



国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中外物理学精品书系

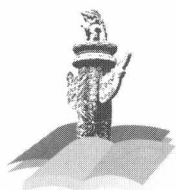
前沿系列 · 20

电磁场理论 与计算方法要论

夏明耀 王均宏 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS



国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

013034225

0441.4
110

中外物理学精品书系

前沿系列 · 20

电磁场理论 与计算方法要论

夏明耀 王均宏 编著



北京大学出版社



北航

C1641577

0441.4

110

58041.810

图书在版编目(CIP)数据

电磁场理论与计算方法要论/夏明耀,王均宏编著. —北京:北京大学出版社, 2013.4

(中外物理学精品书系·前沿系列)

ISBN 978-7-301-22039-9

I. ①电… II. ①夏…②王… III. ①电磁场—高等学校—教材 IV. ①O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 017187 号

书 名: 电磁场理论与计算方法要论

著作责任者: 夏明耀 王均宏 编著

责任编辑: 王 华

标准书号: ISBN 978-7-301-22039-9/TN·0095

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://www.pup.cn> 新浪官方微博: @北京大学出版社

电子信箱: zpup@pup.pku.edu.cn

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62765014 出版部 62754962

印 刷 者: 北京中科印刷有限公司

经 销 者: 新华书店

730mm×980mm 16 开本 19 印张 337 千字

2013 年 4 月第 1 版 2013 年 4 月第 1 次印刷

定 价: 58.00 元

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究

举报电话: 010-62752024 电子信箱: fd@pup.pku.edu.cn

“中外物理学精品书系” 编委会

主任：王恩哥

副主任：夏建白

编委：（按姓氏笔画排序，标*号者为执行编委）

王力军	王孝群	王牧	王鼎盛	石兢
田光善	冯世平	邢定钰	朱邦芬	朱星
向涛	刘川*	许宁生	许京军	张酣*
张富春	陈志坚*	林海青	欧阳钟灿	周月梅*
郑春开*	赵光达	聂玉昕	徐仁新*	郭卫*
资剑	龚旗煌	崔田	阎守胜	谢心澄
解士杰	解思深	潘建伟		

秘书：陈小红

序 言

物理学是研究物质、能量以及它们之间相互作用的科学。她不仅是化学、生命、材料、信息、能源和环境等相关学科的基础,同时还是许多新兴学科和交叉学科的前沿。在科技发展日新月异和国际竞争日趋激烈的今天,物理学不仅囿于基础科学和技术应用研究的范畴,而且在社会发展与人类进步的历史进程中发挥着越来越关键的作用。

我们欣喜地看到,改革开放三十多年来,随着中国政治、经济、教育、文化等领域各项事业的持续稳定发展,我国物理学取得了跨越式的进步,做出了很多为世界瞩目的研究成果。今日的中国物理正在经历一个历史上少有的黄金时代。

在我国物理学科快速发展的背景下,近年来物理学相关书籍也呈现百花齐放的良好态势,在知识传承、学术交流、人才培养等方面发挥着无可替代的作用。从另一方面看,尽管国内各出版社相继推出了一些质量很高的物理教材和图书,但系统总结物理学各门类知识和发展,深入浅出地介绍其与现代科学技术之间的渊源,并针对不同层次的读者提供有价值的教材和研究参考,仍是我国科学传播与出版界面临的一个极富挑战性的课题。

为有力推动我国物理学研究、加快相关学科的建设与发展,特别是展现近年来中国物理学家的研究水平和成果,北京大学出版社在国家出版基金的支持下推出了“中外物理学精品书系”,试图对以上难题进行大胆的尝试和探索。该书系编委会集结了数十位来自内地和香港顶尖高校及科研院所的知名专家学者。他们都是目前该领域十分活跃的专家,确保了整套丛书的权威性和前瞻性。

