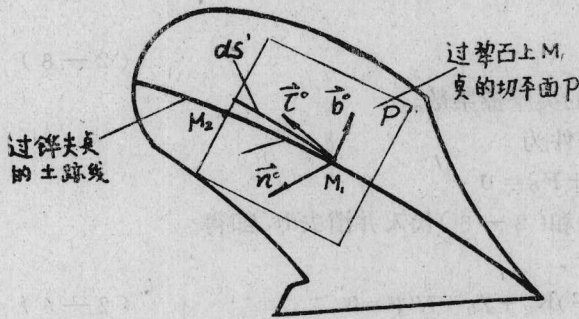


图3 过犁尖点的土迹线示意图

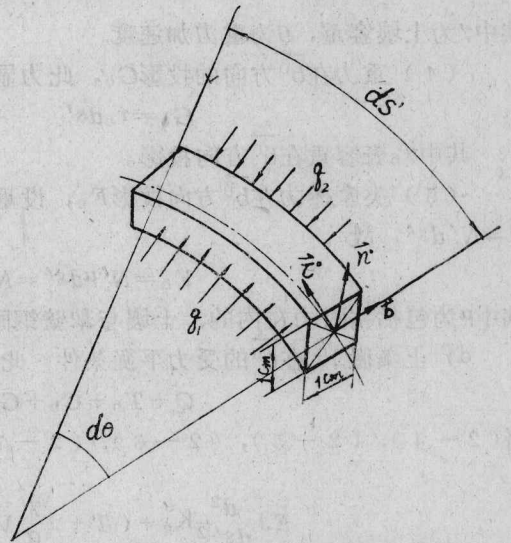


图4 土条微段的活动标架和受力情况
(活动标架及侧向均布压应力 q_1, q_2)

c) 土条微段在 $\vec{b}^0$ 方向的受力状况

为了推导土迹线的估算微分方程，仅需分析在 $\vec{b}^0$ 方向的力平衡条件，这样沿 $\vec{\tau}^0$ 方向的诸力，如与压应力伴生的切应力、 $\vec{\tau}^0$ 向的摩擦力、惯性力等对 $\vec{b}^0$ 方向的平衡条件无影响，均可不予写出。而 $\vec{b}^0$ 方向所受的力有：两侧土壤的约束力-压应力、推力的投影、离心惯性力投影、重力投影和类摩擦力（包括粘附力）投影。现分析于后。

(1) 两侧土壤约束力 Q -压应力的代数和 $q = q_1 - q_2$ 。由《材料力学》知，曲梁微段的弯矩 M 的一次微分为剪力，二次微分为压应力 q ，因此设 ds' 微段在 q 作用下产生的弯矩为 M ，而刚度为 EJ 时，即有 $M = EJ K_g$ ，其中 K_g 为土迹微段 ds 于 M_1 点的测地曲率，即 ds' 于 M_1 点的

曲率，从而有 $EJ \frac{d^2}{ds'^2} K_g = q$ ，总的作用力

$$Q = q ds' \quad \therefore Q = EJ \frac{d^2}{ds'^2} K_g \cdot ds' \quad (2-3)$$

(2) 推力投影 T_b 当取 $\vec{b}^0$ 为正向， $\vec{b}^0$ 方向正好与 $\vec{b}^0$ 方向相反，设 M_1 点的推力为 $T \vec{\tau}^0$ ，则另一端 M_2 处的推力为