计算机科学中的逻辑学

王元元 编著

科学出版社

内 容 简 介

本书介绍了数理逻辑的基本内容和针对计算机的应用而发展出来的各种逻辑——模态逻辑、时态逻辑、动态逻辑、模糊逻辑、非单调逻辑等，并介绍了λ-演算和组合逻辑．全书除第十一章外，均附有一定数量的习题．

本书特别适合计算机专业有关人员，内容丰富，且深入浅出，可作为计算机各专业本科生、研究生数理逻辑课程的教材或教学参考书，亦可供计算机科学工作者参考．阅读本书时，要求读者具有集合论的基础知识．

计算机科学中的逻辑学

王元元 编著

责任编辑 刘晓融

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1989 年 9 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1989 年 9 月第一次印刷 印张：14 1/4

印数：0001—3,200 字数：370,000

ISBN 7-03-001067-1/TP · 70

定价：9.60 元

序　　言

电子数字计算机与数理逻辑具有非常密切的关系．正是在数理逻辑中，把人类的推理过程分解成一些非常简单原始的、非常机械的动作，才使得用机器代替人类推理的设想有了实现的可能．随着电子技术的发展，出现了电子数字计算机．在使用电子计算机时，必须先进行程序设计，把整个推理、计算的过程，丝毫不漏地考虑到，统统编入程序，而机器则依此而运行；如稍有错误，将立即得到毫无意义的错误结果．可见，必须有足够的数理逻辑训练，熟悉推理过程的全部细节，才能从事程序设计．此外，程序设计是一个很细致而又很麻烦的工作，如何设计正确的程序，如何防止在计算过程中出现错误，如何很快地发现这种错误而及时加以改正，都是程序设计理论（软件理论）中的非常根本而又非常重要的内容．大家都认为，这些内容都与数理逻辑息息相关．事实上，它们或者就是数理逻辑，或者是用计算机语言书写的数理逻辑，或者是数理逻辑在计算机上的应用．戴克斯特拉所说的一段话（见本书前言所引），可以说代表了软件理论家的肺腑之言，也道出了数理逻辑与计算机的密切关系．

通常把计算机中用到的数理逻辑（以及别的一些数学理论）放在离散数学中，但其中写得极少，很难满足计算机工作者的需要．《计算机科学中的逻辑学》一书，不但详细地叙述了数理逻辑的基本内容，而且详细地介绍了针对计算机的应用而发展出来的各种逻辑（通常叫做非经典逻辑）——模态逻辑、时态逻辑、动态逻辑、模糊逻辑、非单调逻辑等等，其中虽然有些是最新的发展，它们在计算机上的作用及理论本身还未有定论，但是读者知道这么多的新内容后，对计算机科学肯定会有进一步的了解，而有助于对计算机科学技术的研究．

相信《计算机科学中的逻辑学》一书将对我国计算机科学理论做出有益的贡献．值本书出版之际，特志数语以作介绍．

莫绍揆

1988年3月

前　言

近年来，数理逻辑在计算机科学中的重要地位已经被广大计算机工作者所认识．著名的计算机软件大师戴克斯特拉（E. W. Dijkstra）曾经这样说："我现在年纪大了，搞了这么多年软件，错误不知犯了多少，现在觉悟了．我想，假如我早年在数理逻辑上好好下点功夫的话，我就不会犯这么多的错误．不少东西逻辑学家早就说了，可我不知道．要是我能年轻20岁的话，就要回去学逻辑．"[1] 因此，在计算机科学界加强数理逻辑知识的普及与应用，无疑是十分重要的．

但是，许多从事计算机科学基础理论教学的同志都有这样一种感觉，目前缺乏比较适当的教材，以满足计算机各专业的本科生、研究生及从事理论研究、实际工作的计算机科学技术人员学习数理逻辑基本知识的迫切需要．现有的包含数理逻辑初步知识的离散数学课程，由于只能容纳大体20学时的数理逻辑教学内容，因而显然不能适应上述情形．现有的数理逻辑专门教材，大多适合于数学专业或数理逻辑专业，就其深度而言，恐怕过于艰难；就其广度而言，似乎又有些不够，因为它们通常不涉及非经典的逻辑系统，而这些系统在计算机科学中有着广泛的应用；它们更不讨论数理逻辑与计算机科学之间的联系．

