中学数学难点剖析丛书

高中数学综合训练

刘玉超　孙晓波
赵国民　吕凌英　等编著

[illegible]出版社

中学数学难点剖析丛书

高中数学综合训练

刘玉翘　滕曙霞
赵国民　唐霞宾　等编著

西南师范大学出版社

责任编辑　米加德
装帧设计　傅孝修

中学数学难点剖析丛书

高中数学综合训练

滕耀云　主编

西南师范大学出版社出版、发行
（重庆　北碚）
新华书店重庆发行所经销
西南师范大学出版社印刷厂印刷

•

开本：787×1092 1/32　印张：9.00　字数：195千
1992年1月第一版　　1992年1月第1次印刷
印数：1—10,000

•

ISBN 7—5621—0623—X/G·437

定价：2.50元

○前　言○

《中学数学难点剖析》丛书，是以国家教委制定的教学大纲（修改稿）为依据，在现行教材的基础上，吸收了几年来中学教学改革的经验与研究的新成果，邀请了十六个省、市有丰富经验的特级、高级教师，教学研究人员和优秀青年教师参加编写的。

本丛书有以下特色：

有针对性地弥补和加强现行教材中的薄弱环节，帮助师生解决教与学的疑难问题，提高教学质量。

既可与教材同步加深对教材的理解，又可为毕业复习，参加竞赛提供综合训练；既有系统知识，又有重、疑、难点的剖析；既有标准化题，又有综合训练题；并注重知识的纵横联系与数学思想方法相结合，是一套具有科学性、系统性、针对性和可读性的中学数学参考读物。

适于配合新课学习的各册，有【基础知识】、【剖析与例题】、【基础练习】、【知识应用】(A)、(B)、【检测题】五个栏目。书末附有【习题答案或提示】。

适于初三、高三毕业专题复习的各册，有专题讲座、综合测试题、解答或提示。各专题又分概述、例题、习题三部分。

例、习题均经作者精选，量多、典型、新颖。剖析或说明是撰写人多年教学经验的体现，对启迪思维，解决疑难，

预防错误，培养能力颇有帮助。

本册计有函数与函数思想等18个专题讲座，4套综合检测题。深化、扩展数学的基础知识及纵横联系。选题典型新颖，难易适度，不超纲，复盖广，思路宽，剖析深，方法活，综合性强，重视知识、方法、技能之间的内在联系，思想方法的训练和能力的培养。作者分布于四川、天津等14个省、市。

本书主要供高三数学教学参考，学生毕业复习备考用。也可供师范校院学生阅读。

本书由滕耀云、唐霞宾统稿。

由于时间仓促，水平所限，疏漏错误在所难免，希读者予以指正！

编　者

1991年3月

○目　　录○

一、函数与函数思想

著名数学家克莱因曾说过："一般受教育者在数学课上应该学会的重要事情是用变量和函数来思考"．在我国的高考命题中也提出了"注重数学思想"的要求．如果只是掌握了数学基本知识，习惯于"类型加方法"的解题，而不注重数学思想的建立，就必然对数学的本质理解得不深刻，不可能灵活自如地驾驭数学的基本观点．

在中学数学中的数学思想包括两个方面的内容：一是与数学知识、数学概念有关的数学思想．例如：对应的思想、函数的思想、参数的思想、数形结合的思想等．另一种是与数学方法有关的思想．例如：化归的思想、变换的思想、构造的思想、归纳的思想等．本专题只涉及用函数思想解题的一个侧面．

（一）从一道高考题谈起

1990年全国高考理工农医类第（26）题第（1）问是这样一个题目：

$$f(x)=\lg\frac{1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^x a}{n},$$

其中 a 是实数，n 是任意给定的自然数，且 $n\geqslant 2$.

如果 $f(x)$ 在 $x\in(-\infty,1]$ 时有意义，求 a 的取值范围．

要使函数 $f(x)$ 有意义，必须使

$$\frac{1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^x a}{n}>0 \quad x\in(-\infty, 1]$$

即 $a>-\left[\left(\frac{1}{n}\right)^x+\left(\frac{2}{n}\right)^x+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^x\right] \quad x\in(-\infty,1]$

不少同学做到这一步后，下面就不知所措了.

事实上，对于上面不等式右边的每一次$\left(\frac{k}{n}\right)^x$($k=1, 2, \cdots, n-1$)都是一个指数函数，又由于$\frac{k}{n}<1$，所以是减函数于是$-\left(\frac{k}{n}\right)^x$是增函数，考虑到 $x\in(-\infty, 1]$，所以当 $x=1$ 时，$-\left(\frac{k}{n}\right)^x$取得最大值$-\frac{k}{n}$.

