高等學校教學用書

射影幾何學

下册

H. Ф. 切特維魯新著

高等教育出版社

高等學校教學用書

射影幾何學

下册

H. Φ. 切特維魯新著
東北師範大學幾何教研室譯
楊春田 孫福元校

高等教育出版社

本書係根據蘇俄教育部教育出版社(Учпедгиз)出版的切特維魯新著(Н. Ф. Четверухин)"射影幾何學"(Проективная геометрия)1953年版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲師範學院教科書。

本書由東北師範大學數學系楊春田、孫福元、郭衡中、蔡昌齡、黃啟璐、王銘文、王家彥等譯出，由楊春田、孫福元校閱。

射影几何学

下册

Н. Ф. 切特維魯新著

东北师范大学几何教研室譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第〇五四号)

京華印書局印刷　新華書店总經售

書号13010·79　開本850×1168 1/32　印張5 13/16　字數140,000

一九五五年十一月北京第一版

一九五六年六月北京第二次印刷

印數3,001—7,000　定價(8)¥0.70

目　　錄

第五章　二次圖形的射影变換
(同素变換与異素变換)

§ 47. 从調和出發的射影性定义以及它与斯丹納定义的等值性

1. 在前兩章裏，我們曾經根據斯丹納的射影性定义，作过關於點列与線束的射影对应理論的結構。这就是兩个一次圖形中若一个圖形上四个元素的交叉比總等於另一圖形上四个对应元素的交叉比，那麼我們把兩个一次圖形的这种一一对应關係叫做射影对应。利用交叉比(非調和比)这样來定义射影对应之所以可能，是因为交叉比是投射与截断的不变量。这从點列与它的透視線束間对应元素交叉比相等的定理(§ 27)就可以得到。交叉比本身与線段和角的度量有關，而度量是射影幾何裏要避免的概念。因为射影幾何可以在它本身所固有的純幾何基礎上建立起來(不利用度量概念)。

在从特殊形式的空間——添加非固有元素的歐幾里得空間——發展起來的这本射影幾何教程裏，使用我們已有的交叉比的射影性定义是適當的，这可以使我們容易敍述平面射影幾何的基本事实。然而把一次圖形的任意四个元素交叉比不变的这样要求作为射影性定义却过於嚴刻，並且使射影幾何今後的發展要受到限制。以後將要說明，这种要求可以用調和元素羣的不变性这样較寬的要求來代替，也就是用交叉比等於 -1 的特殊情形的不变性來代替。同時應該注意，(四个)元素的調和擺列性質可以利

用完全四角形(§ 30)由純射影的方法來定义。斯陶特就是用这样方法根据調和的观念❶作出了射影幾何的純幾何(不用度量概念)結構。

在这本射影幾何教程中，我們並不打算來講射影幾何的純幾何結構。並且曾經說过，射影性定义是根据交叉比的概念。因此，我們不改变敍述的性質，仍利用从調和出發的射影性定义，以便使我們可能在放寬的斯陶特要求下來研究射影对应。为此我們必須証明这兩个射影性定义的等值性，这就是在这一節裏所要作的。

2. 於是，兩个一次圖形作成的一一对应，如果其中一个圖形的每四个調和元素，对应第二个圖形的四个調和元素，这样的对应就叫做斯陶特射影对应。

我們首先証明，当一个圖形的四个調和元素变为另一个圖形的四个調和元素時，只要單方面的保留調和性就够了。

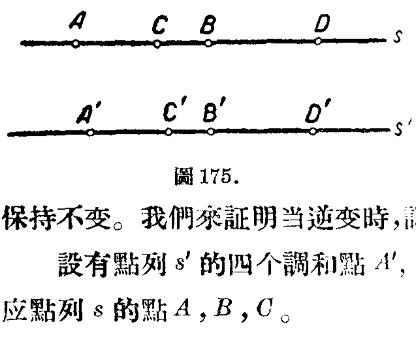

圖 175.