这套书系内容丰富,涵盖面广,可读性强,其中既有对我国传统物理学发展的梳理和总结,也有对正在蓬勃发展的物理学前沿的全面展示;既引进和介绍了世界物理学研究的发展动态,也面向国际主流领域传播中国物理的优秀专著。可以说,“中外物理学精品书系”力图完整呈现近现代世界和中国物理科学发展的全貌,是一部目前国内为数不多的兼具学术价值和阅读乐趣的经典物理丛书。

“中外物理学精品书系”另一个突出特点是,在把西方物理的精华要义“请进来”的同时,也将我国近现代物理的优秀成果“送出去”。物理学科在世界范围内的重要性不言而喻,引进和翻译世界物理的经典著作和前沿动态,可以满足当前国内物理教学和科研工作的迫切需求。另一方面,改革开放几十年来,我国的物理学研究取得了长足发展,一大批具有较高学术价值的著作相继问世。这套丛

书首次将一些中国物理学者的优秀论著以英文版的形式直接推向国际相关研究的主流领域,使世界对中国物理学的过去和现状有更多的深入了解,不仅充分展示出中国物理学研究和积累的“硬实力”,也向世界主动传播我国科技文化领域不断创新的“软实力”,对全面提升中国科学、教育和文化领域的国际形象起到重要的促进作用。

值得一提的是,“中外物理学精品书系”还对中国近现代物理学科的经典著作进行了全面收录。20世纪以来,中国物理界诞生了很多经典作品,但当时大都分散出版,如今很多代表性的作品已经淹没在浩瀚的图书海洋中,读者们对这些论著也都是“只闻其声,未见其真”。该书系的编者们在这方面下了很大工夫,对中国物理学科不同时期、不同分支的经典著作进行了系统的整理和收录。这项工作具有非常重要的学术意义和社会价值,不仅可以很好地保护和传承我国物理学的经典文献,充分发挥其应有的传世育人的作用,更能使广大物理学人和青年学子亲身体会我国物理学研究的发展脉络和优良传统,真正领悟到老一辈科学家严谨求实、追求卓越、博大精深的治学之美。

温家宝总理在2006年中国科学技术大会上指出,“加强基础研究是提升国家创新能力、积累智力资本的重要途径,是我国跻身世界科技强国的必要条件”。中国的发展在于创新,而基础研究正是一切创新的根本和源泉。我相信,这套“中外物理学精品书系”的出版,不仅可以使所有热爱和研究物理学的人们从中获取思维的启迪、智力的挑战和阅读的乐趣,也将进一步推动其他相关基础科学更好更快地发展,为我国今后的科技创新和社会进步做出应有的贡献。

“中外物理学精品书系”编委会 主任
中国科学院院士,北京大学教授

王恩哥

2010年5月于燕园

内 容 简 介

本书主要根据作者在北京大学电子学系讲授的“近代电磁理论”研究生课程讲义进一步充实编写而成,对电磁场理论的若干重要知识和电磁场计算的几种主要方法进行了系统性阐述。这些重要知识包括电磁场一般原理与方法、媒质特性与波传播规律、导波结构与导波传输规律、电磁波辐射与散射特性、分层媒质中的波传播与辐射问题等。主要计算方法包括频域矩量法、时域有限差分法和频域有限元法。

本书可以作为理工科院校研究生教材或教学参考书,也可供从事电磁场理论与工程应用的科技工作者参考。

前 言

电磁理论的发展经历了三个阶段。

第一阶段是从 1785 年的库仑实验到 1864 年麦克斯韦建立电磁场方程组。这个阶段的主要研究手段是实验,一系列的电磁学基本规律被发现了,包括库仑定律、安培定律、奥斯特定律、毕奥-萨伐尔定律、法拉第定律等。这些定律及其内涵就是如今“电磁学”教科书的核心内容。

第二阶段是从 1864 年麦克斯韦建立电磁理论到上世纪 60 年代计算机的出现,这个阶段的主要研究手段是数学物理方法。从麦克斯韦方程组及其边界条件出发,借助数学知识和工具,包括矢量微积分和特殊函数理论等,得到问题的解析解,使得宏观的电磁学现象可以解释和预测,并被实验验证和开发利用。这个阶段的电磁学成果构成如今“经典电磁理论”和“工程电磁场”等课程的主体。