对于以上这些思考，不少同学是想不起来的，其原因就是因为没有建立函数的思想，如果老师出这样一道题目：

判断函数 $y=-\left(\frac{k}{n}\right)^x$ 的单调性，并求出 $x\in(-\infty, 1]$ 内 y 的最大值（其中 $k=1, 2, \cdots, n-1$）.

这就明确告诉这是一个函数，这样的题目绝大多数的同学会很快地，甚至不加思索地解出来. 问题的症结在于这道高考题并没有明确地告诉同学这是一个函数. 结果同学就不会思考. 紧接着要求 a 的范围，显然当$-\left[\left(\frac{1}{n}\right)^x+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^x\right]$的最大值小于 a 时，就会使不等式 $a>-\left[\left(\frac{1}{n}\right)^x+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^x\right]$成立，这又是一个函数思想的问题，即求 a 的

范围，需要考虑函数的值域，而对于这个问题，没有建立函数思想的同学也是很难解决的.

上面的例子说明什么呢？说明数学概念和数学方法本身并不等于数学思想。学生学习了函数的概念，学了一大堆函数的性质，见过了几乎所有的基本初等函数，然而却不能说具备了函数思想，也不一定就会用函数思想解题。所以，在数学的学习中，学会用变量和函数来思考问题是个重要的研究课题。

（二）把参数或代数式看成某个字母的函数

我们看下面的例子：

〔**例 1**〕 已知曲线 C_1: $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 和曲线 C_2: $x^2+(y+1)^2=r^2$，问 r 为何值时，两条曲线没有公共点.

一般的解法是：消去 x^2，得

$$-\frac{5}{4}y^2+2y+10-r^2=0$$

因为无交点，则$\Delta<0$，即

$$4-4\left(-\frac{5}{4}\right)(10-r^2)<0.$$

解得 $r>\sqrt{\dfrac{54}{5}}$ 或 $r<-\sqrt{\dfrac{54}{5}}$（舍去）

这样解对不对呢？画一个图就知道了，除去 $r>\sqrt{\dfrac{54}{5}}$ 之外，$0<r<1$ 时也同样无交点. 然而，上述的解法中得不出 $0<r<1$ 这个结果，显然，解法出了毛病！

我们换一个思路，由上面的变形可知

$$r^2=-\frac{5}{4}y^2+2y+10。$$

即把 r^2 看成是 y 的函数，由椭圆的性质，得 $-2\leqslant y\leqslant 2$，于是我们可以求函数

$$r^2=f(y)=-\frac{5}{4}y^2+2y+10 \quad y\in[-2,2]$$

的值域，由

$$f(-2)=1,\ f(2)=9,\ f\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{54}{5}$$

可得 $$1\leqslant f(y)\leqslant\frac{54}{5}$$

即 $$1\leqslant r^2\leqslant\frac{54}{5}$$

$$\therefore\quad 1\leqslant r\leqslant\sqrt{\frac{54}{5}}$$

它的补集就是无交点的 r 的范围，显然为 $0<r<1$ 或 $r>\sqrt{\frac{54}{5}}$

这个例题就是把参数 r 看作 y 的函数，解析几何问题函数化了.

[**例 2**] 实数 a 为何值时，方程

$$\cos 2x+\sin x-a=0$$

有解

解 把 a 看成 x 的函数

$$a=f(x)=\cos 2x+\sin x$$

即 $$a=f(x)=-2\sin^2 x+\sin x+1$$

由 $$f(-1)=-2,\ f(1)=0,\ f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{8}$$

可得 $$f(x)\in[-2,\ \frac{9}{8}]$$

所以 $a\in[-2,\ \frac{9}{8}]$ 时有解

此题如果不用函数思想，则解起来相当麻烦

对于方程 $-2\sin^2 x+\sin x+1-a=0$ ①

有解等价于①至少有一解满足 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，求 a 的范围，即解

$$\begin{cases}\Delta=1+8(1-a)\geqslant 0, \\ \left|\dfrac{-1+\sqrt{9-8a}}{-4}\right|\leqslant 1\end{cases} \text{或} \begin{cases}\Delta=1+8(1-a)\geqslant 0 \\ \left|\dfrac{-1-\sqrt{9-8a}}{-4}\right|\leqslant 1\end{cases}$$

这个运算量就是比较大了.