事实上，設有兩个點列 s 和 s'(圖 175)。假定，当點列 s 变为點列 s' 時調和性保持不变。我們來証明当逆变時，調和性也保持不变。

設有點列 s' 的四个調和點 A', B', C', D'。假定點 A', B', C' 对应點列 s 的點 A, B, C。

我們用 D 來表示點 A, B, C 的第四調和點。於是按照假定點列 s 的四个調和點 $ABCD$ 所对应點列 s' 的四个點也是調和的。但是點 A, B, C 对应點 A', B', C'。因此點 D 对应點 D' 並且點 D' 对應點 D，D 就是三點 A, B, C 的第四調和點❷。

3. 其次我們來証明下面的斯陶特射影对应的性質：

❶ 参考歷史简述，340，341 頁。

❷ 不要忘記，我們假定这个对应是一对一的。

I. 斯陶特射影对应是有序的。

我們來研究兩个點列 s 和 s'，並且假定它們間已經建立了斯陶特的射影对应。

为了断定这种对应的有序性，只需要証明點列 s 的點的順序關係对应點列 s' 裏对应點的同样順序關係。例如，需要証明，如果點列 s 的兩对點不互相分隔，則點列 s' 裏的对应點对也具有同样的性質。如果點列 s 的點对互相分隔，則點列 s' 裏的对应點对也具有相同的性質。

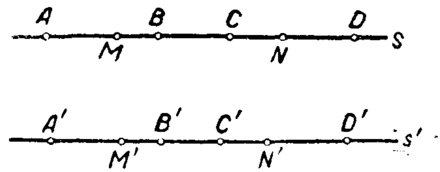

圖 176.

例如，設有點列 s 的四个點 A，B，C 和 D（圖 176），並且

$$A, B \doteq C, D.$$

我們來証明对於对应點 A', B', C' 和 D' 將有：

$$A', B' \doteq C', D'.$$

我們在 § 32 裏曾說过，兩个不分隔的點对總有公共的調和點对。我們用字母 M 和 N 來表示點列 s 的點对 A，B 和 C，D 的公共調和點对。因此就应有：

$$(ABMN) = -1, \quad (CDMN) = -1.$$

用 M' 和 N' 表示在點列 s' 裏，點 M 和 N 的对应點。於是按照斯陶特的射影性定义，应該有：

$$(A'B'M'N') = -1, \quad (C'D'M'N') = -1.$$

由此得到，點对 M', N' 是點对 A', B' 和 C', D' 的公共調和點对。但这就是說

$$A', B' \doteq C', D'.$$

同样容易証明，在

$$A, B \div C, D$$

的情形下，也保持順序不变。

事实上，如果这時出現

$$A', B' \div C', D',$$

根据上面的証明，我們就应該有：

$$A, B \div C, D,$$

这与所作的假定相矛盾。

II. 斯陶特定理 如果在同一条直線上兩个點列成斯陶特射影对应，並且这兩个點列的三个对应點对重合，則所有的对应點对都重合，也就是已知的兩个點列是恆等的。

我們假定點列 s 和 s' 在一条直線上，並且对应點对 A, A'；B, B' 和 C, C' 重合(圖 177)。因为點列 s 和 s' 成斯陶特的射影对应，所以三个二重點 A, A'；B, B' 和 C, C' 的第四調和點也重合。因此，可以断定存在有重合的对应點对的無限（可數）集合。我們來証明不可能出現任何一个不重合的对应點对。为了这个目的，我

圖 177.

們來研究兩个 AB 線段裏不含有點 C 的線段。指定这个線段的某个點 M。它在第二个點列裏的对应點 M' 应該屬於同一个線段。这从下面的理由就可以推出。點列 s 和 s' 是同向的，因为方向 ABC（點列 s 的）对应方向 $A'B'C'$（點列 s' 的）。

因为 $$MC \div AB,$$

所以 $$M'C' \div A'B'$$

或 $$M'C' \div AB.$$

於是點 M' 在含有點 M 的線段 AB 上。假設 M' 不与 M 重合。我們來証明这会引出矛盾。

前面曾說明过，当點 M 沿直線移動時，點 M' 也向同一方向移

動。这兩个點到二重點 $A(A')$ 与二重點 $B(B')$ 处应該重合。我們可以假定重合產生的更早一些。用 $A_0(A_0')$ 來表示點对 M，M' 向一个方向移動時的第一个二重點，而用 $B_0(B_0')$ 來表示點对 M，M' 向相反方向移動時的第一个二重點。於是不含有點 C 的線段 A_0B_0，除端點 A_0 和 B_0 之外，不能有另外的二重點。另一方面，我們來研究对於點 $A_0(A_0')$ 和 $B_0(B_0')$ 而言与點对 C,C' 調和共軛的點对 C,D'。因为點对 A_0, A_0'；B_0, B_0' 和 C，C' 重合，所以點对 D,D'（是第四調和點）也重合。

此外应該有

$$A_0, B_0 \div C, D,$$

也就是二重點 $D(D')$ 屬於不含點 C 的線段 A_0B_0。

所得到的矛盾証明，假定存在相对应而不重合的點对 M 和 M' 是不正確的。因此不能有这样的點对。

4. 斯陶特的射影性定义与斯丹納射影性定义是等值的。

为了断定这兩个射影性定义（斯陶特的和斯丹納的）的等值性，我們需要証明：

1）由兩个一次圖形的斯丹納射影性定义，可以得到它們的斯陶特的射影性。

2）由兩个一次圖形的斯陶特的射影性定义，可以得到它們的斯丹納的射影性。

这兩个說法的第一个是很明顯的，因为斯陶特的射影性定义只不过是对調和元素羣的情况要求交叉比相等，而斯丹納的定义則假定兩个射影圖形的任何四对对应元素的交叉比都相等。顯然，斯丹納的定义超过了斯陶特定义的要求。

於是由斯丹納的射影性定义可以得到所研究的圖形的斯陶特射影性。

我們再來証明相反的說法也正確。

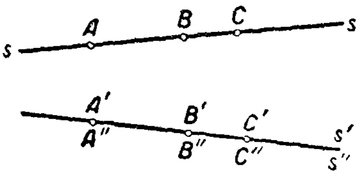

圖 178.

設有兩个點列 s 和 s'（圖 178）。假定在它們之間建立了斯陶特的射影对应。我們指定點列 s 的任意三个點 A, B 和 C，並且用 A', B', C' 表示它們在點列 s' 裏的对应點。於是就有：

點列 $s\ (A, B, C, \cdots) \barwedge$ 點列 $s'\ (A', B', C', \cdots)$（斯陶特对应）。

現在來建立點列 s 和 s'' 間的斯丹納射影对应，而點列 s'' 的底是點列 s' 所在的同一条直線。點列 s 和 s'' 間的（斯丹納）对应由三个对应點对 A，A''；B，B'' 和 C，C'' 來確定。这時取點列 s'' 的點 A'', B'' 和 C'' 使它們分別与點列 s' 的點 A', B' 和 C' 重合。

於是就該有：

點列 $s\ (A, B, C, \cdots) \barwedge$ 點列 $s''(A'', B'', C'', \cdots)$（斯丹納对应）。

在上面已經建立的點列 s 对应點列 s' 与 s'' 的兩种对应裏，我們把點列 s' 和 s'' 裏对应點列 s 裏同一个點的兩个點看作对应點。例如，如果點列 s 的點 K 对应點列 s' 的點 K'，也对应點列 s'' 的點 K''，則點 K' 和 K'' 看作點列 s' 和 s'' 的对应點。

不难断定，所建立的點列 s' 和 s'' 間的对应是斯陶特的射影对应。

事实上，設 K', L', M' 与 N' 是點列 s' 的四个調和點，它們对应點列 s 的四个調和點 K，L，M 和 N（因为點列 s 和 s' 成斯陶特的射影对应）。这時，四个調和點 K, L, M, N 对应點列 s'' 的四个調和點 K'', L'', M'', N''（因为點列 s 和 s'' 成斯丹納的射影对应）。

因此，點列 s' 的四个調和點 K', L', M', N' 对应點列 s'' 的四个調和點 K'', L'', M'', N''。

所以，點列 s' 与 s'' 成斯陶特的射影对应。因为在这兩个點列

裏有三个重合的點对，就是：

$$A' \equiv A'', \quad B' \equiv B'', \quad C' \equiv C'',$$

於是按斯陶特定理，这兩个點列是恆等的：

$$s'(A', B', C', \cdots) \equiv s''(A'', B'', C'', \cdots).$$

因此，按斯陶特定义，點列 s 和 s' 是射影點列，按斯丹納定义，點列 s 和 s' 也是射影點列。

这样，兩个射影性定义的等値性定理就証明了。

这使我們在以後研究圖形的射影性質時只要求調和的不变性。特别是对於場的射影变換的研究，我們使用斯陶特的定义。

§ 48. 場的同素对应（同素变換）。

在这一節裏我們要擴大射影对应的概念到二次圖形，也就是擴大到點与直線的場上。当然，我們可以把所得到的結論按照空間对偶原理轉換到和場对偶的二次圖形上，也就是直線与平面的把上。

下面所說的兩个場元素間的一一对应就叫做同素对应，或者簡称为同素。

а）一个場的每个點对应另一个場的一个點。

б）一个場的每条直線对应另一个場的一条直線。

в）一个場的接合元素对，对应另一个場的对应的接合元素对（也就是屬於一条直線的點对应屬於对应直線的點）。

应該注意，存在同素对应的兩个場的底可以是兩个不同的平面，或者是同一个平面。其次，从同素对应的定义可以得到这个概念的傳遞性。这就是說与第三个場 ω'' 成同素对应的兩个場 ω 与 ω' 必互相成同素对应。

我們來証明同素对应具有射影性質，也就是兩个同素对应場的对应一次圖形是射影形。假定場 ω 和 ω' 是同素对应的。我們

來研究場 ω 的一个點列 s 与它在場 ω' 上的对应點列 s'。証明點列 s 和 s' 是射影形。为此，我們知道，只要証明點列 s 的任意四个調和點对应點列 s' 的四个調和點就可以。設 A, B, C, D 是點列 s 裏構成調和挈的四个點。在平面 ω 上，通过點 A 任意引直線 AP 和 AQ，通过點 C 引截線与直線 AP 和 AQ 交於點 S 和 Q（圖 179）。其次，以直線联結點对 B, Q 和 B, S。我們用 P 來表示直

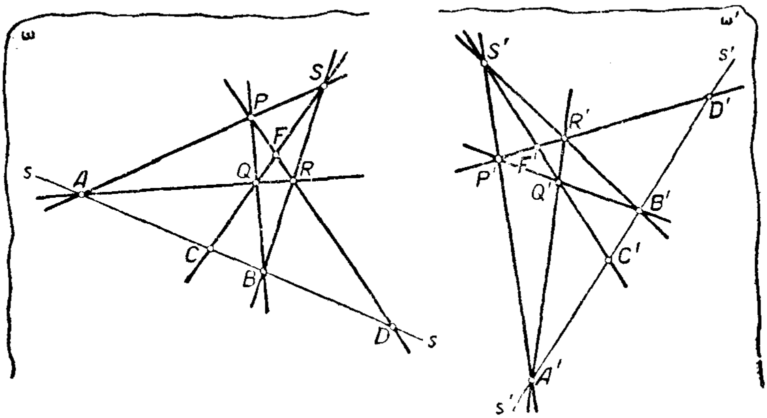

圖 179.

線 AS 和 BQ 的交點，用 R 來表示直線 BS 和 AQ 的交點。这時，直線 PR 与點列 s 交於點 D。这是由於點 A 和 B 是完全四角形 $PQRS$ 的对角線點，並且點 C 和 D 是通过第三个对角線點 F 的兩个对边和对角線 AB 的交點。我們知道，这時點对 A, B 和 C, D 应該構成調和挈。因此，对於四个調和點 A, B, C, D，我們作出完全四角形 $PQRS$，它的对角線是直線 s，A 和 B 是对角線點，而 C 和 D 是对角線与完全四角形的边 QS 和 PR 的交點。

點列 s 在平面 ω' 上对应點列 s'。點列 s 的點 A, B, C, D 对应點列 s' 的點 A', B', C', D'，完全四角形 $PQRS$ 对应完全四角形 $P'Q'R'S'$。於是，从同素对应定义可以推出，所有的从屬關係应該从場 ω 移到場 ω' 上而沒有任何改变。因此在平面 ω' 上，直線 s'

就是完全四角形 $P'Q'R'S'$ 的对角線，A' 和 B' 是它的对角線點，而點 C' 和點 D' 是通过第三个对角線點 F' 的一对对边和对角線的交點。由此立刻推出，四个點 A', B', C', D' 構成調和禁。於是，需要証明的事項已經証明。

現在就不难証明在兩个同素对应場裏对应線束的射影性。

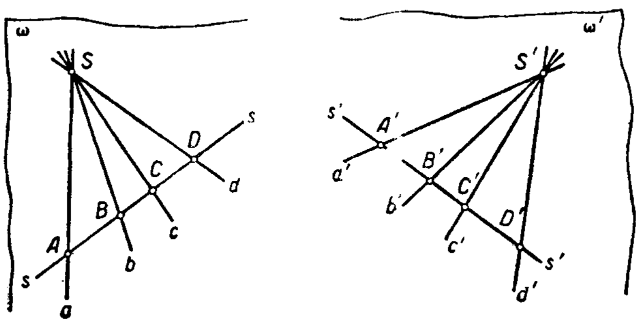

圖 180.

我們假定，場 ω 的線束 S 对应場 ω' 的線束 S'（圖 180）。用直線 s 截線束 S。我們得到与線束 S 透視的點列：

點列 $s(A, B, C, D, \cdots)\barwedge$ 線束 $S(a, b, c, d, \cdots)$。

直線 s 在平面 ω' 上对应直線 s'。後者截線束 S' 於點 $A', B', C', D', \cdots$，並且

點列 $s'(A', B', C', D', \cdots)\barwedge$ 線束 $S'(a', b', c', d', \cdots)$。

另一方面，在場 ω 和 ω' 的同素对应裏的點列 s 和 s' 是射影的：

點列 $s(A, B, C, D, \cdots)\barwedge$ 點列 $s'(A', B', C', D', \cdots)$。

由此断定这兩个點列的透視線束 S 和 S' 也是射影的：

線束 $S(a, b, c, d, \cdots)\barwedge$ 線束 $S'(a', b', c', d', \cdots)$。（証完）

这样，兩个同素对应場裏对应一次圖形的射影性就得到証明。由此也可以得到，同素对应場裏作为兩个射影線束对应射線

交點軌跡的每个二次曲線对应一个二次曲線（構成第一个曲線的兩个線束变为構成第二个曲線的兩个線束）。

§ 49. 透視同素变换与透射

設想在空間裏有平面 ω 和 ω' 以及射影中心 S（圖 181）。从中心 S 把平面 ω 的點投射到平面 ω' 上。这時平面 ω 的每个點 A 的中心射影是平面 ω' 的唯一點 A'。反过來，平面 ω' 的點 A' 对应它在平面 ω 上的中心射影 A。同样，場 ω 的每条直線的中心射影是場 ω' 裏的对应直線。例如，場 ω 的直線 AB 对应場 ω' 的直線 $A'B'$。这兩条对应直線是平面 ω 与平面 ω' 和投射平面 SAB（或 $SA'B'$）的交線。因此

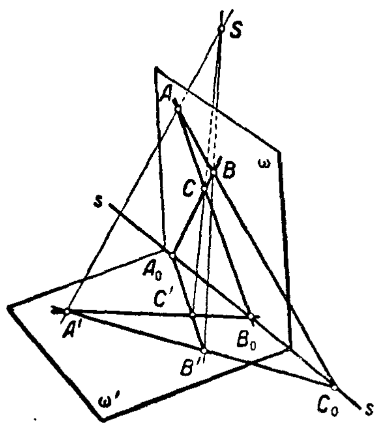

圖 181.

直線 $A'B'$ 对应平面 ω 上的直線 AB。因为在一条直線上的點的中心射影是对应直線上的點，於是兩个平面 ω 和 ω' 同素对应的所有条件都已具备。因此，推得的結論是平面 ω 和 ω' 間的对应是同素对应。这种对应叫做**透視同素对应**。

平面 ω 和 ω' 的交線 ss 顯然是透視同素对应的二重點的軌跡。我們用 C_0 來表示直線 AB 与直線 ss 的交點。这時點 C_0 自身对应。所以对应 AB 的直線 $A'B'$ 应該通过 C_0。由此断定兩条对应直線相交在直線 ss 上，这条直線也叫做**透視同素对应的軸**。點 S 叫做**这个同素对应的中心**。

現在進行下面的作圖。从中心 S_1 把平面 ω 投射到平面 ω_1 上（圖 182）。於是平面 ω 和 ω_1 間就作成透視同素对应，其中三角形

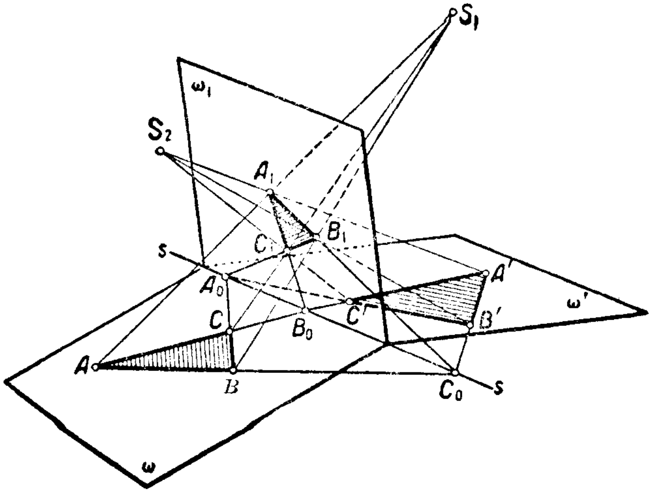

圖 182.

ABC 对应三角形 $A_1B_1C_1$。然後，再从与 S_1 不同的中心 S_2 把平面 ω_1 投射到通过平面 ω 和 ω_1 的交線的平面 ω' 上，我們得到使平面 ω_1 与 ω' 相对应的新的透視同素对应。在这个同素对应裏，三角形 $A_1B_1C_1$ 对应三角形 $A'B'C'$。平面 ω 和 ω' 間的对应顯然也是同素对应，因为与第三个場 ω_1 同素对应的兩个場 ω 和 ω' 互相同素对应。此外，場 ω 和 ω' 間的对应是透視同素的。这个結論是由於对应三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 是透射的，也就是它們滿足於笛沙格定理。因此直線 AA'，BB' 和 CC' 通过一个點。我們用 S 來表示这个點。那麼點 S 就是場 ω 和 ω' 的透視同素对应的中心。

如果平面 ω' 与平面 ω 重合，我們就得到一种新的情形。在这种情形下同素对应的場有同一个底。又因为在这种情形下对於三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 笛沙格定理仍然有效（平面上的笛沙格定理），於是联結对应點对的直線通过重合平面的同一个點 S。在这种情形下的同素对应叫做透射；點 S 叫做透射中心。联結对应點对 $(A, A'; B, B'; C, C'; \cdots)$ 的所有直線都通过中心 S。直線 s 叫作

透射軸。透射对应直線对的交點($A_0, B_0, C_0, \cdots$)都在这条直線上。

通过透射中心 S 的所有直線都是二重直線。中心 S 顯然也是二重點。

同样，透射軸 s 是二重直線，它的所有點都是二重點。在透射裏的兩个对应三角形，例如三角形 ABC 和 $A'B'C'$，滿足笛沙格定理的条件。

反过來也一样，滿足笛沙格定理的兩个三角形可以看作是透射裏的对应三角形。由此，这样三角形也就叫做透射三角形。

如果平面上的同素对应有中心，那麼它也有軸，也就是是透射。事实上，在这种情形下对应三角形在透射的位置並且它們的对应边的三个交點在一条直線上，这条直線顯然也就是透射軸。

同样，具有軸的同素对应也具有中心，也就是是透射。

如果已知透射中心 S 与透射軸 s，那麼要確定这个透射，只要再給出一对对应點 A，A' 就可以。这時點对 A，A' 應該滿足唯一的条件：直線 A，A' 一定要通过點 S。在其他方面，对应點对的取法是隨便的[1]。

特别是，我們可以取透射軸 s 上的某个點作为透射中心 S。透射的这样特殊情形，在以後(§ 54)我們將要遇到。

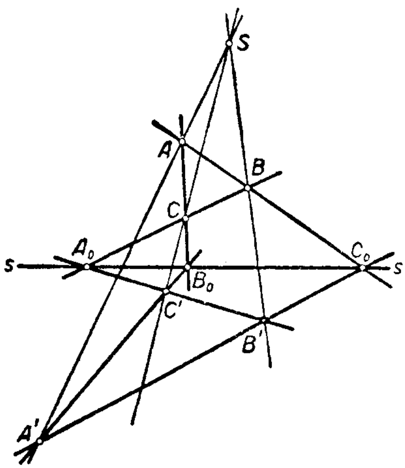

圖 183.

我們來証明，如果已知

$$S, s \text{ 和 } (A, A'),$$

[1] 当然，不能假定點 A 是二重點(也就是 $A' \neq A$)。