第三阶段是从上世纪 60 年代计算机的发明和应用直到今天,这一阶段各类近似方法和数值方法蓬勃发展,从前大量复杂难解的电磁场问题得到解决。因为解析的数理方法始终只能处理规则边界问题,而现实中的问题大多数具有不规则的边界,只能借助于数值方法解决。“计算电磁学”就是以计算机和计算方法作为主要手段研究电磁学问题的一门学科;如今,对从事与电磁工程相关的人员来说,完全不了解计算电磁学和不会使用电磁仿真工具,是不可想象的。

“电磁场理论”是与电磁现象研究及应用相关的各专业的核心基础课程,包括微波工程、天线工程、电波传播与散射、电磁勘探、微波遥感、真空电子学、微波电子学和微纳电子学等等,对雷达工程、通信工程以及生物医学工程等专业来说,也是很重要的课程。

但是,不同的专业方向,对掌握电磁场知识的内容和深度有不同要求,而电磁场理论体系博大精深,如何使教学内容适合大多数专业研究生,以满足他们当前研究工作的需要并为将来开拓发展打好基础,是“电磁场理论”教学需要面对的一个问题。

另一方面,研究生原先的本科知识背景,也是需要考虑的因素。有些研究生的本科专业本身就是电磁工程,有很好的电磁场理论知识;有的本科专业是物理学方面的,虽然有很好的电磁学知识,但是对工程应用没有概念;有的本科专业是通信、计算机、数学甚至化学等,最多只在“普通物理”中学过一两章的电磁学内容。这种情况对于北京大学来说是不奇怪的,因为需要电磁学知识做支

撑的研究方向较多且分散。因此,作为研究生课程的“电磁场理论”从哪里开始和讲授哪些内容,也都需要考虑。

综合以上各方面的因素,本书决定从简短回顾电磁学定律定理出发,再一步到位地引出麦克斯韦方程组,然后就麦克斯韦方程组本身的特性、它在自由空间的格林函数求解方法、以及基本的电磁学原理和现象展开讨论,这些构成了本书的第一章和第二章。

第三章至第八章,每一章都选定一个特定的方面加以详细阐述。第三章是电磁媒质特性和平面波在其中的传播规律,第四章是导波结构与导波理论,第五章介绍传输线理论,第六章是电磁辐射与天线,第七章论述电磁散射问题,第八章讨论分层媒质问题。

第九章至第十一章,每一章介绍一种重要的计算电磁学方法。不管按什么方式划分,目前的计算电磁学方法非常多,基于频域或时域的、基于积分方程或微分方程的、基于场本身或等效电路的。在众多电磁学计算方法中,有三类基本方法研究得最多和使用得最广,它们是频域矩量法、时域有限差分法和频域有限元法;因此,最后三章分别对它们进行了介绍。