[**例 3**] 已知 $-1\leqslant a,\ b,\ c\leqslant 1$。求证 $ab+bc+ca+1>0$

证明 把其中一个字母当成未知数，不妨令 $a=x$，则记

$$f(x)=(b+c)x+bc+1$$

因为 $f(1)=b+c+bc+1=(1+b)(1+c)>0$,

$$f(-1)=bc-b-c+1=(1-b)(1-c)>0,$$

又因为 $f(x)$ 是单调函数，则由 $f(1)>0$，$f(-1)>0$，及 $-1<a<1$ 可知

$$f(a)>0,$$

即 $$(b+c)a+bc+1>0,$$

所以 $$ab+bc+ca+1>0.$$

[**例 4**] 已知 $a\in(0,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$ 且为常数，$|x|+|y|\leqslant 1$。求 $ax+y$ 的最大值.

解 $ax+y\leqslant|ax|+|y|$ ①

$$=a|x|+|y|$$

$$\leqslant a|x|+(1-|x|)$$
$$=(a-1)|x|+1 \quad ②$$

为使①等号成立，应取 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$.
这使 $0\leqslant x\leqslant 1$.

引进一次函数 $g(x)=(a-1)x+1$.

当 $a>1$ 时，$g(x)$为增函数，在 $x=1$ 时取得最大值，即
$$g(x)|_{\max}=a$$
则有 $ax+y\leqslant a$

于是 $ax+y$ 的最大值为 a，且当 $x=1$，$y=0$ 时等号成立.

当 $0<a<1$ 时，$g(x)$为减函数，在 $x=0$ 时取得最大值，即 $x=0$，$y=1$ 时，$ax+y$ 有最大值 1.

［例5］ 双曲线 C_1：$3x^2-4y^2=1$ 与抛物线 C_2：$y^2=x+b(x\geqslant 1)$相交，求 b 的取值范围.

解 C_1 与 C_2 相交等价于
$$\begin{cases}3x^2-4y^2=1\\ y^2=x+b\end{cases}$$
有解.

消去 y，得
$$3x^2-4x-4b-1=0 \quad (x\geqslant 1)$$
$$b=\frac{1}{4}(3x^2-4x-1)=\frac{1}{4}\left[3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{7}{3}\right]$$

$\because x\geqslant 1$，又 $x\geqslant\frac{2}{3}$时，$b=f(x)$为增函数，所以 $x=1$ 时，b 有最小值，即
$$b\geqslant\frac{3}{4}\left(1-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{7}{12}=-\frac{1}{2}$$

得 b 的取值范围$[-\frac{1}{2}, +\infty)$

（三）灵活运用函数的性质解题

[例 1] 当 a 为何值时，不等式

$$\log_{\frac{1}{a}}(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\log_5(x^2+ax+6)+\log_a 3\geqslant 0$$

有且只有一个解。

解 令 $x^2+ax+5=u$，则不等式为

$$\log(_{\frac{1}{a}}\sqrt{u}+1)\log_3(u+1)+\log_a 3\geqslant 0$$

即
$$\frac{\log_3(\sqrt{u}+1)\log_3(n+1)}{-\log_3 a}+\frac{1}{\log_3 a}\geqslant 0$$

1° 当 $a>1$ 时，$\log_3 a>0$，则

$$\log_3(\sqrt{u}+1)\log_3(u+1)\leqslant 1$$

$\because u\geqslant 0$ 时，$f(u)=\log_3(\sqrt{u}+1)\log_3(u+1)$是增函数，又因为$f(4)=1$，所以

