成人高等学校大专教学参考书

概率论与数理统计

张廷杰 陆秀媛 编

机械工业出版社

成人高等学校大专教学参考书

概率论与数理统计

张廷杰　陆秀媛　编

机 械 工 业 出 版 社

内 容 简 介

本书共七章，内容包括随机事件与概率、随机变量的概率分布与数字特征、几种重要的概率分布、极限定理、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析。每章末均有习题，书后附有习题答案。

本书内容通俗易懂，思路清晰，条理性强，联系实际，适合作各类成人高等学校财经类专业大专教学用书、教学参考书或自学用书，还可供普通高等学校财经类专业师生参考。

概率论与数理统计

张廷杰　陆秀媛　编

●

责任编辑：贡克勤

封面设计：刘　代

●

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

机械工业出版社京丰印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

●

开本 787×1092 1/32 · 印张 8 7/8 · 字数 191 千字

1990年7月北京第一版 · 1990年7月北京第一次印刷

印数 0,001—3,000 · 定价：5.00元

●

ISBN 7-111-02354-4/O·53(X)

前　言

本书是根据北京市成人教育局颁发的成人高等学校财经类专业《概率论与数理统计》课程教学大纲编写的。

本书是针对成人学员的特点，按照60～80课时的讲课需要而编写的，部分章节具有相对独立性。讲授过程中，可根据课时安排和教学实际适当删减部分内容，由学员自学。本书只包括概率论的一些基本内容和某些实用范围较广的数理统计方法，并注意理论联系实际。对基本概念、重要公式和定理都用较多的实例加以详细阐述，并力求深入浅出、循序渐近、通俗易懂，便于学员阅读、自学。

本书初稿曾经反复试用、修改、整理直至成书。本书在编写和出版过程中、有关领导和同事给予了极大的关心、支持和帮助。中国科学技术大学研究生院数学教学部牛实为教授、北方交通大学数学系陈长荫教授仔细审阅了全部书稿，并提出了不少修改意见。北京信息工程学院邱佩璋教授、中国科学技术大学研究生院袁倬斌教授、北京钢铁学院分院何宜业高级工程师对本书的出版给予了极大的关心、支持和鼓励。作者在此对他们表示衷心的感谢。

本书内容通俗易懂，密切联系实际，便于自学。适合作各类成人高等学校财经类、管理类专业大专教学用书、教学参考书或自学用书，也可作普通高等学校和中等专业学校有关专业师生的教学参考书。全书共七章，第一、二、

六、七章由张廷杰编写，第三、四、五章由陆秀媛编写。

本书虽经反复试用、修改，但由于作者水平所限，难免还有不少缺点、错误，敬请读者批评指正。

编　者

1990年4月

目　录

第一章　随机事件与概率

在自然界与人类社会的政治经济生活中，经常遇到各种各样现象。其中一类现象称为必然现象或确定现象，另一类现象称为随机现象或不确定现象。概率论和数理统计是研究和揭示随机现象的统计规律性的一门数学学科，是近代数学的重要组成部分。它的内容很丰富，具体方法很多，应用相当广泛，已作为从事科学研究和经济管理工作必不可少的基础知识和重要工具。当前，社会经济学家用它来解释和判断一些社会现象和经济规律，遗传学家用它来计算培育出新品种的可能性，物理学家用它来计算中子通过重水的可能路线。此外，在工农业生产和商品交换过程中，在军事、航天、航海、天文、气象、水文、地质、生物、医学等方面都有着广泛的应用。

随机事件与概率是概率论中最基本的两个概念，研究概率的性质和计算是概率论中的基本问题。本章主要讨论概率的定义、性质与计算。

§1-1　随机事件

（一）必然现象与随机现象

必然现象是指在一定条件下一定会出现的现象，这类现象的发生与否一般可以事先确定。这种现象也称为确定现象。

例如，在标准大气压下（≈ 0.1013MPa），纯水被加热到

100℃时会沸腾。这里，“标准大气压”和“100℃”是条件，而“沸腾”是结果。只要这两个条件具备，那么纯水就一定出现“沸腾”这一种结果。

再如，有100件产品全是正品，从其中任取1件必然是正品。这里，“100件产品全是正品”是条件，结果是“任取1件是正品”。只要条件具备，结果必然出现。

上面两个例子中的现象都是必然现象。在一定条件下，必然现象只有一个可能结果。因此，必然现象所出现的结果总是肯定的。在相同的条件下，人们对必然现象出现的结果可以事先预言。

在一定条件下，某种现象的可能结果不止一个，至于哪一个结果出现事先无法确定和预言。具有这种特点的现象称为随机现象，也称为不确定现象。

例如，任意抛出一枚均匀硬币，当硬币落到地面上时有两种可能结果：正面朝上或反面朝上（通常把有币值的一面称为正面）。究竟哪面朝上，只有在硬币落地之后才见分晓，而在硬币落地之前是无法确定的。

又如，在相同条件下，一门大炮多次射击同一目标，炮弹并不都落于同一点。这说明炮弹射击时，炮弹的落地点有多个可能结果。至于炮弹落于何处，在炮弹射击之前是不能确定的。

再如，在10个同类产品中包含8个正品、2个次品，从其中任意抽取3个，那么“3个都是正品”或“至少1个是次品”的结果，在抽取之前也是不能确定的。

上述现象都是随机现象。还有许多例子，一粒种子能够发芽还是不能发芽等等，也都是随机现象。由于随机现象出现多种可能结果，表现出很大的偶然性和不确定性，所以有

时也把这种现象称为偶然现象或不确定现象。

在自然界和人类社会经济活动中，任何现象都是在一定条件下发生的。而随机现象的发生除了基本条件外，还要受到一些不能为人们完全控制的次要因素的影响，从而表现出偶然性来。例如大炮射击时，其炮弹落地点除了受炮本身的性能和发射角等基本条件决定之外，还要受到风力、风向、温度、湿度等次要因素的影响。这些次要因素无时不在改变，因此即使基本条件不变，射击时炮弹的落地点事先也无法精确确定。

对随机现象进行一次或少数几次观察、试验，其结果是不能预言的。如果在相同条件下，通过大量观察和试验，每种随机现象都出现某种规律性。例如，对于一粒或几粒种子事先不能断定它们能否发芽，但在同一条件下，一批种子的发芽率却是稳定的。

由此可见，随机现象具有偶然性和必然性的两重性。由于随机现象具有多个可能出现的结果，因此对其结果的出现是不能预言的，这是偶然性的一面。但是，又由于对随机现象的大量观察和试验所得到的结果出现某种规律性，因此偶然性又受到随机现象本身内部规律性的支配。这种规律性也称为随机现象的统计规律性，这又是必然性的一面。概率论和数理统计就是从数量的侧面来研究和揭示随机现象的统计规律性的一门数学学科。

（二）随机事件的概念

在概率论中，把对随机现象的观察或试验叫做随机试验。在一定条件下，进行随机试验所观察到的每一个可能结果称为随机事件，简称为事件。通常用符号 A、B、C 等表示。在随机事件中，有的事件可以看成是由某些事件复合而成

的，而有些事件则不能分解为其它事件的组合。这种不能分解为其它事件组合的最简单的随机事件称为基本事件。例如，掷一颗骰子的试验中，观察其出现的点数，“1点”、“2点”、…、“6点”都是基本事件。“奇数点”也是随机事件，但它不是基本事件，它是由“1点”“3点”“5点”这三个基本事件组成的，只要这三个基本事件中的一个发生，“奇数点”这个事件就发生。

在一定条件下，每次试验中一定发生的事件称为必然事件，用符号U表示。每次试验中一定不发生的事件称为不可能事件，用符号V表示。例如，在掷一枚均匀硬币的试验中，事件“正面朝上或反面朝上”是必然事件。事件“正面朝上且反面朝上”是不可能事件。又如，在社会主义社会中，事件“存在商品生产”是必然事件。在原始社会中，事件“存在商品生产”是不可能事件。再如，在掷一颗骰子的试验中，“点数小于7”是必然事件。“点数不小于7”，是不可能事件。

应该指出：不论是必然事件、不可能事件，还是随机事件，都是相对于一定试验条件而言的，试验条件发生变化之后，事件的性质也可能发生变化。例如，“点数小于7”这个事件在投掷一颗骰子的试验中是必然事件，在投掷两颗骰子的试验中就是一个随机事件，而在投掷8颗或8颗以上的骰子时，它就成为不可能事件了。概率论所研究的都是随机事件，为了讨论方便，一般将必然事件和不可能事件也当作随机事件，而作为它的两个极端情况。