显然,如果作为研究生教材使用,并不是所有内容都需要讲授,可根据实际情况包括课时限制等加以选择。

最后,选材疏漏、阐述不妥、公式有误,均在所难免,恳请读者不吝指正。

作者

2012年8月于北京

目 录

第一章 电磁理论基础	1
§ 1.1 电磁学定律与定理	1
§ 1.2 麦克斯韦方程组,连续性方程	4
§ 1.3 媒质特性与本构关系	6
§ 1.4 电磁场的复数(相量)表示	7
§ 1.5 磁荷与磁流,对偶性原理	9
§ 1.6 电磁场边界条件	11
§ 1.7 电磁波能量与坡印廷定理	14
§ 1.8 势函数方法	16
§ 1.9 无界空间标量波方程的格林函数	19
§ 1.10 无界空间局域分布源产生的势和场表达式	21
第二章 电磁场基本原理与波现象	24
§ 2.1 唯一性定理	24
§ 2.2 镜像原理	26
§ 2.3 场等效原理	27
§ 2.4 互易性定理	34
§ 2.5 互补结构与巴比涅原理	36
§ 2.6 电磁波的极化	41
§ 2.7 平面波在平直界面上的反射与透射	43
§ 2.8 平面波在良导电媒质界面上的反射与透射	48
§ 2.9 多普勒效应	50
第三章 电磁媒质与平面波传播	53
§ 3.1 电磁媒质的概念与本构关系	53
§ 3.2 电介质的极化与色散特性	54
§ 3.3 各向异性晶体介质中的平面电磁波	61
§ 3.4 磁化等离子体中的平面波,法拉第效应	65
§ 3.5 磁化铁氧体中的平面波传播	72
§ 3.6 手征介质中的平面电磁波	76
§ 3.7 左手媒质中的波	78

§ 3.8	平面电磁波在非均匀介质中的传播	81
第四章	导行波与谐振器	85
§ 4.1	导波基本方程	85
§ 4.2	平行板波导, 模式的概念, 传输特性	87
§ 4.3	金属矩形波导与圆波导	90
§ 4.4	同轴线与微带线	97
§ 4.5	电介质波导与弱导光纤	100
§ 4.6	微波谐振腔	110
第五章	传输线基础理论	115
§ 5.1	化场为路	115
§ 5.2	传输线特性参数	120
§ 5.3	史密斯圆图与应用	123
§ 5.4	阻抗变换与阻抗匹配	128
§ 5.5	网络参数	137
第六章	电磁辐射与天线	144
§ 6.1	电偶极单元, 近场与远场	144
§ 6.2	局域源的辐射场, 辐射积分	145
§ 6.3	天线基本概念和参数	147
§ 6.4	有限长度细线天线	152
§ 6.5	孔径辐射	157
§ 6.6	微带贴片天线	163
§ 6.7	天线阵列的概念	168
第七章	电磁波散射	172
§ 7.1	雷达方程	172
§ 7.2	雷达截面	176
§ 7.3	无限长圆柱体的散射	178
§ 7.4	矢量波函数与球体的散射	181
§ 7.5	周期结构和弗洛盖定理	185
§ 7.6	随机粗糙面散射	188
第八章	分层媒质中的波传播与辐射	193
§ 8.1	平面分层介质中波传播	193
§ 8.2	半空间中的偶极子源辐射场	197
§ 8.3	柱面分层介质中的波传播与偶极子场	202
§ 8.4	球面分层介质中的波传播与偶极子场	206

第九章 矩量法	212
§ 9.1 矩量法原理	212
§ 9.2 线结构问题的矩量法解	217
§ 9.3 无限长柱体的矩量法解	222
§ 9.4 电磁场表面积分方程	228
§ 9.5 三维物体散射的矩量法解	233
第十章 时域有限差分法	239
§ 10.1 Maxwell 方程的差分形式	239
§ 10.2 二维问题	241
§ 10.3 三维问题	247
§ 10.4 吸收边界条件	250
第十一章 有限元法	259
§ 11.1 有限元方法的基本步骤	259
§ 11.2 电磁场定解问题及相应的变分问题	260
§ 11.3 区域离散化,面积坐标和体积坐标	261
§ 11.4 插值函数的选取	264
§ 11.5 线性方程组的导出	269
附录	274
参考书目	286

第一章 电磁理论基础

本章先回顾电磁学的一些基本定律与定理,介绍 Maxwell 方程组的由来,并就方程组本身进行一些讨论。然后阐述方程组求解所需要强加的边界条件。最后介绍势函数的引入,并给出自由空间 Maxwell 方程组的解。

§ 1.1 电磁学定律与定理

虽然古时候就有关于电学现象的记载,比如用毛皮摩擦过的琥珀能吸引毛发等轻小物体,但直到 18 世纪人们才开始获得真正的定性认识。1731 年,英国牧师格雷(Geri)发现了导体和绝缘体的差别;1745 年,荷兰莱顿大学的学者发明了莱顿瓶——一种可以保存电荷的容器,即我们今天的电容器;1752 年,美国科学家富兰克林(Franklin)发现了电荷的两种属性,即正电和负电;1758 年,德国科学家爱皮努斯(Aepinus)发现了介质的电极化现象;1775 年,意大利科学家伏打(Volta)发明感应起电机。