$$0\leqslant u\leqslant 4$$

$$0\leqslant x^2+ax+5\leqslant 4$$

有且只有一个解

$$\begin{cases} x^2+ax+1\leqslant 0 \\ x^2+ax+5\geqslant 0 \end{cases}$$

由于 $x^2+ax+1\leqslant 0$ 知 $\Delta=a^2-4==0$ 即 $a=2$ $(\because a>1)$时，有唯一解

2° 当 $0<a<1$ 时，$f(u)\geqslant 1=f(4)$

$$u\geqslant 4$$

$$x^2+ax+5\geqslant 4$$

$$x^2+ax+1\geqslant 0$$

$$\Delta=a^2-4<0\quad（因为 0<a<1）$$

所以 $x^2+ax+1\geqslant 0$ 有无数组解

因此 只有 $a=2$ 时，有唯一解

［**例 2**］ 求 $y=x+\sqrt{x-1}$ 的值域

解 $y=x+\sqrt{x-1}$ 的定义域为 $x\geqslant 1$

又 $y=f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上为增函数，

$\therefore$ 当 $x=1$ 时有最小值 $f(1)=1$，即

$y\geqslant 1$，$y\in[1, +\infty)$

［**例 3**］ 已知曲线系 C_k 的方程为

$$\frac{x^2}{9-k}+\frac{y^2}{4-k}=1$$

试证明对坐标平面内任一点 (a, b) $(ab\neq 0)$，总存在 C_k 中的一椭圆和一双曲线通过该点．

解 若 (a, b) 在曲线系 C_k 上，则

$$\frac{a^2}{9-k}+\frac{b^2}{4-k}=1$$

即 $k^2+(a^2+b^2-13)k+(36-4a^2-9b^2)=0$ ①

记 $f(k)-k^2+(a^2+b^2-13)k+(3b-4a^2-9b^2)$

则 $f(k)$ 的图象为开口向上的抛物线．

因为 $f(4)=16+4(a^2+b^2-13)+(3b-4a^2-9b^2)$

$=-5b^2<0$

$f(9)=81+9(a^2+b^2-13)+(3b-4a^2-9b^2)=5a^2>0$

于是函数 $f(k)$ 的图象一定在 $(-\infty, 4)$ 与 $(4, 9)$ 之间与 x 轴有交点．

即①有一个 $(-\infty, 4)$ 内的根和一个在 $(4, 9)$ 内的根．

若 $k_1\in(-\infty, 4)$，则 C_k 为椭圆，若 $k_2\in(4, 9)$，则 C 为双曲线.

即 (a, b) 为一椭圆和一双曲线的交点.

（四）构造函数解题

［**例 1**］ 解不等式 $(5x+3)^3+x^3+6x+3>0$

解 原不等式化为

$$(5x+3)^3+(5x+3)>-x^3-x \qquad ①$$

令 $f(x)=x^3+x$，则①可化为

$$f(5x+3)>f(-x) \qquad ②$$

因为 $f(x)$ 在 R 上单调递增，所以①和②等价，于是有

$$5x+3>-x$$

解得 $x>-\dfrac{1}{2}$

［**例 2**］ T 为坐标平面上所有整点的集合，如果两个整点 (x, y) 和 (u, v) 满足 $|x-u|+|y-v|=1$，则称这两个点为相邻点.

证明 存在集 $S\subset T$，使得每个点 $P\in T$，在 P 与 P 的相邻点中恰好有一个属于 S.

分析 我们注意到，对于每一个整点 (u, v) 都有 4 个相邻点 $(u+1, v)$，$(u-1, v)$，$(u, v+1)$，$(u, v-1)$ 我们设法构造一个映射，把这 5 个点映射成 5 个不同的数，从而把点集的问题转化为数集的问题.

事实上，令 f: $(u, v)\to f(u, v)=u+2v$，就可以达到这个目的. 由函数 $f(u, v)$，每个点和它的四个相邻点恰好对应五个相继整数：$u+2v$，$u+2v\pm1$，$u+2v\pm2$. 于是 P 与 P 的相邻点中恰有一个属于 S 就转化为五个相继整数

恰好有一个对应于S，而这是不难做到的．例如设集S为

$S=\{(x,\ y)|\quad x+2y$能被5整除$\}$则S满足题目要求．

［例3］ 解方程组

$$\begin{cases} x^3-y^2-y=\dfrac{1}{3} \\ y^3-z^2-z=\dfrac{1}{3} \\ z^3-x^2-x=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

解 由于 $x=\sqrt[3]{y^2+y+\dfrac{1}{3}}$

$$y=\sqrt[3]{z^2+z+\frac{1}{3}}$$

$$z=\sqrt[3]{x^2+x+\frac{1}{3}}$$

设 $f(t)=\sqrt[3]{t^2+t+\dfrac{1}{3}}$

函数$f(t)$对于所有的t值均为正值．因此原方程的解均有 $x>0$，$y>0$，$z>0$

又当$t\geqslant-\dfrac{1}{2}$特别地当$t>0$时，$f(t)$递增，于是当$x\geqslant y$有$f(y)\geqslant f(z)$，因此$y\geqslant z$；

当$y\geqslant z$时，有$f(z)\geqslant f(x)$，因此$z\geqslant x$

这样就有

$$x\geqslant y\leqslant z\geqslant x$$