

## 内 容 简 介

本书是美国麻省理工学院本尼迪克和维拉斯两位教授根据哈佛-麻省理工学院保健科学和技术的教学计划写成的教材,共分三卷出版:1. 力学,2. 统计物理学,3. 电磁学。本书收集了大量结合医学和生物学重要和典型的说明性实例,并收入了若干宝贵的原始科学记载及科学家治学的轶事,既结合医学和生物学专业需要,又富启发性,取材先进,文笔生动。

本书适用于我国医科院校和综合大学生物专业的基础物理教学,可供有关师生作为参考教材,亦可供广大生命科学工作者自学基础物理学之用。

## PHYSICS

WITH ILLUSTRATIVE EXAMPLES  
FROM MEDICINE AND BIOLOGY

George B. Benedek·Felix M.H. Villars

Volume 1 Mechanics

Addison-Wesley Publishing Co. (1973)

## 物 理 学

结合医学和生物学解说性实例

卷一 力 学

本尼迪克 维拉斯 合著

邝华俊等译 刘普和 校

\*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

\*

开本 787×1092 1/16 印张 21.75 字数 480,000

1980年4月第1版 1980年12月第1次印刷

印数 00,001—4,700

书号 13012·0460 定价 1.60 元

# 卷一 力学目录

<b>1. 运动学</b> .....1	<b>3.2 静力平衡条件</b> .....74
1.1 引言.....1	<b>3.3 静力学的应用</b> .....78
1.2 一维运动: 速度和加速度.....2	A. 靠在墙上的木板.....78
1.3 在二维和三维运动中的速度与加速度.....8	B. 作用在髋关节上的力.....80
A. 匀速圆周运动.....9	i) 股骨和髌骨的基本解剖.....81
B. 抛体运动.....11	ii) 计算作用在股骨头上和 髌外展肌内的力.....83
1.4 单位及换算因子.....14	iii) 临床上和解剖学上的联系.....86
附录 矢量.....15	iv) 手杖对作用于髋关节诸力的影响.....87
参考及补充读物.....22	C. 作用在腰椎上的诸力. 腰痛, 椎间盘疾病.....90
习题.....23	i) 脊柱, 脊椎和背肌的基本解剖.....90
<b>2. 动力学</b> .....28	ii) 弯腰和伸腰时作用 在第五腰椎上的力.....95
2.1 引言.....28	iii) “脊柱弯曲症”患者腰骶椎间 盘中的剪切胁强.....98
2.2 牛顿第一定律: 惯性定律.....28	D. 进一步的应用; 关于静力平衡 转矩条件的一些注释.....100
2.3 牛顿第二运动定律.....28	<b>3.4 可变形物体的静力平衡:</b> 胁强、胁变与断裂.....100
2.4 牛顿第三运动定律: 作用和反作用定律.....30	A. 引言.....100
2.5 物理学中的基本力.....30	B. 伸张和压缩时的胁强和胁变. 虎克定律, 杨氏模量, 损坏和断裂.....103
A. 万有引力.....31	C. 梁的挠矩和曲率.....104
B. 卫星或月球围绕地球的运动.....32	D. 求荷重梁挠曲的微分方程.....109
2.6 非基本力或派生力.....35	E. 梁或骨的弯曲和断裂: 在胫骨骨折上的应用.....113
A. 接触力.....35	F. 切变中的胁强和胁变, 应用于滑雪事故中的骨扭转.....116
B. 流体(液体和气体)中的阻力.....38	<b>3.5 流体的静力平衡: 流体静力学</b> .....121
2.7 牛顿定律在动力学问题中的应用.....38	A. 引言和流体静压强的定义.....121
A. 引言.....38	B. 重力场中的流体: 压强随深度的变化.....123
B. 例题.....39	i) 不可压缩流体: 帕斯卡定律; 压强单位.....125
i) 运输列车.....39	ii) 可压缩的流体: 理想气体, 压强随高度的变化.....126
ii) 斜面上的木块.....42	iii) 浸没在流体里的物体所受的浮力.....128
iii) 谐振动.....44	C. 高压流体的生理效应.....131
iv) 弹簧枪.....48	i) 潜水.....131
v) 粘滞阻尼力 指数函数.....51	
vi) 空气阻力和收尾速度.....55	
vii) 摆的阻尼振动.....57	
viii) 离心摆.....62	
参考及补充读物.....67	
习题.....68	
<b>3. 静力平衡和作用在人体肌肉     及骨骼上的力</b> .....74	
3.1 引言.....74	

ii) 对血压的体位效应	133
iii) 高加速度的效应	134
D. 低气压生理效应	135
i) 高山病	135
ii) 气球升高和低气压的生理效应	138
iii) 血液中氧的储存和输送, 28 高山病和高 空缺氧症, 血红蛋白的氧离解曲线	141
iv) 高空气层中的旅行: 加压舱	145
E. 浮力和大分子分子量的测定	146
参考及补充读物	149
习题	151
<b>4. 动量</b>	161
4.1 引言	161
4.2 多质点系统的动量及动力学	161
4.3 扩展物体质心的运动	163
A. 两物体的质心	164
B. 直角三角形的质心	165
C. 质心的实验测定—— 应用于测定人体各部分的重量	167
4.4 动量守恒	169
A. 由男孩、球及船组成的系统	169
B. 箱子内的振子	170
4.5 心冲击图描记术	173
A. 引言	174
B. 心脏的基本解剖及生理	175
C. 心冲击图	175
4.6 冲量及动量的变化	180
A. 引言及冲量定义	180
B. 碰撞期间的的作用力: 说明性的实例	181
i) 受击高尔夫球	181
ii) 电梯下坠及骨折	182
iii) 从高处跳落或掉落地面和骨折	183
iv) 全身碰撞容限级, 从很高处掉下 的幸存者	185
v) 减速脉冲及伤势指数: 脑震荡及脑损伤标准	188
vi) 汽车事故中的安全措施	190
4.7 质量流和动量流, 流体的运输	190
A. 流密度	190
B. 液流产生的压强	192
C. 弯曲皮带管壁上的压强: 救火水龙和主动脉	193
参考及补充读物	197
习题	198