对于磁学现象的定性认识,公元前 200 年我国就有关于司南勺(即罗盘)的记载;11 世纪,沈括在《梦溪笔谈》中对指南针有详细记述;12 世纪,指南针大量用于航海;15 世纪,郑和七次下西洋,绘制了精确的地磁导航海图。16 世纪末,英国医生吉尔伯特(Gilbert)写了一本关于磁学的小册子《论磁石、磁体、大磁石——地球》,被认为是西方的磁学先驱。

1.1.1 库仑定律与高斯定理

把电学带入现代定量科学研究行列的,是法国科学家库仑(Coulomb),他在 1785 年通过实验得到了我们今天称之为库仑定律的公式:

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} = \mathbf{E}_{12} q_2 \quad (1.1.1)$$

\mathbf{F}_{12} 表示点电荷 q_1 对点电荷 q_2 的作用力,力的大小与电荷乘积 $q_1 q_2$ 成正比,与它们之间的距离 r_{12} 的平方成反比,力的方向从 q_1 指向 q_2 ,比例系数 k 由实验和单位制决定,在国际单位制(SI)中取:

$$k = 9 \times 10^9 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad \epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \approx 8.854 \times 10^{-12} \quad (\text{F/m}) \quad (1.1.2)$$

其中 ϵ_0 是一个基本物理常数,称为真空介电常数或真空电容率。

由于电荷 q_2 受到了来自电荷 q_1 的作用力,所以电荷 q_1 在电荷 q_2 的位置产生了某种物质,称之为**电场**。描述电场大小与方向的物理量叫**电场强度**,它定义为单位正电荷所受到的力,即单位正电荷所受到的力的大小和方向,就是该点处电场强度的大小和方向。于是,令(1.1.1)中的 $q_2 = +1$,就得到点电荷 $q_1 = Q$ 在点电荷 q_2 的位置 $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}$ 所产生的电场强度:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (1.1.3)$$

这里去掉了下标,以示处于原点的电荷 Q 在空间任意位置 \mathbf{r} 处产生的电场强度。如果空间存在多个电荷,则总电场是各自产生的电场矢量代数和,这是由电场强度的力学定义所决定的,因为在力学中合力是分力的矢量代数和。

以上讨论中假设了电荷是静止不动的,所产生的电场称为**静电场**。如果电荷保持匀速运动,则还会产生磁场;若是加速运动,则会产生电磁波,这些将在后面讨论。电荷是产生电磁场与电磁波的物质基础。

电场强度可以形象地用**电力线**来描述。电力线是一系列的有向曲线,用穿过单位面积的电力线数量来表示电场强度的大小,而曲线的切线方向就是电场强度的方向。因为电场强度的大小和方向是唯一的,所以电力线绝不会相交。静电场的电力线从正电荷出发,终止于负电荷。为了定量地计算穿过曲面的电力线数量,定义**电通量**:

$$\varphi_E = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.1.4)$$

如果把(1.1.3)代入(1.1.4),并假定 S 是一个半径为 r 的球面, $d\mathbf{S}$ 的方向定义为从球面向外,则得到:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.1.5)$$

这个关系称为**高斯定理**。其实, S 可以是任意封闭曲面,只要电荷 Q 被包含在 S 内;如果不在 S 内,则右边为零。如果 S 内有多个电荷,则对每个电荷 $Q_i (i = 1, 2, \dots)$ 产生的电场 $\mathbf{E}_i (i = 1, 2, \dots)$, (1.1.5) 都成立;所以对总电荷 $Q = \sum_i Q_i$ 产生的总场 $\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i$, (1.1.5) 也成立。