（三）事件间的关系和运算

对于试验的每一个基本事件，用包含一个元素ω的单点集合$\{\omega\}$表示；由若干个基本事件复合而成的事件，用包含

若干个相应元素的集合表示；由所有基本事件对应的全部元素组成的集合，称为样本空间。由于任何一次试验的结果必然出现全部基本事件之一，这样，样本空间作为一个事件是必然事件，仍以U表示。样本空间中的每一个元素称为样本点。因此，可以把随机事件定义为样本点的某个集合。如果把样本空间看作全集，则每一个随机事件就相应于它的一个子集。不可能事件V就是空集。必然事件U就是全集。因此，可以把事件的关系和运算与集合的关系和运算统一起来。

为了直观，我们还经常用图形表示事件。一般地，用平面上某一正方形（或矩形）表示必然事件，该区域内的一个子区域表示事件。

1. 事件的包含

如果事件A发生必然导致事件B发生，即A中的每一个样本点都包含在B中，称为事件B包含事件A，或称事件A包含于事件B。记作

$$B \supset A \quad \text{或} \quad A \subset B$$

显然，对任一事件A，有

$$V \subset A \subset U$$

2. 事件的相等

如果事件A包含事件B，事件B也包含事件A，称事件A与B相等（或等价）。即A与B所含的样本点完全相同。记作

$$A = B$$

3. 事件的并（或和）

两个事件A、B中至少有一个发生的事件是一个事件"A或B"，称为事件A与B的并（或和）。它是由事件A和B所有样本点构成的集合。记作

$$A+B \quad 或 \quad A\cup B$$

4．事件的交（或积）

两个事件A与B同时发生的事件是一个事件“A且B”，称为事件A与B的交(或积)。它是由事件A与B的所有公共样本点构成的集合。记作

$$AB \quad 或 \quad A\cap B$$

5．事件的差

事件A发生而事件B不发生，是一个事件，称为事件A与事件B的差。它是由属于A但不属于B的那些样本点构成的集合。记作

$$A-B$$

6．互不相容事件

如果事件A与事件B不能同时发生，即$AB=V$，称事件A与事件B互不相容(或称互斥)。互不相容事件A与B没有公共的样本点。显然，基本事件间是互不相容的。

7．对立事件

事件“非A”称为A的对立事件（或逆事件)。它是由样本空间中所有不属于A的那些样本点组成的集合。记作

$$\bar{A}$$

显然 $A\bar{A}=V$ 且 $A+\bar{A}=U$

$$\bar{A}=U-A \qquad \bar{\bar{A}}=A$$

8．完备事件组

若事件A_1，A_2，…，A_n为两两互斥，且$A_1+A_2+\cdots+A_n=U$，称A_1，A_2，…，A_n构成一个完备事件组。

用图形表示事件间的关系和运算见图1-1。

例1 掷一颗骰子的试验，观察出现的点数：事件A表示“奇数点”；B表示“点数小于5”；C表示“小于5的偶数

点"。用集合的列举法表示下列事件：U，A，B，C，$A+B$，$A-B$，AB，AC，$C-A$，$\bar{A}+B$

解 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A=\{1, 3, 5\}$

$B=\{1, 2, 3, 4\}$

$C=\{2, 4\}$

$A+B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A-B=\{5\}$

$AB=\{1, 3\}$

$AC=V$

$C-A=\{2, 4\}$

$\bar{A}+B=\{1, 2, 3, 4, 6\}$

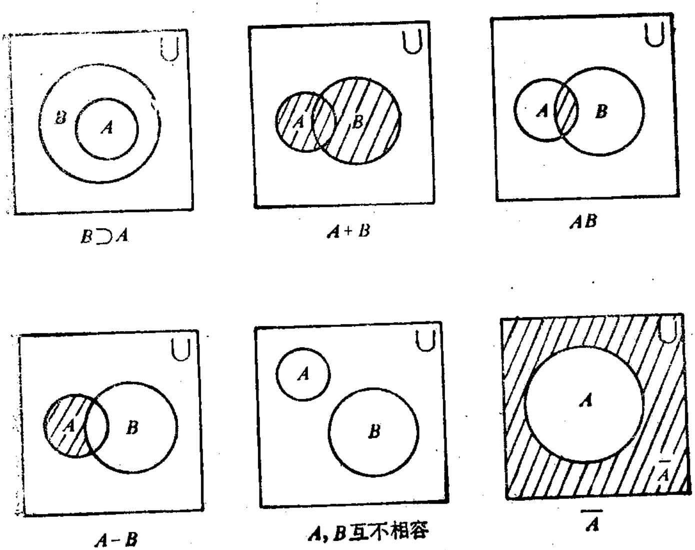

图 1-1

例2 设事件A_k表示第k次取到了合格品($k=1,2,3$)，试用符号表示下列事件：三次都取到了合格品；三次中至少有一次取到合格品；三次中恰有两次取到合格品；三次中至多有一次取到合格品。

解 三次都取到合格品：$A_1A_2A_3$

三次中至少有一次取到合格品：

$$A_1+A_2+A_3$$

三次中恰有两次取到合格品：

$$A_1A_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3$$

三次中至多有一次取到合格品：

$$\bar{A}_1\bar{A}_2+\bar{A}_1\bar{A}_3+\bar{A}_2\bar{A}_3$$

§1-2 随机事件的概率

（一）概率的统计定义

设事件A在n次重复试验中发生了m次，则$\frac{m}{n}$称为事件A发生的频率，m称为事件A发生的频数。它满足不等式：$0\leqslant\frac{m}{n}\leqslant 1$。如果$A$是必然事件，有$m=n$，则$\frac{m}{n}=1$；如果$A$是不可能事件，有$m=0$，则$\frac{m}{n}=0$。故必然事件的频率为1，不可能事件的频率为0。

当重复试验的次数n很大时，某事件A发生的频率的数值总会在某个确定的数值附近摆动。并且，当重复试验的次数n越大时，事件A发生的频率就越接近这个数值。历史上有不少人作过多次投掷硬币的试验，设A表示“正面朝上”的事件，下表记录了几个人的试验结果（见表1-1）。

由表1-1可以看出，投掷硬币次数越多时，频率越接近

0.5，且逐渐稳定于0.5。这样，0.5这个数反映了事件A出现的可能性的大小。这种特性就是随机事件发生的频率的稳定性。

表 1-1

试验者	投掷次数 n	A出现次数 m	A出现频率 $\frac{m}{n}$
德摩根	2048	1061	0.518
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

定义 1　在不变的条件下，重复进行n次试验，事件A发生的频率$\frac{m}{n}$稳定地在某一常数p附近摆动，且一般说来，n越大，摆动幅度越小，则称常数p为事件A的概率，记作$P(A)$。

这就是概率的统计定义，它描述了在一次试验中事件A发生的可能性的大小。例如，投掷一枚硬币，事件“正面朝上”的概率为$\frac{1}{2}$。投掷一枚骰子，事件“出现1点”的概率为$\frac{1}{6}$,“出现2点”的概率为$\frac{1}{6}$，“出现奇数点”的概率为$\frac{1}{2}$。

事件的频率与概率是度量事件出现可能性大小的两个统计特征。频率是个试验值，具有随机性，可能取多个不同的值。因此，它只能近似地反映事件出现的可能性的大小。概率是个理论值，它由事件的本质所决定，只能取唯一值。概率能精确地反映事件发生的可能性的大小。但在实际中，常常把大量试验测得的一系列频率的平均值或一次大量试验所

测得的频率作为概率的近似值。例如，合格率、废品率、出生率、死亡率、射击命中率等都是频率。这样求得的概率一般称为经验概率。

（二）概率的古典定义

概率的统计定义不仅给出了随机事件概率的定义，而且给出了求概率的方法。但这种方法，需要试验的次数很多，而且求出的概率往往是近似值。在某些特殊情况下，利用人们长期积累的实际经验，根据问题的特殊性质，可以直接计算出事件的概率。

例如，投掷一枚均匀硬币，求事件“正面朝上”的概率，并不需要做成千上万次试验。根据实践经验自然会想到，投掷一枚均匀硬币有两种可能结果：“正面朝上”与“反面朝上”，而且这两种结果发生的可能性大小是一样的。因此，可以断定，“正面朝上”的概率是$\frac{1}{2}$。

又如，投掷一颗骰子，有六种可能结果：“1点”、“2点”、…、“6点”，而且这六种结果发生的可能性的大小也是一样的。从而可以断定，各点发生的概率是$\frac{1}{6}$。

类似上述这种随机现象既简单又常见，是概率论发展史上研究最早的问题，通常称为“古典概型”。它的特征有下面两点：

（1）只有有限个可能结果。

（2）每个可能结果发生的可能性大小一样。这一特征也称为具有等可能性。

这里所说的可能结果是指最简单、最基本的结果，每个结果都是一个基本事件。

定义2 若试验结果一共由n个基本事件A_1、A_2、…、