本书的写作正是受了上述这种感觉的驱使，希望它能成为计算机各专业本科生、研究生的数理逻辑课程的教材或教学参考书，并为计算机工作者开拓理论基础提供一个自学用的简明读本．

书名中的"逻辑学"显然是指数理逻辑（又称现代逻辑学）．对"数理逻辑"的理解通常有两种．一种是狭义的理解，它指"数理逻辑基础"，即所谓两个演算（命题演算与一阶谓词演算）以及其它一些有关的逻辑系统；另一种是广义的理解，它指数学的一个分支，

包括数理逻辑基础及建基于它的“公理化集合论”，“证明论”，“递归论”(又称可计算性理论)，“模型论”. 本书对“数理逻辑”一词取狭义的理解，但又比狭义的理解更为广泛些. 在我们这里，数理逻辑不仅指两个演算及有关的经典的逻辑系统，还指那些所谓的非经典的逻辑系统.

全书是这样组织的:

为了全书有一个比较统一的说法，以介绍众多的逻辑演算系统，并适当地强调形式系统的基本思想及形式化的基本方法，第一章用来介绍形式系统的语构、语义及其关系. 作为例子，在这一章里引入了“命题演算形式系统”，完成对命题演算的讨论.

全书以一阶谓词演算及其在计算机科学中的应用为中心(包括第二章、第三章、第四章和第五章)，把其它逻辑演算系统看作为一阶谓词演算系统的扩充和归约.

有人把一阶谓词演算的扩充分为两类，一类是从语构的角度加以扩充，例如引入二阶量词、谓词变元和函数变元的二阶谓词演算系统(第六章)，引入模态词的模态逻辑系统(第七章)、时态逻辑系统(第八章)和动态逻辑系统(第九章). 另一类则是从语义的角度加以扩充，例如扩充真值意义的多值逻辑与模糊逻辑(第十章). 这种分法不无道理，因此本书在章次的编排时借鉴了这一点. 由于非单调逻辑的研究尚未定论，我们将它作为最后一种扩充放在第十一章里介绍. 最后一章“λ-演算与组合逻辑”可以算作是一阶谓词演算系统的归约.

由于本书在许多地方使用了集合论的概念、术语及记号，因此要求读者有集合论基础知识. 如果读者已预修“离散数学”课程，那么阅读和学习本书会更容易些. 作为教材，本书可以在80学时内全部讲授完毕. 第十一章和第十二章可供选择，或略去不讲，或作为讲座资料. 除第十一章外，各章均备有一定数量的习题.

莫绍揆教授在本书编写中给予了许多支持与帮助，特意为本书撰写了序言，并对一些章节提出了宝贵的修改意见. 为此，作者谨向他表示深切的谢意.

南京大学吕义忠教授详细地审阅了全部书稿，并提出了极有价值的修改意见，作者谨向他表示由衷的感谢。

由于作者水平所限，本书中缺点错误在所难免，希望读者多多指正。

作　者

1988年2月15日于南京

目　录

第一章 形式系统概论

形式化（formalization）是现代逻辑学的基本特征，**形式系统**（formal system）是现代逻辑学的重要工具。因此可以说，形式化方法和形式系统是现代逻辑学的一个组成部分。

简单地说，形式化实质上就是一个算法[2]，即一个可机械地实现的过程，用于将概念、断言、事实、规则、推演乃至整个被描述系统表述得严密、精确而又无需任何专门的知识即可被毫无歧义地感知。形式系统是理论系统或实际系统形式化的产物，在这种系统中所进行的推演均可被机械地测试，以确定它们是否是正确的。

形式化、形式系统这两个逻辑学术语，一直也是计算机科学界的时髦话题。无疑，对于计算机科学技术的发展，形式化方法和形式系统始终有着巨大的影响。正是对计算这一概念的形式化研究，导致了第一个计算模型——图灵机（Turing machine）的诞生[3]，它被公认为现代计算机的祖先；一阶谓词演算形式系统为知识的形式表示及定理的机器证明铺平了道路[4]；λ-演算系统为第一个人工智能语言 LISP[5] 奠定了基础；而证实这种影响的又一有力证据是，很受一些人青睐、甚至被他们推举为第五代计算机程序设计语言的 PROLOG[6]，就是一个典型的符号逻辑形式系统。

本书旨在介绍在计算机科学中有着广泛应用的数理逻辑形式系统，它们是逻辑学理论的形式化产物，包括经典的命题演算系统和一阶谓词演算系统，还包括它们的经典的或非经典的扩充和归约。为此，我们先用一章的篇幅，对形式系统概念作一个扼要的描述，作为全书的一个导引，以期展示出形式化方法和形式系统的基本内容和基本思想，为今后各章对诸形式系统的讨论提供必要的准备。

1.1 从公理系统到形式系统

由于等腰直角三角形的斜边与直角边不可通约这一事实被发现，公元前五世纪，古希腊的一些数学家便把注意力从数学计算转移到数学推理上来。他们感到，经验不是绝对可靠的，接受未经证明的事实是危险的，正如他们的前人凭经验错误地接受"一切数可表示为整数的比"所显示的那样。于是，他们开始只从一些最简单的概念出发，只承认一些再显然不过的事实，只使用极少数逻辑规则进行数学推演。这种小心翼翼的做法，酝酿着一个正确的思想——公理化思想。不久，第一个数学公理化系统在欧几里德（Euclid）的《几何原本》中出现了。从此，**公理系统**（axiomatic system）成为数学研究的有力工具。

欧氏几何的公理系统，从点、直线、平面等不加定义的原始概念（primitive concepts）出发，定义另外一些更为复杂的概念，例如，平行线、三角形、平行四边形等等。它接受一些所谓自明的事实作为公理（axioms）不予证明，例如"两点确定一条直线"。它运用很少几条逻辑推理规则，例如"三段论"，推演出平面几何学的全部定理，这些逻辑推理规则也被认为是毋庸置疑的。

在欧氏几何中，原始概念正是现实世界中最简单的空间形态的刻划，公理和逻辑推理规则也是人们的直觉所意识到的正确的客观事实和思维规律的总结，因而系统推演所得的定理继承了它们的客观性和正确性。欧氏几何公理系统中的所有概念都有鲜明的直观背景，其公理、定理也都有强烈的客观意义，它们的真理性常可在实践中得到验证。象欧氏几何这样的公理系统，常被称为**具体公理系统**（concrete axiomatic systems）。

由于非欧几何的出现，人们感到具体公理系统过于受直觉的局限，因为他们看到，与直觉似乎相悖的罗巴契夫斯基（Лобачевский）平行公理（过直线外一点至少可作两条直线与已知直线平行），同欧氏几何公理（除平行公理以外的公理）并不冲突，并且由

它们组成的公理系统上建立起来的罗巴契夫斯基几何(一种非欧几何)有同欧氏几何一样雄辩的正确性,也有令人信服的物理解释和实际应用.因而,上一世纪末和本世纪初,一些杰出的数学家、数理逻辑学家开始了**抽象公理系统** (abstract axiomatic system) 和形式系统的研究. 在抽象公理系统中, 原始概念没有任何直觉意义,甚至没有任何预先设定的意义. 不加证明而接受的断言,即公理,也无需以任何实际意义为背景,它们无非是一些约定, 约定系统一开始便要接受为定理的是哪些语句. 对原始概念和公理, 人们可能不知所云,唯一可识别的是它们的表述形式,这也是它们唯一有意义的东西. 希尔伯特 (Hilbert) 的《几何基础》给出了一个抽象公理系统, 欧氏几何可以说是这个系统的一种解释. 在那本书里,希尔伯特称"我们必须能够不用点、线、面, 而说桌子、椅子、啤酒杯",以此强调,几何的空间形态的意义在这里已经消失,它们不再是公理系统的依托;概念的涵义全部由公理的形式来赋予,系统内的定理完全被公理的形式和允许使用的逻辑推理规则所决定,几何直觉在此毫无立足之地. 例如,可以用(两个集合) L 和 P 表示两个原始概念(相应于直线和点的概念),用(由 L 到 P 的一个二元关系) R 表示另一个原始概念(相应于某直线过某点的概念). 当然, 这里的术语"集合"、"关系"等的引入只是为了叙述的可读性,并非抽象公理系统中的东西. 现在,公理"两点确定一条直线"可表述为没有任何直观可言的抽象符号串(借助一阶谓词演算符号)

$$\forall x \forall y(x \in P \wedge y \in P \rightarrow \exists! l(l \in L \wedge lRx \wedge lRy))$$

即, 对 P 中任意 x, y, 有且仅有 L 中 l, 使 l 与 x, y 同时有 R 关系.

当然,抽象公理系统的提出往往是有客观背景的,常常是因为现实世界的某些对象及其性质需要精确地刻划. 但是, 抽象公理系统一旦建成,它便应当是超脱客观背景的,它可刻划的对象已不限于原来考虑的那些对象, 而是与它们有着共同结构的相当广泛的一类对象. 因此, 对一个抽象公理系统, 一般可以有多种解释.

例如布尔代数抽象公理系统，可以解释为有关命题真值研究的命题代数，有关电路设计研究的开关代数，也可以解释为讨论集合运算的集合代数。在这些不同的解释里，抽象符号客体 x 分别被看作“命题 x”，“电路 x”，“集合 x”等，抽象符号客体 0 和 1 分别被看作“假和真”，“闭和开”，“空集和全集”。

应当指出，即使是在抽象公理系统中，仍然保留着直觉的成分，因为在这类系统的定理推演中，所使用的逻辑规则仍然是非形式的。这些规则之所以被运用，是由于它们在直觉上被认为是正确的，对它们的理解及运用方式都取决于人的直觉，而不是取决于规则的形式。如果将这一最后的直觉成分也剔除，我们就得到所谓形式系统。在形式系统中，用于推演的逻辑规则也是形式地表述的，称为推理规则（inference rules）。同公理一样，推理规则的使用方式及使用结果，都完全取决于这些规则的形式，与逻辑直觉及人们对这些规则的意义所持的认识没有任何关系。

形式系统常用符号语言来表达（representation）。这一过程一旦完成，系统便和一切实际意义、甚至逻辑都毫不相干，留下的只是这种语言中的符号（symbols）——一种只作整体认读的记号（signs）、符号串（symbol strings）以及符号串的重写规则。对象、概念、运算等用符号和符号串来表示，公理只是特定的符号串，而推理规则正是符号串的重写规则，系统内的推演也只是对给定符号串的一系列重写而已。这里，决定一切的是符号、符号串及重写规则的形式。公理的识别、系统内的推演都可以依据公理及推理规则的形式机械地完成，不需要比认读和改写符号及符号串更多的本领和知识，甚至不需要逻辑。不难想象，具有这种特性的形式系统还可用于逻辑学的形式化，而不必担心产生“循环”。当然，也只有具有这种特性的形式系统，才是毫无“悟性”的机器可以接受的。

本书要讨论的正是关于逻辑学的形式系统。弗雷格（Frege）在他的著作《符号论》中给出了第一个这样的形式系统——一阶谓词演算系统。因此，他被誉为现代逻辑学的创始人之一。

1.2 形式系统的定义

从公理系统到形式系统的发展演变过程，我们已经可以看到形式系统的轮廓。扼要地说，用符号语言表达的形式系统是一个符号体系，它由两大部分组成。第一部分是符号体系的组成部分，包括语言所使用的符号表及各类符号串的形成规则。这一部分也称为形式系统的语言部分。第二部分是符号体系的推演部分，称为理论部分，包括称为公理的符号串集合，称为推理规则的符号串重写规则集合，以及由它们重写生成的被称为定理（theorems）的那些符号串集合。更严谨一些，我们可以如下定义形式系统。

定义 1.1. 一个形式系统 FS 由以下五个部分组成：

(1) 非空集合 Σ，称为 FS 的**符号表**（alphabet），其元素称为**符号**。

(2) Σ 上全体字的集合 Σ^* 的一个子集 TERM，其元素称为 FS 的**项**（terms），TERM 有子集 VARIABLE，其元素称为**变元**（variables）。

(3) Σ^* 的一个子集 FORMULA，其元素称为 FS 的**公式**（formulas）。FORMULA 有子集 ATOM，其元素称为**原子公式**（atomic formulas）。

公式集与项集不交，即 $\mathrm{TERM} \cap \mathrm{FORMULA} = \phi$，而项和公式常统称为**表达式**（expressions）。

(4) FORMULA 的一个子集 AXIOM，其元素称为 FS 的**公理**。

(5) FORMULA 上的 n 元关系的集合 RULE，即

$$\mathrm{RULE} = \{r \mid \exists n(n\text{是正整数} \wedge n \geqslant 2 \wedge r \subseteq \mathrm{FORMULA}^n)\}$$

其元素称为 FS 的**推理规则**。这里 $\mathrm{FORMULA}^n$ 表示笛卡儿积 $\underbrace{\mathrm{FORMULA} \times \mathrm{FORMULA} \times \cdots \times \mathrm{FORMULA}}_{n\text{个}}$.