描述矢量场属性还可以使用**环量**,它定义为沿闭合曲线的积分。对静电场,

$$\Gamma_E = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1.1.6)$$

其中 C 是一条任意闭合曲线。把点电荷的电场(1.1.3)代入就很容易得到证明,对总电荷产生的总电场当然也成立。

1.1.2 安培定律与安培定理

法国科学家安培(Ampere),在1820年通过精心设计的实验,证明电流元($I_1 d\mathbf{l}_1$)对另一个位于 \mathbf{r}_{12} 处的电流元($I_2 d\mathbf{l}_2$)产生的作用力(\mathbf{F}_{12})满足:

$$\mathbf{F}_{12} = k_m \frac{(I_2 d\mathbf{l}_2) \times (I_1 d\mathbf{l}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_{12})}{r_{12}^2} = (I_2 d\mathbf{l}_2) \times d\mathbf{B}_{12} \quad (1.1.7)$$

这个关系称为**安培定律**,其中比例系数 k_m 由单位制决定,在国际单位制(SI)中取:

$$k_m = 10^{-7} = \frac{\mu_0}{4\pi}, \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ (H/m)} \quad (1.1.8)$$

其中 μ_0 是一个基本物理常数,称为**真空磁导率**。

因为电流元($I_2 d\mathbf{l}_2$)受到电流元($I_1 d\mathbf{l}_1$)的作用,所以电流元($I_1 d\mathbf{l}_1$)在电流元($I_2 d\mathbf{l}_2$)的位置产生了某种物质,称之为**磁场**,并用**磁感应强度**矢量来描述。根据(1.1.7),处在原点位置的电流元($I_1 d\mathbf{l}_1$)= $(Id\mathbf{l})$ 在空间任意位置($\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}$)处所产生的磁感应强度为:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (1.1.9)$$

这个式子也称为**毕奥-萨伐尔(Biot-Sarvert)定律**。

磁感应强度矢量也可以用**磁力线**来描述,即用穿过单位面积的磁力线数量来表示大小,用磁力线的切线方向表示磁场的方向。空间任一点的磁感应强度大小和方向是唯一的,所以磁力线绝不可能相交。由(1.1.9)可以看出,电流元($Id\mathbf{l}$)产生的磁力线总是与位置矢量 \mathbf{r} 垂直,因此磁力线必定形成闭合曲线,所以穿过任意闭合曲面的**磁通量**必为零,所有电流元产生的总磁场 \mathbf{B} 的磁通量也为零:

$$\varphi_B = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.1.10)$$

这个关系称为**磁感应强度的高斯定理**。磁力线的闭合性好像是涡旋,描述这种涡旋性强度的量是**环量**:

$$\Gamma_B = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.1.11)$$

其中 C 表示任意闭合曲线。作为一个最简单的例子,计算一根沿 z 轴放置的无限长载流直导线产生的磁感应强度。考虑到 $d\mathbf{l} = \varepsilon dz$ 和 $\hat{\mathbf{r}} = (\rho\hat{\rho} + z\hat{z})/\sqrt{\rho^2 + z^2}$,有 $d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}} = \hat{\varphi}(\rho dz)/\sqrt{\rho^2 + z^2}$,直接代入(1.1.9)得到:

$$\mathbf{B} = \hat{\varphi} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \hat{\varphi} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \quad (1.1.12)$$

将此式代入(1.1.11),并假设 C 是以直线为中心、半径为 ρ 的圆环,则 $d\mathbf{l} = \hat{\phi}(\rho d\phi)$,于是:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (1.1.13)$$

这个式子称为**安培环路定理**,虽然它是从无限长直导线的特例得到的,其实它适合任何情况,只要把右边的电流 I 理解为穿过闭合回路 C 的总电流。

1.1.3 法拉第定律

英国科学家法拉第(Faraday),1831年通过实验证明,如果通过闭合回路的磁通量发生变化,则会在闭合回路中产生**感应电动势**:

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \varphi_B}{\partial t}, \quad \varphi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.1.14)$$