<b>5. 功和能</b>	203
5.1 引言	203
5.2 一维运动的功、动能及功率	203
A. 牛顿第二定律的一次积分, 功-动能公式	203
B. 功率及动能的变化率	204
C. 用功能考虑确定 $x(t)$	205
D. 保守力和非保守力	206
E. 简单保守力场中一维运动的实例	206
i) 在恒定重力场中的运动	206
ii) 线性恢复力作用下的运动, 谐振子	208
iii) 在不均匀重力场 (万有引力场) 中的运动	212
F. 保守力与机械能守恒	216
G. 非保守力. 功率. 机械能 与热的守恒定律	218
i) 物体在粘滞性液体中的下落运动. 热和机械能守恒	220
H. 单位及换算因子	224
5.3 三维运动的功、能和功率	225
A. 功-动能公式	225
B. 保守力、约束力和机械能守恒	227
C. 力学实例	229
i) 反冲砧块	229
ii) 跳板跳水	231
a) 最高高度和能量守恒	231
b) 垂直上跳的力学——功和功率	234
c) 起跳时机: 硬跳板和软跳板	236
d) 关于跳高	236
D. 三维空间中力和势能的关系—— 数学注释	237
E. 能量图和力学稳定性——叉-木塞摇摆器, 稳定、不稳定和亚稳定	239
5.4 热力学第一定律	244
A. 机械能守恒、外功及热	244
B. 电(热)水热器中的热、功及能量变化	245
C. 能量守恒定律的发展史略	247
D. 动物代谢, 功和热力学第一定律	253
i) 分解代谢率, 热和功率的产生	253
ii) 氧的“卡价”	254
iii) 各种活动的耗氧量和分解代谢率 ——基础分解代谢	255
iv) 人体的机械功率输出和机械效率	256
E. 基础代谢	258
i) 哺乳动物的基础代谢率: 从小鼠到大象,	

哺乳动物生理学中的“定标”	258
ii) 人体不同器官所需要的能量, 心脏功, 呼吸功, 肾脏功	260
iii) 基础代谢率和甲状腺异常	265
5.5 转动	266
i) 转动刚体的动能	267
ii) 对转动刚体所做的功, 转矩, 角动量	267
iii) 复摆	269
参考及补充读物	272
习题	274
<b>6. 物理及生物系统中的反馈、     控制和稳定性</b>	280
6.1 引言	280
A. 热机、动力生产和自动控制	280
B. 自动控制科学简史	281
C. 力学和反馈及控制理论	284
6.2 一个自动控制下的机械系统: 蒸汽机和它的离心调速器	285
A. 蒸汽机运转的全过程描述	285
B. 无自动控制蒸汽机运转的数学模型	286
i) 汽机输出轴的运动方程	286
ii) 汽机的稳态运行转速. 汽压和负载 发生变化时的影响	287
iii) 汽机对汽压和负载力矩变化的 时间响应	289
C. 离心摆反馈控制蒸汽机运转的 定量分析	292
i) 蒸汽机(包括离心调速器在内) 的微分方程	292
ii) 汽压或负载矩变化引起的汽机转速的 稳态变化.“开环增益”	295
iii) 蒸汽机在比例反馈控制下对 汽压变化的时间响应	296
D. 蒸汽机反馈控制系统的不稳定性	299
i) 离心摆响应时间 $t_g$ 和汽机转速变化 的特性时间	299

ii) 不稳定性来源的定性讨论	300
iii) 反馈控制系统不稳定性的定量分析	300
a) 包括调速器延迟的运动方程	301
b) 用分段积分法求解	302
c) 用试解法求解	304
6.3 用反馈的温度控制	310
A. 无反馈受热(或冷却)系统的温度, 开环运转	310
i) 作为时间函数的系统温度方程	310
ii) 稳态工作温度	312
iii) 周围温度或输入功率变化所引起 的瞬态响应	313
B. 有反馈的受热(或冷却)系统的温度	313
i) 通-断控制系统	313
a) 通-断控制系统的温度变化方程	314
b) “通-时间”与“断-时间”	315
c) 占空比	316
ii) 比例控制系统	316
a) 比例控制系统的温度作为时间 函数的方程	317
b) 在整定温度(输入)或周围温度 (负载)变化的情况下, 受控 热浴的稳态工作温度	319
c) 比例控制热浴的暂态响应: 延迟和不稳定性	320
iii) 积分控制系统	321
6.4 体温的控制	323
A. 疾病和健康状态下的体温	323
B. 人体的热性质	323
C. 体温调节的控制基元	326
6.5 血糖浓度的控制	328
A. 引言. 糖耐量试验	328
B. 血糖浓度的控制方程	329
C. 理论与实测糖耐量曲线的比较	332
参考及补充读物	334
习题	335

# 第一章 运动学

## 1.1 引言

运动学是对运动的定量描述。就沿着空间某一轨道运动的质点来说，它能够精确地描述质点的位置、速度和加速度是如何随时间变化的。就物体来说，它能用数学描述物体在空中移动、滚动和旋转时的位置和取向。运动学精确地描述运动，而不涉及该运动的原因。运动学是力学的“解剖学”。

只要定量地知道了物体(无论是行星或是草履虫)的运动，我们即能揭示和感受造成这种运动的力。同样，生理学家也需要知道定量解剖学(形态测量学)，以便弄清器官功能的基础。

今天，作为我们教育的组成部分，很多人都相当了解微积分。在这个体制之中，就易于理解和运用运动学。但是，谁能想到在伽利略(Galileo Galilei, 1564—1642)的非凡发现之前，人类竟然认为对运动的定量描述是深奥莫测的谜！伽利略在运动学和天文学中的发现，甚至动摇了当时社会秩序的根基，是对知识统一的重大证明。他对教会变成一种威胁，并被判为宗教法庭的囚犯。对于感到当代科学是向现实社会挑战的人们来说，最好记住十七世纪的古人就曾有过相同之感。

运动不可知论不仅是中世纪欧洲黑暗年代的症状。就是卓越的古希腊哲学家和数学家，他们对于运动定量描述也深感困难。伊利亚(Elea)的芝诺(Zeno)佯谬是特别能说明问题的例子。在芝诺佯谬中最突出的一个是赛跑佯谬(它与熟知的阿奇力斯(Achillies)和龟的佯谬在本质上是相同的)。因为它说明了，即使在显而易见的定量分析中，由于匆忙地作出结论会怎样地导致错误，所以在这里详细叙述和弄清这个佯谬是有益的。这个佯谬的解答表明，直至推理的最终都要尽可能的定量是多么的重要。佯谬可以这样的表述：一个赛跑者因为必须首先跑完路程的一半( $1/2$ )，然后跑剩下路程的一半( $1/4$ )，再后又跑新剩下的那一段的一半，如此无穷，他就永远达不到跑道的终点。所谓“如此无穷”包含了这个佯谬的实质，因为它暗示了这样的观点，就是跑过无穷多的路段必须花费无穷多的时间。而借下面图形的帮助，可完全定量地把这个问题表达出来，困难的实质就能够揭示，佯谬很容易解决。

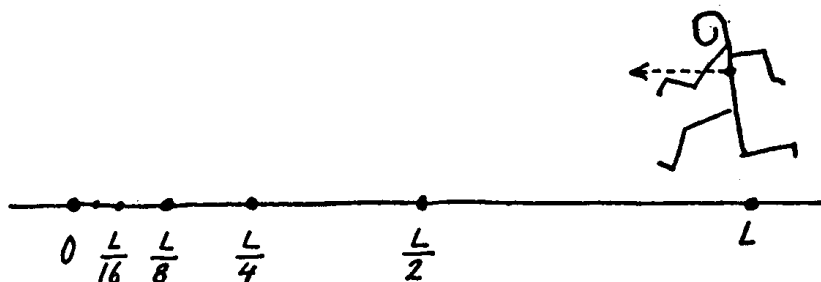


图 1.1-1

如赛跑者的速率为  $V$ ，跑道长度为  $L$ 。则到达跑道终点所需的时间  $T$ ，是经过各个相继半程

路标所需时间的总和。既然速率是每单位时间内通过的距离,则当速率不变时

$$T = \frac{\left(\frac{L}{2}\right)}{V} + \frac{\left(\frac{L}{4}\right)}{V} + \frac{\left(\frac{L}{8}\right)}{V} + \dots$$

$$T = \frac{L}{V} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right)$$

这里,明显地看到困难的实质已被揭示出来。古希腊人以为无限多个有限值的总和应该是无限的。虽然古希腊人的看法似乎有道理,但是即使现代的学童都懂得这种看法并不是普遍正确的。例如,和数  $S = 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + 0.00003 + \dots$  不仅是有限的,而且恰好等于  $1/3$ 。在赛跑者经历的全部时间的公式中,和数是绝对有限的,实际上正好等于 1。只要计算

$$S_n = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)$$

的任意有限项之和,就会承认这一点。如  $n=1, S_1 = \frac{1}{2}$ ;  $n=2, S_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$ ;  $n=3, S_3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{7}{8}$ ; 从而迅速查明,  $n$  项之和正好等于

$$S_n = \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right)$$

因此,在无限多项的情况下,  $S_\infty = 1$ , 得  $T = \left(\frac{L}{V}\right)$ 。这样,佯谬就被解决了。

由于我们知道如何处理无穷级数,所以解答起来是简单的。但是,对于古希腊人来说则不然,运动的数学描述对他们构成难于逾越的障碍。当然,如今借助微积分来解答这个问题就显得太简单了,以致使我们很难想象它会产生任何困难!

## 1.2 一维运动: 速度和加速度

### 速度

在质点沿一直线运动的情况下,质点的瞬时速度是其位置的时间变率。用微积分表示

$$v = \left[ \frac{dr}{dt} \right] \quad (1-1)$$

式中,  $r$  是质点的位置,  $t$  是时间,  $v$  是瞬时速度。

用微积分很容易解决跑道佯谬问题。

质点从  $r$  前进到  $r + \Delta r$  所需的时间是

$$\Delta t = \frac{\Delta r}{v}$$

从  $O$  到  $L$  跑完全程所需的时间,是通过各个小段距离所用时间之和,即

$$t = \sum \Delta t = \sum \frac{\Delta r}{v}$$

取极限时,  $\Delta t$  和  $\Delta r$  变为微分,有限的求和变为积分,则有

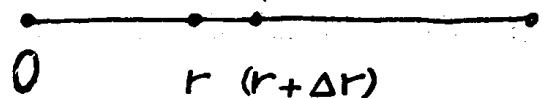


图 1.2-1

$$t = \int_{r=0}^{r=L} \frac{dr}{v}$$

当速度是个与质点位置无关的常数时, 积分很容易得出, 即

$$t = \frac{L}{v}$$

积分实际上直接给出了跑道问题中的无穷级数之和。质点移动某一距离的时间, 通常由积分公式

$$t = \int_{t=0}^{t=t} dt = \int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{v} \quad (1-2)$$

给出。式中  $t$  是所经过的时间,  $r_i$  和  $r_f$  是起点和终点的位置,  $v$  是速度; 为了计算积分, 速度沿路径的变化必须是已知的。另一方面, 当经历的时间和速度已知, 要求其通过的距离时, 就可引用速度的定义得到

$$(r_f - r_i) = \int_{r_i}^{r_f} dr = \int_{t=0}^{t=t} v dt \quad (1-3)$$

当然, 这里为了计算积分必须先知道速度与时间的函数关系。

在速度不变的这种简单情况下, 则得出下面的结果

$$(r_f - r_i) = vt \quad (1-4)$$

### 例题

以下几个简单的例子将会帮助我们弄清速度的应用和作用。

a) 如右图所示, 设有一小孩在秋千上缓慢地来回摆动。

令秋千的位置离开铅垂线的距离为  $r$ , 而  $r$  又是按正弦规律随时间变化的, 即

$$r(t) = r_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$$

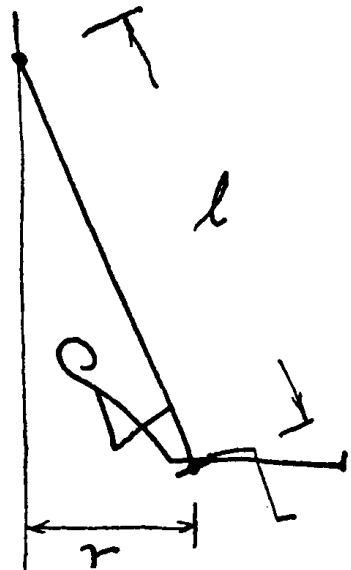


图 1.2-2

当  $t=0$  时, 位置  $r$  为零;  $t = \frac{T}{4}$  时, 秋千摆到最右端;  $t = \frac{T}{2}$ , 秋千返回原点;  $t = \frac{3T}{4}$ , 秋千摆到最左端;  $t=T$ , 秋千又回到  $r=0$ 。经过一个期间  $T$  后整个循环完成, 所以  $T$  称为运动的周期。

秋千的速度可以从定义  $v = \frac{dr}{dt}$  计算出来, 即

$$v = \left( \frac{2\pi r_0}{T} \right) \cos \left( \frac{2\pi t}{T} \right) \quad (1-5)$$

由此可见, 当秋千处于左边和右边的位移为最大时 ( $t = \frac{T}{4}$  或  $t = \frac{3T}{4}$ ), 它的速度为零。当秋千通过铅垂线位置时, 速率最大。最大速率与位移  $r_0$  成正比。为什么想保持秋千有速度感的孩子要有节奏地登秋千呢? 就是因为他们想借此增大振幅  $r_0$ 。最大速率还与周期  $T$  成反比。在本书的稍后我们将会看到, 周期与悬链长度  $l$  的平方根成正比。因此, 对于振动的给定振幅  $[r_0]$  来说, 悬链或绳的长度越短, 得到的最大速率就会越大。

b) 在上述的例子中, 物体的位置作为时间的函数是已知的, 我们算出了它的速度。但通常

速度是已知量,位置是未知量。这样,自然要问:如果事先不知道物体的作为时间函数的位置,怎样测量速度呢?所谓多普勒(Doppler)效应正是能够这样测量速率的一种方法。通过测量从运动物体散射或发射出来的声波(或光波)的“音调”或频率,就可求出该物体的速率,不管物体是火箭还是红细胞都可以。最简单而又最熟悉的例子是火车的汽笛声。如果火车静止时的汽笛频率为 $\nu_0$ ,那么,在铁道旁的侦察者测得的频率 $\nu$ 将不同于 $\nu_0$ ,两者之差与火车的速率 $v$ 有关。

汽笛表观频率的分数变化 $\frac{\nu-\nu_0}{\nu_0}$ 与火车速率的关系式为

$$\frac{\nu-\nu_0}{\nu_0} = \pm \frac{v}{c_s}$$

式中 $c_s$ 是声速。当火车的运动趋近侦察者时取“+”号,远离侦察者时取“-”号。

所谓多普勒雷达系统在跟踪飞机和火箭时,实际使用的就是这种测定速度的方法。在这种场合下采用的是微波。人们还利用,运动着的红细胞所散射的声波多普勒频移,来测量血流速率(见参考书4-7)。还可利用从视网膜中血流所散射的光波的多普勒频移,来研究那里的血流情况(参考书8)。

我们再设想,利用多普勒频移测量法,来确定一个离开车站正在加速的火车的速度。

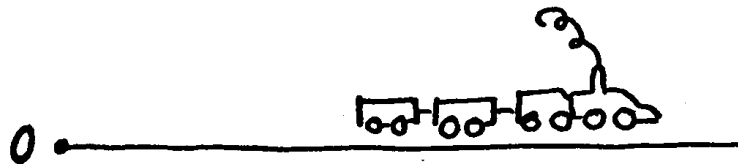


图 1.2-3

假定火车的最大速度为 $v_0$ ,并设它增加到该速率的过程中遵从下面的公式

$$v(t) = v_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}})$$

当 $t=0$ 时,速度为零。当 $t \rightarrow \infty$ 时,速度逼近于 $v_0$ 。参变量 $\tau_0$ 量度火车逼近最大速率所需的时间。例如,当 $t=\tau_0$ 时,火车达到最大速率的0.635倍;当 $t=2\tau_0$ 时,火车达到最大速率的0.865倍。我们用下面的图象来表示速度与时间的函数关系。

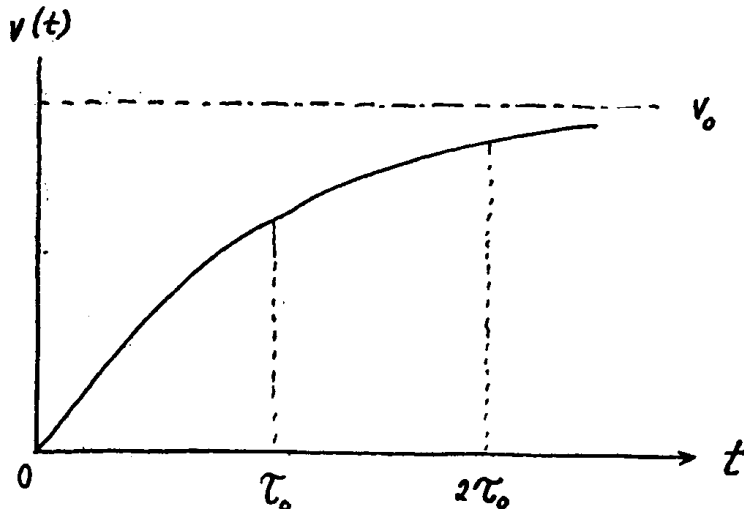


图 1.2-4



我们可以用下面的计算求出它的位置与时间的函数关系。因已知火车速度是

$$\left(\frac{dr}{dt}\right) = v_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}})$$

积分上式,可求出经过时间  $t'$  后火车的位置,即

$$\int_0^r dr = \int_0^{t'} dt v_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}})$$

完成积分,并代入上下限,则可得到

$$r(t') = v_0 t' - v_0 \tau_0 + v_0 \tau_0 e^{-\frac{t'}{\tau_0}}$$

全部数学运算就是这些。现在我们来看看它的物理意义。首先考查在短促的时间  $t' \ll \tau_0$  内,火车的位置与时间的关系。这时,可以把  $e^{-\frac{t'}{\tau_0}}$  近似写成

$$e^{-\frac{t'}{\tau_0}} = 1 - \frac{t'}{\tau_0} + \frac{1}{2} \frac{t'^2}{\tau_0^2} + \dots$$

如将此式代入上面的表达式,就可以看到,所有含  $t'$  和  $\tau_0$  的一次项相消。当  $t' \ll \tau_0$  时,火车的位置随时间的平方增加,实际上得到的

$$r(t') \cong \left[ \frac{v_0 \tau_0}{2} \right] \left[ \frac{t'}{\tau_0} \right]^2$$

可图示如右:

当  $t' \gg \tau_0$  时,火车的位置满足方程

$$r(t') \cong v_0 t' - v_0 \tau_0$$

这说明火车起动过程中移动得不很多,这距离与从一开始就一直具有最大速率  $v_0$  所能通过的距离相比,实际上少走了一段距离  $v_0 \tau_0$ 。下面我们用整个运动过程中的  $r(t)$  与时间的关系的图象把它表示出来。

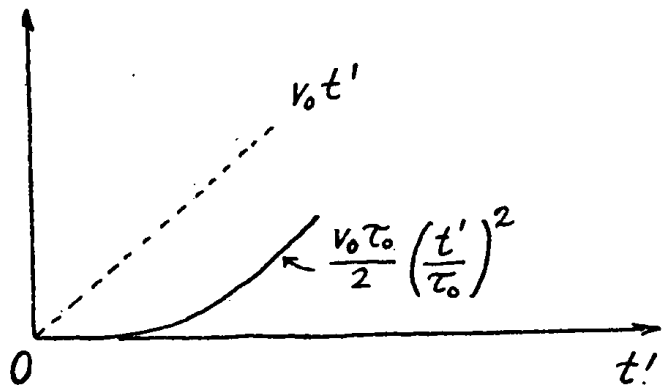


图 1.2-5

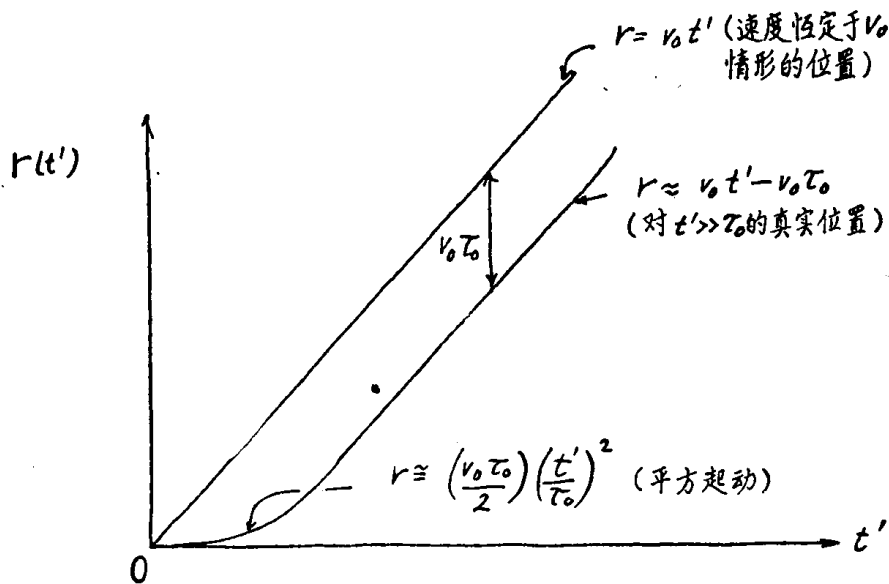


图 1.2-6

## 加速度

正如把速度定义为位置的时间变率一样，可以定义加速度  $a$  这一物理量为速度的时间变率，即

$$\text{加速度} = a = \left[ \frac{dv}{dt} \right]$$

在运动学中为什么需要加速度的概念呢？伽利略曾在他的落体运动的研究中作了部分回答。下面是引自伽利略的《两种新科学》(见参考书 1 和 10)的一段话。

“因此，当我观察原来静止的物体，从高处下落而速率不断获得新的增加时，为什么我们不能认为这种增加是以格外简单、而又为人们极易理解的方式发生的呢？现在如果仔细地考查这件事情，我们就会发现再也没有比总是重复等量附加或增加更为简单的了。”…“正如考虑和定义匀速运动时，用相等的时间间隔通过相等的距离一样(于是，在相等的时间间隔通过相等的距离的运动称为匀速运动)，我们也以类似的方式，按照相等的时间间隔来考虑，可以想象所发生的速度增加并不复杂。

所以，我们正要讨论的运动的定义可以陈述如下：

物体从静止出发，在相等的时间间隔内获得相等的速度增加的运动，称为匀加速运动。”

后来，伽利略进一步用实验证明了落体运动的确是匀加速运动。一个有趣的轶闻是，伽利略当时是用他自己的脉搏来测量时间的。

尚待牛顿(Isaac Newton, 1642—1727)解决的问题是阐明，为什么所有落体都具有相同的加速度，而与其重量无关。但是牛顿并不限于此，而是从更根本上证明了，作用在物体上的力决定该物体的加速度。所以，只要确定了作用在物体上的合力，就等于确定了该物体的加速度。然后，由加速度经过两次积分就能解出运动方程。就是说，通过对加速度表达式的一次积分来求得速度，再对速度的一次积分求得位置。每次积分要有一个积分常数。由此可见，一般说来，当加速度与时间的函数关系为已知时，若已知某时刻的位置和速度，就可求得位置和时间的函数关系。通常在  $t=0$ ，即运动初始时刻的位置和速度是已知的。

### 加速运动举例

最简单的加速运动的例子是伽利略考虑过的，即加速度不变的运动。我们就首先来考虑这种运动。设物体以初速  $v_0$  和初始位置  $r_0$  开始运动，并仍限于一维运动。可以通过对加速度和速度的表达式进行如下的极简单的积分，得出全部运动，对

$$a = \text{常数} = \left[ \frac{dv}{dt} \right] \quad (1-6)$$

积分一次，得出速度与时间的函数关系为

$$v(t) = v_0 + at \quad (1-7)$$

在利用这一方程时，特别要注意加速度和初速的符号。如果物体的加速度向右，而初速向左，则代入方程 1-7 时  $a$  和  $v_0$  取相反的符号。

利用速度与位置之间的关系  $v = \frac{dr}{dt}$ , 即

$$\left[ \frac{dr}{dt} \right] = v_0 + at \quad (1-8)$$

能够求得位置与时间的函数关系。积分 1-8 式得

$$r = r_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (1-9)$$

我们把含有时间的二次式配成完全平方, 就可以把这一结果变换成往往有益的形式。把式 1-9 改写成

$$r = r_0 + \frac{1}{2} a \left[ t^2 + \frac{2v_0}{a} t \right]$$

在式右边加、减一项  $\left[ \frac{v_0}{a} \right]^2 \left[ \frac{1}{2} a \right]$ , 配成完全平方, 则有

$$r = r_0 + \frac{1}{2} a \left[ t^2 + \frac{2v_0}{a} t + \left( \frac{v_0}{a} \right)^2 \right] - \frac{v_0^2}{2a}$$

或

$$r = r_0 - \frac{v_0^2}{2a} + \frac{1}{2} a \left[ t + \frac{v_0}{a} \right]^2 \quad (1-10)$$

只要想一想我们所熟悉的球体上抛运动, 就会轻而易举地理解这一结果的物理意义。球体在任一时刻的位置为  $r$ , 初始位置为  $r_0$ 。初速为  $v_0$ , 因球体上抛, 速度  $v_0$  取正号。而加速度向下, 则必须取负号。加速度用  $g$  表示, 以表明它是由于重力产生的。令  $a = -g$ , 正如伽利略首先发现的,  $g$  对一切落体都是相同的。在上述条件下, 球体每一时刻的高度遵循以下方程

$$(r - r_0) = -\frac{g}{2} \left[ t - \frac{v_0}{g} \right]^2 \quad (1-10')$$

式中

$$r_0' = r_0 + \frac{v_0^2}{2g}$$

如果我们以  $r$  为纵坐标,  $t$  为横坐标, 作  $r \sim t$  的函数图象, 则将得到下图所示的抛物线, 抛物线的极大值出现在  $t_{\max} = \left( \frac{v_0}{g} \right)$  和  $r_{\max} = r_0' = \left( r_0 + \frac{v_0^2}{2g} \right)$  处。可见, 在球体开始上升后, 速度一直在逐渐减慢。当  $t = \frac{v_0}{g}$  时, 速度为零, 球体高度则比初始位置高出  $\frac{v_0^2}{2g}$ 。此后, 球体下落不断加快。在  $r-t$  平面内, 整个轨迹为一抛物线, 它的形状确实与初速和初始位置无关。初速和初始位置仅决定抛

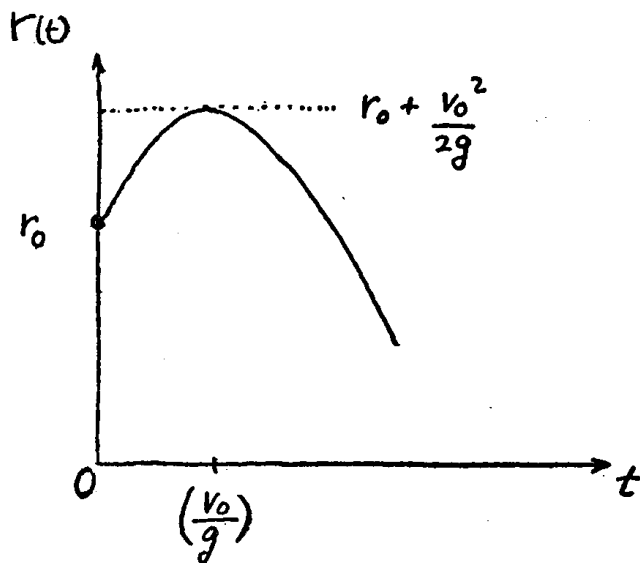


图 1.2-7

物线的极大(或极小)的位置\*。显然,如果球体的初速为零,则抛物线的极大值将在  $t=0$ ,  $r=r_0$  处,并且最大高度正好是在球体掉下时的位置。假如,球体最初向下抛出,则在  $r-t$  平面内抛物线的极大值将在负的时间  $t = \left(-\frac{v_0}{g}\right)$  处出现,球体将按该抛物线在  $t>0$  的半平面中的那一段路径下落。

变加速运动:一般说来,当加速度与时间的函数关系已知时,我们可以积分两次求出运动。在火车运动的例子中,火车的速度从  $v=0$ , 依照公式  $v=v_0[1-e^{-\frac{t}{\tau_0}}]$  渐次地增长到最终的数值  $v_0$ , 加速度

$$\left[\frac{dv}{dt}\right] = \frac{v_0}{\tau_0} e^{-\frac{t}{\tau_0}}$$

则是从一个大的数值开始,而后随时间依指数律下降到零。火车的运动在前面的讨论中已经计算过了。我们注意到,在这个例子中位置与时间的函数关系和  $t=0$  时的速度无关;而和  $t=\infty$  时的速度有关,这是颇为有趣的。

### 1.3 在二维和三维运动中的速度与加速度

在二维和三维中,一点的位置是用自某任选的原点至该点的矢量( $r$ )的长度和取向来表示的。在本章末的简短附录中,介绍了矢量的基本数学性质。这附录提供了本书所需的全部矢量代数基础。

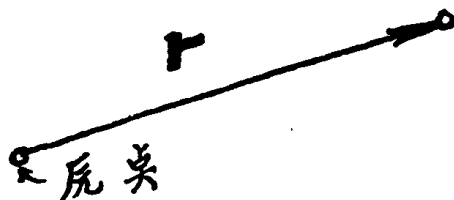
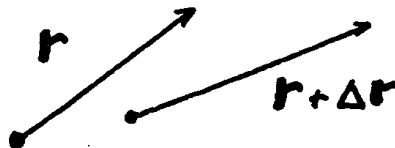


图 1.3-1

#### 速度

速度是位矢  $r$  的瞬时变率。速度本身是一个矢量,它的数值通常称为速率。在数学上速度用矢量方程

$$v = \left[\frac{dr}{dt}\right] \quad (1-11)$$



来定义。为了得到运动中某点速度矢量的大小和方向,原则上可如下进行。首先求得在时刻  $t$  的位矢  $r$ ,再求时刻  $t+\Delta t$  的位矢  $(r+\Delta r)$ 。取  $(r+\Delta r)$  和  $r$  之矢量差在  $\Delta t \rightarrow 0$  时的极限,即可求出速度矢量。这一过程用图示法表明如下:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta r}{\Delta t}\right] \quad (1-12)$$



图 1.3-2

#### 加速度

在二维和三维中的加速度,与一维中一样,是指速度的时间变率。但在多维情况下,必须计算速度矢量的时间变率。加速度本身又是一个具有大小和方向的矢量,即

$$a = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(v + \Delta v) - v}{\Delta t} \quad (1-13)$$

\* 极小值相应于  $r(t)$  坐标轴指向下方的情况。——校注

通过考查几个特例,我们可以更清楚地理解,在二维和三维中速度和加速度的意义。首先考察匀速圆周运动的情形:

### A. 匀速圆周运动

在匀速圆周运动情形,一个质点在圆周上以沿周缘不变的速率运动。

所谓沿周缘的速率不变,指的是弧长的时间变率不随时间改变,即

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta s}{\Delta t} \right] = \text{恒量}$$

因为在时间  $\Delta t$  内通过的弧长  $\Delta s$ ,与在同一时间内半径  $r_0$  转过的微小角度  $\Delta \theta$  有关,所以周缘速率不变与质点的角取向的时间变率不随时间而变的提法是等价的,即

$$\left[ \frac{ds}{dt} \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta s}{\Delta t} \right] = r_0 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \right] = r_0 \frac{d\theta}{dt} \quad (1-14)$$

量  $\left[ \frac{d\theta}{dt} \right]$  称为“角速度”,通常用  $\omega$  表示。它是指质点角(度)坐标的时间变率。例中的  $\omega$  在运动期间内总是不变的。现在,我们从下面的图形来求质点的瞬时速度矢量。图中指出了在短时间  $\Delta t$  内位矢  $r$  的变化。

速度则是

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{r_0 \Delta \theta}{\Delta t} \right] \quad (1-15)$$

因为矢量  $r$  的长度是  $r_0$ ,所以,当  $\Delta t \rightarrow 0$  时,弦  $\Delta r$  就变为圆的切线。这样,在匀速圆周运动中,每点的速度矢量都与圆相切,速度矢量的大小则是

$$|\mathbf{v}| = r_0 \left[ \frac{d\theta}{dt} \right] = r_0 \omega \quad (1-16)$$

式中的  $\omega$  即前面定义的角速度

$$\omega \equiv \left[ \frac{d\theta}{dt} \right] \quad (1-17)$$

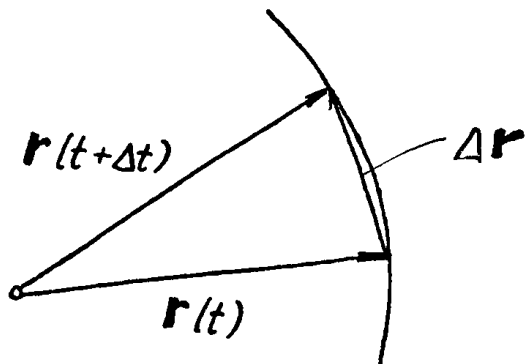


图 1.3-4

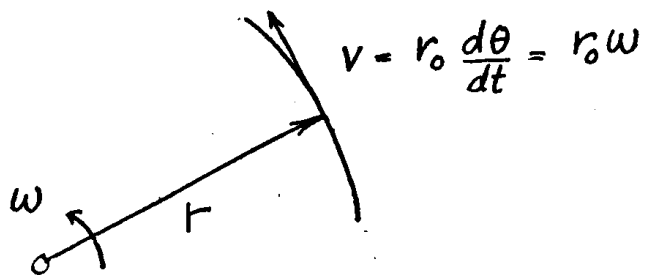


图 1.3-5

因此,每一时刻的速度矢量可以用图表示为具有长度  $r_0 \omega$  与圆相切的一个矢量。

现在，可以计算匀速圆周运动的加速度了。根据加速度的定义，我们必须计算  $\frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$ ，并求出这个矢量在取  $\Delta t \rightarrow 0$  的极限时的方向和大小。这一过程可借助于下图来完成：图中表示出在  $t$  和  $t+\Delta t$  时的速度矢量的大小相同，而速度的方向有了如图所示的变化。

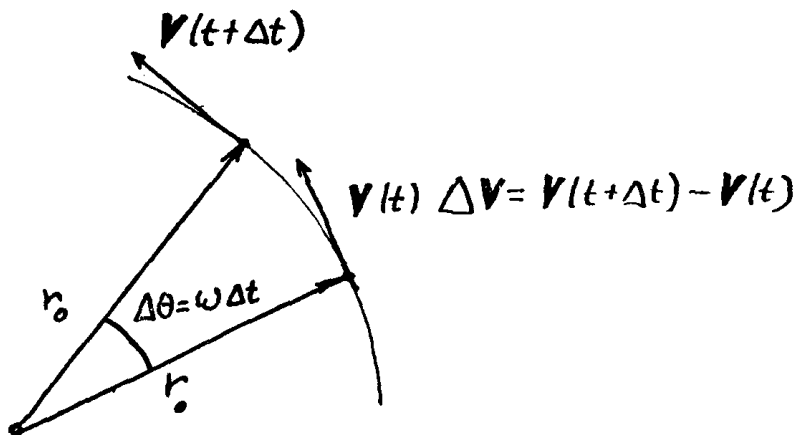


图 1.3-6

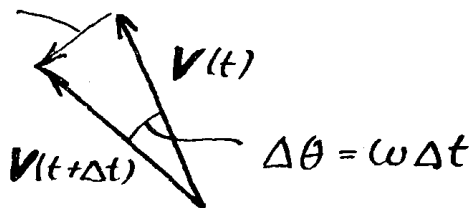


图 1.3-7

为了求得矢量  $v(t+\Delta t)$  和  $v(t)$  的差，我们把这两个矢量平移，并使它们的原点重合，两个矢量间的夹角为  $\Delta\theta$ 。

$$\left| \frac{\Delta v}{\Delta t} \right| = v \left[ \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right] \quad (1-18)$$

当然，取  $\Delta t \rightarrow 0$  时的极限，则  $\left[ \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right] = \omega$ ，即为角速度。加速度的大小是

$$|a| = v\omega \quad (1-19)$$

而任一时刻加速度的方向，从  $\Delta v$  的方向我们就看得出来，它总是沿径矢指向内的。因而，我们得出如下图所示的令人惊异的结果：一方面速度矢量始终与圆周相切，而另一方面加速度却是“向心的”或追求中心的，即在每一时刻加速度都指向圆周运动的中心。此结果示于下图

由于在匀速圆周运动中，速度的大小是  $r_0\omega$ ，所以  
我们也可把加速度的大小表示为

$$|a| = v\omega = r_0\omega^2 = \frac{v^2}{r_0} \quad (1-20)$$

在匀速圆周运动中的加速度指向圆心这一事实是由速度和加速度的矢量性得来的。虽然质点的速率不变，但速度的方向却持续不断地朝着圆心改变。对于在圆周运动中加速度或速度变化指向圆心这一事实的认识，是牛顿解释行星运动起源的核心。因为行星的加速度若是向心的，则必然有某种力把它拉向行星轨道中心。现在，我们知道这种力就是行星运动中作用在位于中心的太阳与每一行星之间的万有引力。由此可见，首先通晓某种运动的运动学，对发现引起该运动的力是多么重要！

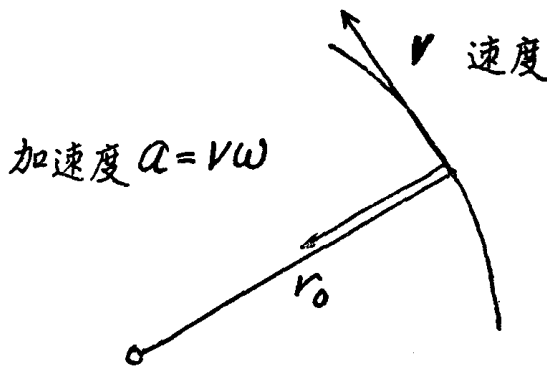


图 1.3-8

在这里我们不去研究较复杂的运动，如角速度不是恒量的圆周运动。关于用极坐标讨论一般运动中的速度和加速度矢量，可参考克莱普纳(Kleppner)教授的著作(参考书9)。这本著作中，是在有角速度  $\omega$ ，角加速度  $\left(\frac{d\omega}{dt}\right)$ ，径向速度  $\left(\frac{dr_0}{dt}\right)$  和径向加速度  $\left(\frac{d^2r_0}{dt^2}\right)$  的一般情况下计算加速度的。

### B. 抛体运动

伽利略的重大成就之一是，对抛体运动作出的正确的数学分析。由大炮发射出来的炮弹的飞行，从航船桅杆上落下的石块，或用时新的例子，如击球手击出的棒球和外场手投出的棒球等，都是抛体运动的例子。

抛体运动的主要数学内容是：(1)匀加速运动，和(2)初速度的指向不同于加速度的方向。分析抛体运动，可使我们了解运用矢量描述运动的必要性。不过，更为重要的是它能导出物理学中再三使用的有力的普遍概念；即“迭加”和“伽利略等效性”的概念。下面我们将解释这些术语的意义，并可以看到它们是怎样从抛体运动的分析中得出来的。通过分析初速度  $v_0$  是水平的，加速度  $g$  是铅直的抛体运动，就能够了解抛体运动的主要特征。为了列出表征这一运动的数学方程，必须分别知道在铅直方向和水平方向的位置是怎样随时间变化的。

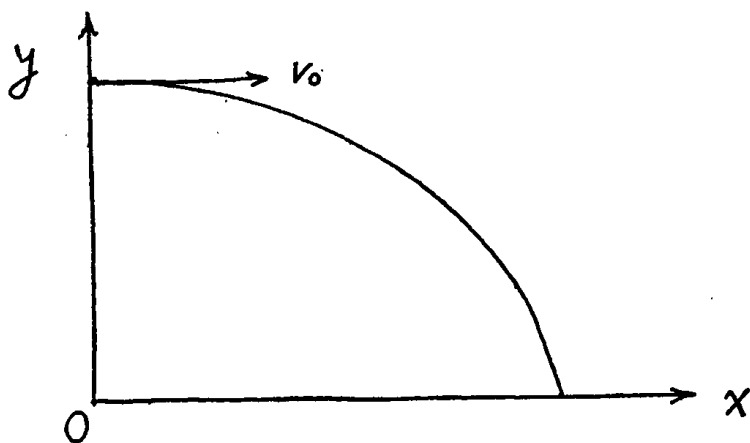


图 1.3-9

假如用实验方法测量物体落到地面( $y=0$ )的时间，我们就会发现，不管  $v_0$  的数值怎样，测得的时间总是相等的。即使质点用  $v_0=0$  铅直下降，它落到地面的时间，也与它以很大的水平速率  $v_0$  落到地面的时间相等。伽利略曾经这样写道<sup>1,10</sup>：

“若将一门加农大炮平放在塔顶上，并作近距离平射。尽管发射力的大小不同，致使炮弹有时落到一千码，有时落到四千码，有时落到一万码等不同距离的地方，可是所有这些炮弹落到地面的时间总是相同的。而且，每次射出炮弹落地的时间都等于炮弹不受冲击，仅是从炮口沿直线竖直掉下所经历的时间。这看起来是很奥妙的，比方说从一百码高度自炮口迅猛射出至四百码，一千码，甚或一万码远处落地的炮弹，与它铅直下落所用的时间同样短。在各次射击中，所有沿水平方向发射的炮弹在空中都持续了

相等的时间。”

于是伽利略领悟到,并且我们也看得出,运动的铅直分量是向下的匀加速运动。也很明显,铅直运动是“独立的”,或者说不受水平运动的影响。

现在可以探求水平运动是否受铅直运动影响的问题。若用实验方法研究物体的水平速率,就会发现它在整个运动过程中保持不变,并且等于初始的水平速度。因此,根据实验得出结论:事实上水平运动也是与铅直运动无关的。

整个运动仅仅是这两个独立运动的合成或“叠加”。“叠加原理”在物理学中多次出现。它能大大简化复杂问题,特别是波动问题,它使我们能够把复杂运动看做是独立的、没有相互作用的诸简单运动的叠加。

在本例中,铅直运动与水平运动的和是矢量和,而且事实上这正是我们用矢量表征位移、速度和加速度的原因。这些物理量的分量在进行加、减运算时,完全遵循矢量代数的规律。在列出抛体运动方程的严格形式时,这些物理事实都是我们所需要的。之后,就可以十分容易地计算轨道的精确形式。尽管立即计算是诱人的,我们还是暂时抑制一下,先看看这些必须的物理事实,实际上都能够从一个更普遍的原理——伽利略的等效性原理——推断出来。

设想飞机上的乘客掉落一枚硬币的运动。自然我们会相信,无论飞机是在静止还是以每小时六百英里的速度飞行,硬币落到机舱地板上所用的时间是相同的。同样我们也确信,不管飞机速度的大小,硬币总是落在同一地点。后者意味着,在硬币下落运动中,硬币的水平速度(从机舱外观察到的)保持不变。这些信念与前述推求抛射体运动方程时所需要的实验事实完全一致。如果伽利略等效性原理是正确的话,那么这些信念实际上是正确的。伽利略原理可以叙述如下:“只要两个坐标系相互作用匀速运动,则在某一坐标系内对一物体进行的任何力学实验,会与在另一坐标系内对同一物体进行的实验得出相同的结果。”

象这样普遍的考虑就是运动学与动力学的那个非常重要的基础。这类等效性原理和运动坐标之间运动方程的变换定律,曾导致爱因斯坦(Einstein)建立起他的相对论,并且仍然是对实验结果进行综合与简化的有力思考方法,这正是物理学的核心。

现在,我们可以写出抛射体的运动方程。因为铅直( $y$ )运动是一个匀加速( $-g$ )下落的运动,可知 $y$ 方向的速度分量( $v_y$ )遵守以下方程

$$\frac{dv_y}{dt} = -g \quad (1-21)$$

在水平速度不发生变化的情况下,水平运动的方程应是

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \quad (1-22)$$

把上面的两个方程各积分两次,需要四个初始条件:令 $x=0, y=y_0$ 分别为初始的 $x$ 坐标和 $y$ 坐标;令 $v_{0x}$ 和 $v_{0y}$ 分别为初速度的 $x$ 分量和 $y$ 分量。应当注意,为了能够求得比初速度是水平的特殊情况更加普遍的结果,可假设初速度的 $y$ 分量不等于零。图1.3-10示出了初始条件。

现在,我们可以根据各自的初始条件解方程式1-21和1-22,以得出位置( $x, y$ )与时间的函



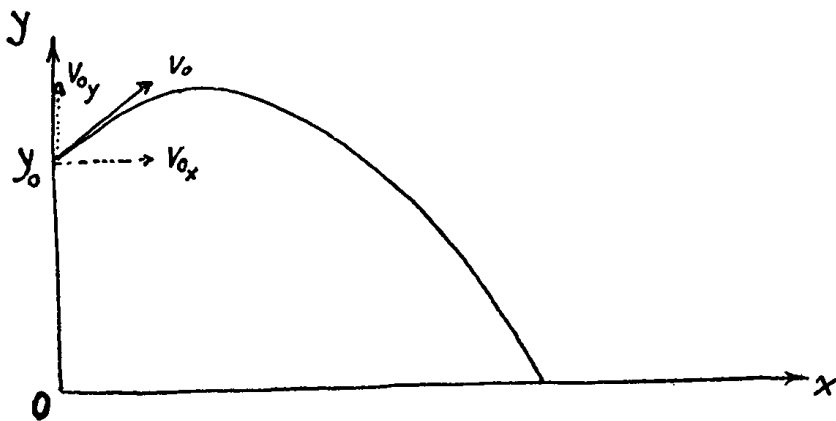


图 1.3-10

数关系。也可以从两个方程中消去时间，而得出抛射体经历的轨道的形状，即  $y(x)$ 。

事实上，我们已经积分过与式 1-21 等同的方程，因为这是与一维匀加速运动一样的。我们在式 1-8 和 1-9 中就曾积分过，这里，改用现在的符号，积分 1-21 式得出  $v_y(t)$  和  $y(t)$  的结果如下

$$v_y(t) = v_{0y} - gt \quad (1-23)$$

和

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1-24)$$

将  $t$  的二次式配成完全平方，则得

$$y(t) = y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g} - \frac{g}{2} \left[ t - \frac{v_{0y}}{g} \right]^2 \quad (1-25)$$

$x$  方向的运动是

$$v_x(t) = v_{0x} \quad (1-26)$$

和

$$x(t) = v_{0x}t \quad (1-27)$$

式 1-25 和 1-27 分别给出抛射体的坐标  $x$  和  $y$  与时间的关系。在许多情况中，更感兴趣的是知道抛射体的真实路径，而不管通过路程的时间。只要联立方程 1-27 和 1-25，消去时间，就能做到这一点。把从 1-27 得出的  $t = \frac{x}{v_{0x}}$  代入式 1-25，便得到

$$y = \left[ y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g} \right] - \frac{g}{2v_{0x}^2} \left[ x - \left( \frac{v_{0x}v_{0y}}{g} \right) \right]^2 \quad (1-28)$$

从这个方程可以看出抛射体的路径是一个抛物线。抛物线的最大值出现在

$$(x)_{\max} = \left[ \frac{v_{0x}v_{0y}}{g} \right] \quad (1-29)$$

$$(y)_{\max} = y_0 + \left[ \frac{v_{0y}^2}{2g} \right] \quad (1-30)$$

抛射体通过地面的总距离，是当  $y=0$  时所求出的  $x$  值。为了方便起见，我们考虑抛射体从地面 ( $y_0=0$ ) 发出的情况，于是就能够很容易地从式 1-28 计算出它所经历的总距离