这个关系称为**法拉第定律**,其中回路 C 和曲面 S 的方向满足右手关系(右手四指与 C 的方向一致,则拇指为 S 的方向)。

法拉第定律说明,电荷不是直接产生电场的唯一原因,变化的磁场也可以直接产生电场。但是,两者产生的电场性质有所不同,静止电荷产生的电场环量为零,即(1.1.6)式,而变化的磁场产生的电场环量不为零。所以,如果把(1.1.14)中的电场看成是总电场,该式仍然成立。

§ 1.2 麦克斯韦方程组,连续性方程

1864年,英国科学家麦克斯韦对前人的工作进行了分析总结,并创造性地引入了“位移电流”的概念,得到了我们今天所说的麦克斯韦方程组(Maxwell, 1865)。现在来说明这组方程的由来。

上一节介绍的电磁学定律肯定都是正确的,需要的只是对它们做进一步的诠释。首先看(1.1.14),这个方程已经很完美了;使用斯托克斯(Stokes)定理,可以把它写成微分形式,即:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

这个式子对任意的曲面 S 都成立,因此必有:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.2.1)$$

这是(1.1.14)的微分形式或法拉第定律的微分形式。

现在来看安培定理(1.1.13),并先使用 Stokes 定理把它写成微分形式:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (1.2.2)$$

其中 \mathbf{J} 称为**体电流密度**,表示通过单位面积的电流强度,即 $I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ 。该式说明磁感应强度 \mathbf{B} 是由电流密度 \mathbf{J} 产生的。但是我们知道,磁化的物质如磁铁也会产生磁场,所以我们假定磁化物质中存在某种“分子电流”,记为 $\mathbf{J}_{\text{分子}}$,它与**磁化强度** \mathbf{M} 的关系为 $\mathbf{J}_{\text{分子}} = \nabla \times \mathbf{M}$ 。如果在一对平行板电容器上加上交变电场,可以在板之间的空间中检测到有磁场;因此可以认为两板间存在“位移电流”,记为 $\mathbf{J}_{\text{位移}}$,它的大小通过实验证明为 $\mathbf{J}_{\text{位移}} = \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$,其中 \mathbf{E} 为板间的电场强度。如果把电介质放到变化的电场中,则空间磁场分布会发生变化,这可以认为是因为介质中的“极化电流”产生的,记为 $\mathbf{J}_{\text{极化}}$,它与**极化强度** \mathbf{P} 的关系是 $\mathbf{J}_{\text{极化}} = \partial \mathbf{P} / \partial t$ 。因此,我们把(1.2.2)中 \mathbf{J} 写为四项之和:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_{\text{分子}} + \mathbf{J}_{\text{位移}} + \mathbf{J}_{\text{极化}} \\ &= \mathbf{J}_f + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

其中第一项称为“自由电流”,就是由可以自由移动的载流子形成的电流,能使用电流表直接测量,其他三项都是不能用电流表直接测量的。定义:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (1.2.4)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1.2.5)$$

其中 \mathbf{H} 称为**磁场强度**, \mathbf{D} 称为**电位移矢量**。把(1.2.3)代入(1.2.2)并利用这两个定义,得到:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.2.6)$$

其中最后一项包含位移电流和极化电流,合称为**位移电流**。

再来看高斯定理(1.1.5)。先通过 Gauss 散度定理把它写成微分形式:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.2.7)$$

其中 ρ 称为**体电荷密度**,即满足 $Q = \int_V \rho dV$ 。显然,当有介质存在时,(1.2.7)右边的电荷应该是总电荷密度,即包括自由电荷密度 ρ_f 和极化电荷密度 $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ 。使用(1.2.5)的定义得到

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (1.2.8)$$

最后,关于磁感应强度的方程(1.1.10)不需要修改,写成微分形式为:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2.9)$$

方程(1.2.1)、(1.2.6)、(1.2.8)、(1.2.9)合称为麦克斯韦方程组,重写如下: