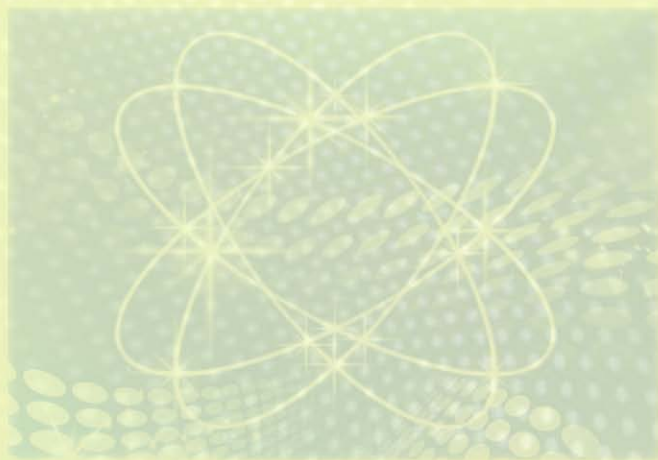


高等数学辅导与习题选解



前 言

世界在变,自然在变。高等数学是研究变量变化过程中相互依赖关系的学科,它是现代科学研究与工程设计的基础。阿基米德、牛顿、高斯、欧拉、拉格朗日……在自然科学诸多领域作出了卓绝的贡献,正是因为他们也是数学家。数学是打开机会的钥匙。现代青年为追求卓越、振兴中华,必须学好高等数学。因此,陕西省教育厅组织西安交通大学、西安电子科技大学、西安工业大学、西安建筑科技大学教师和西北大学出版社,为应用型理工类本科生编写、出版了《高等数学(理工类)》,省内外不少院校采用了该课本。本书就是应广大师生强烈要求,为该课本编写的辅导教材。

编者认为,要学好数学,必须引导学生认真阅读教材,深刻理解、牢固掌握基本概念、基本理论、基本算法。所以,各章首先列出了内容提要。学生应根据基本要求和自己的情况,确定自己的难点与学习重点,及时看书、研讨、答疑。针对学生常见的疑问与错误,本书作了解答。这些解答不可能涵盖全部问题,建议读者自己多思考、多看书、多询问。对于作业中出现的错误,尤其应当反思其原因。为帮助读者深入理解、牢固掌握基本概念、理论与算法,本书还补充了一些典型例题。希望读者看到,解决问题的途径多种多样;通过猜测、类比、抽象、运算、推理、优化,常能证明或推翻预期的结论。这就是数学思维的神奇力量。

众所周知,要学会游泳,必须下水锻炼。同样,要学好数学,也必须自己动脑、动手多做练习。行成于思而毁于随,业精于勤而荒于嬉。我们反对抄袭现成的答案。只有通过自己的思考、运算和论述,才有可能学会数学的思维和表达方法,真正把握打开机会的钥匙。我们也赞成对遭遇困难的人扶助一把,对迷失道路的人指引方向。所以,对课本中一些较难或易错的题目,本书作了解答。希望读者看过后,反思自己不会做或做错的原因,吸取教训,自己动手做好习题。达朗贝尔说过:前进就会产生信念。当你一步步学会独立完成作业,独自解决许多问题的时候,你一定会自信,我也可以成为有益于社会的人。

本书主编为李广民、邓建中教授,副主编为陈慧婵、任春丽副教授。各章编写

人员分别为邓建中、陈慧婵、任春丽、李花妮、程红萍、伊晓玲、黄小平、翟美娟、王艳、宋丽平。他们分属西安电子科技大学、西安交通大学、西安工业大学、西安建筑科技大学等。他们都很有教学经验,多是教授、副教授、数学教研室主任。但由于时间仓促,水平有限,缺点与错误一定不少,恳请读者批评指正。

编 者

2009年5月

目 录

第一章 函数与极限	1
一、内容提要	1
二、问题答疑	4
三、经典题型	7
四、习题选解	17
第二章 导数与微分	32
一、内容提要	32
二、问题答疑	33
三、经典题型	34
四、习题选解	38
第三章 微分中值定理及导数的应用	53
一、内容提要	53
二、问题答疑	55
三、经典题型	58
四、习题选解	66
第四章 不定积分	70
一、内容提要	72
二、问题答疑	73
三、经典题型	76
四、习题选解	84
第五章 定积分	95
一、内容提要	95
二、问题答疑	99
三、经典题型	102
四、习题选解	118
第六章 向量代数与空间解析几何	133

一、内容提要	133
二、问题答疑	136
三、经典题型	139
四、习题选解	145
第七章 多元函数微分法及其应用	159
一、内容提要	159
二、问题答疑	162
三、经典题型	170
四、习题选解	178
第八章 重积分	201
一、内容提要	201
二、问题答疑	204
三、经典题型	206
四、习题选解	213
第九章 曲线积分与曲面积分	227
一、内容提要	227
二、问题答疑	230
三、经典题型	240
四、习题选解	250
第十章 微分方程	277
一、内容提要	277
二、问题答疑	279
三、经典题型	281
四、习题选解	287
第十一章 无穷级数	310
一、内容提要	310
二、问题答疑	313
三、经典题型	315
四、习题选解	324
附录 I 部分院校期末考题	343

第一章 函数与极限

一、内容提要

1. 函数的定义

名称	定 义	记 号
函数	设 x 和 y 是两个变量, D 是数集, 若对于每个数 $x \in D$, 按照一定的对应法则 f , 总存在唯一确定的实数 y 与之对应, 则称 y 为 x 的函数.	$y = f(x), x \in D, D$ 为定义域, $W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 为值域
基本初等函数	幂函数 $y = x^a, x \in (0, +\infty)$ (a 是实数)	
	指数函数 $y = a^x, x \in (-\infty, +\infty)$ ($a > 0, a \neq 1$) 特别 $y = e^x, x \in (-\infty, +\infty)$	
	对数函数 $y = \log_a x, x \in (0, +\infty)$ ($a > 0, a \neq 1$) 特别 $y = \ln x, x \in (0, +\infty)$	
	三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x,$ $y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$	
	反三角函数 $y = \arcsin x, x \in [-1, 1]; y = \arccos x, x \in [-1, 1];$ $y = \arctan x, x \in (-\infty, +\infty), y = \operatorname{arccot} x, x \in (-\infty, +\infty)$	
初等函数	由上述五类基本初等函数经过有限次的四则运算及复合而成的函数.	非初等函数的例子: $y = \operatorname{sgn} x$ $= \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

2. 函数的性态

$y = f(x)$	定义域	定 义	例
单调增(减)	(a, b)	$\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, 且 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$)	$y = x^3, x \in (-\infty, +\infty)$ $y = \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$
有界性	(a, b)	$\exists M > 0, \forall x \in (a, b)$, 有 $ f(x) \leq M$	$y = \frac{1}{x^2}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ $y = \sin x, x \in (-\infty, +\infty)$
奇(偶)性	$(-l, +l)$	$\forall x \in (-l, +l)$ $f(-x) = -f(x)$ ($f(-x) = f(x)$)	$y = \sin x + \tan x, x \in (-\infty, +\infty)$ $y = \sin^2 x + \cos x, x \in (-\infty, +\infty)$
周期性	$(-\infty, +\infty)$	$\exists T > 0$, $f(x+T) = f(x)$	$y = \cos x, T = 2\pi$

3. 函数极限的定义

函 数	自变量变化过程	自变量变到一定阶段	因变量与 A 任意接近	记 号
数列 $x_n = f(n)$	$n \rightarrow \infty$	$n > N$	$ x_n - A < \epsilon$	$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$
函数 $y = f(x)$	$x \rightarrow x_0$	$0 < x - x_0 < \delta$	$ f(x) - A < \epsilon$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$
	单侧	$x \rightarrow x_0^-$	$0 < x_0 - x < \delta$	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$
		$x \rightarrow x_0^+$	$0 < x - x_0 < \delta$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$
	$x \rightarrow \infty$	$ x > X$	$ f(x) - A < \epsilon$	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$
	单侧	$x \rightarrow -\infty$	$x < -X$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$
		$x \rightarrow +\infty$	$x > X$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$
无穷小量	当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, $\alpha(x)$ 以零为极限			$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \alpha(x) = 0$
无穷大量	当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, $f(x)$ 绝对值无限变大			$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = \infty$

4. 极限存在准则及两个重要极限

准 则	结 论	重要极限
加逼准则	若 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
单调有界准则	单调有界数列必有极限	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

5. 极限的运算

四则运算 设 $\lim f(x) = A,$ $\lim g(x) = B$	则 $\lim[k \cdot f(x)] = k \cdot A = k \cdot \lim f(x) (k \text{ 为常数})$
	则 $\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B = \lim f(x) \pm \lim g(x)$
	则 $\lim[f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$
	则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}, (B \neq 0)$
等价无穷小代换	若 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta', \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \text{ 存在, 则有 } \lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$

6. 函数连续性的定义

类 型	定 义	注
在点 x_0 连续	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (或 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$), 称 $f(x)$ 在点 x_0 连续	若 $f(x)$ 在点 x_0 不连续, 称 $f(x)$ 在点 x_0 间断
在 (a, b) 内连续	$f(x)$ 在 (a, b) 内每一点都连续, 称 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续	初等函数在其定义区间内连续
在 $[a, b]$ 上连续	$f(x)$ 在 (a, b) 内每一点都连续, 在点 a 右连续, 在点 b 左连续	

7. 闭区间上连续函数的性质

最大值最小值性质	闭区间上的连续函数必有最大值和最小值.
介值性定理	若 $f(x) \in C[a, b]$, C 是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间任一常数, 则至少一点存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = C$
零点定理	若 $f(x) \in C[a, b]$, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$

二、问题答疑

问题 1 单调函数必有反函数, 不单调的函数是否一定没有反函数?

答 否. 一个函数是否有反函数取决于函数的对应规则, 函数在定义域与值域之间是否构成一一对应. 若是, 则必存在反函数; 若不是, 则不存在反函数.

单调性只是存在反函数的充分条件, 而非必要条件. 例如:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ 为有理数} \\ -x, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 中不是单调函数, 但它有单值反函数, 这个反函数就是 $f^{-1}(x) = f(x), x \in (-\infty, +\infty)$.

问题 2 初等函数与非初等函数有何区别?

答 初等函数是由常数和基本初等函数(幂、指、对、三、反)经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所构成的, 并且可以用一个式子表示, 否则就是非初等函数, 例如:

$$y = \sqrt{x^2 - 4}, y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ 及 } y = \ln x + \frac{e^{\sin \sqrt{x}} - 1}{x^2}$$

等都是初等函数. $y = x^x$ 也是初等函数, 因为它是由 $y = e^u$ 与 $u = x \ln x$ 复合而成的. $y = |x|$ 同样是初等函数, 因为它是由 $y = \sqrt{u}$ 与 $u = x^2$ 复合而成的. 而狄利克雷函数

$$y = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

是非初等函数. 贝萨尔函数 $J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots$ 及椭圆函

数 $F(x, \epsilon) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 t}}, 0 < \epsilon < 1$ 也是非初等函数. 因为它不可能由有限次的四则运算和有限次的复合运算所构成的. 微积分中所讨论的函数绝大多数属于初等函数.

问题 3 分段函数一定不是初等函数吗?

答 不一定, 分段函数只是表示函数的一种方法并非一类函数. 例如分段函

数 $y = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, 它也可以表示为 $y = |x|$, 是初等函数. 又如分段函数 $f(x) = \begin{cases} \cos^2 x + \sin^2 x, & -\infty < x \leq 1 \\ \log_x x, & 1 < x < +\infty \end{cases}$, 它也可以表示为 $f(x) = 1$, 是初等函数.

问题 4 下列关于数列极限的论述是否正确?

(1) 当 n 充分大以后, 若数列 $\{x_n\}$ 越来越接近于 a , 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

(2) 若对 $\forall \epsilon > 0$, 存在自然数 N , 当 $n > N$ 时, 总有无穷多个 x_n 满足 $|x_n - a| < \epsilon$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

(3) 若对于任意给定的正整数 k , 总存在正数 N , 当 $n > N$ 时, 所有的 x_n 均满足 $|x_n - a| < e^{-k}$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

答 (1) 不正确. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 是指当 n 充分大以后, x_n 与 a 的差的绝对值可以任意的小 (小于预先给定任意小的正数 ϵ), 即随着 n 的增大 $|x_n - a|$ 趋向于 0; 而当 n 充分大以后, 数列 $\{x_n\}$ 越来越接近于 a , 只能表明 $|x_n - a|$ 越来越小, 并不能保证 $|x_n - a|$ 趋向于 0. 例如 $x_n = 1 + \frac{1}{n}$, 随着 n 的增大 x_n 越来越接近于 0, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 0$. 正确的说法应当是, 若当 $n \rightarrow \infty$ 时, x_n 无限的接近于 a (要多么接近就有多么接近), 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

(2) 不正确. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的几何表现为: ① 点 a 的任何 ϵ 邻域 $U(a, \epsilon)$ 都包含了数列 $\{x_n\}$ 的无限多个点; ② 在 $U(a, \epsilon)$ 以外, 最多只有数列 $\{x_n\}$ 的有限多个点. 题设只满足 ① 而不满足 ②, 故不能说数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限. 例如: 取

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & n \text{ 为奇数} \\ 1, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

的确在 $U(0, \epsilon)$ 都包含了数列 $\{x_n\}$ 的无限多个点, 但显然 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在.

(3) 正确. 因为对于任意给定的正数 ε 总可以取适当的正整数 k , 使得 $e^{-k} < \varepsilon$, 对于上述数 k , 由题设存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 所有的 x_n 均满足 $|x_n - a| < e^{-k} < \varepsilon$, 所以由极限的定义有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

问题 5 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 数列 $\{y_n\}$ 发散, 那么数列 $\{x_n y_n\}$ 一定发散吗?

答 不一定. 例如: $x_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots; y_n = (-1)^n, n = 1, 2, \dots$. 显然, $\{x_n\}$ 收敛于 0, $\{y_n\}$ 发散. 但 $x_n y_n = (-1)^n \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots, \{x_n y_n\}$ 收敛于 0. 又例如: $x_n = \frac{1+n}{n}, n = 1, 2, \dots; y_n = (-1)^n, n = 1, 2, \dots$. 显然, $\{x_n\}$ 收敛于 1, $\{y_n\}$ 发散. 而 $x_n y_n = (-1)^n \frac{1+n}{n}, n = 1, 2, \dots, \{x_n y_n\}$ 发散. 正确的说法应当是: 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 0$, 数列 $\{y_n\}$ 发散, 则数列 $\{x_n y_n\}$ 一定发散.

问题 6 无穷多个无穷小的和是否仍为无穷小?

答 不一定. 例证如下: (1) 若 $x_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2}$,

因为 $x_n = \frac{1}{n^2} [1 + 2 + \dots + (n-1)] = \frac{1}{n^2} \frac{n(n-1)}{2}$,

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}$, 此处, 无穷多个无穷小之和是不等于零的常数.

(2) 若 $x_n = \frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^3} + \dots + \frac{n-1}{n^3}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \frac{n(n-1)}{2} = 0$. 此处, 无穷多个无穷小之和仍是无穷小.

(3) 若 $x_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}} + \dots + \frac{n-1}{n^{\frac{3}{2}}}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \frac{n(n-1)}{2} = +\infty$. 此处, 无穷多个无穷小之和是无穷大.

正确的说法应当是: 有限多个无穷小的和仍为无穷小.

问题 7 同一自变量变化过程中的两个无穷小一定能比较吗?

答 不一定. 例如当 $x \rightarrow 0$ 时, x 与 $\sin x \cos \frac{1}{x}$ 都是无穷小, 但由于

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ 不存在, 所以这两个无穷小不能比较.

问题 8 函数 $f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 内是否无界? 当 $x \rightarrow 0$ 时, 是否为无穷大? 无穷大量和无界函数有什么区别和联系?

答 在区间 $(0, 1)$ 内取一个点列 $x_n = \frac{1}{n\pi}, n = 1, 2, \dots$, 则 $f(x_n) = (-1)^n n\pi$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$, 因此, $f(x)$ 在集合 $\{x_n\}$ 上无界, 而 $\{x_n\} \subset (0, 1)$, 故 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上无界; 在区间 $(0, 1)$ 内又取一个点列 $y_n = \frac{1}{(n + \frac{1}{2})\pi}, n = 1, 2, \dots$, 则 $f(y_n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = 0$, 因此, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 不为无穷大.

无穷大量是指在自变量的某个变化过程中, 对应函数值的绝对值无限地增大, 即若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow 0$ 时的无穷大; 无界函数是指函数在该区间上的函数值构成的集合不能包含在某闭区间 $[-M, M] (M > 0)$ 之内, 即对于任意给定的正数 $M > 0$, 在该区间上都会存在至少一点, 使得该点处的函数值的绝对值大于 M . 无穷大量和无界函数之间的关系可以概括如下: 若 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷大量, 则 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内无界; 反之未必成立.

问题 9 若 $f(x)$ 在 x_0 连续, 则是否存在 x_0 的某个邻域 $U(x_0, \delta)$, 使 $f(x)$ 在该邻域内连续?

答 不一定. 例如: $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{当 } x \text{ 为有理数} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数} \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续, 而在点 $x = 0$ 任何一个邻域内都间断. 事实上该函数除了在点 $x = 0$ 连续外, 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的其他点都不连续.

问题 10 初等函数在其定义域内一定连续吗?

答 不一定. 例如 $f(x) = \sqrt{\cos x - 1}$, 其定义域为 $x = 2n\pi (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, 即一系列离散的点. 由连续函数的定义知 $f(x)$ 在其定义域内不连续, 因为 $f(x)$ 在 $x = 2n\pi (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 的任何邻域内均无定义. 正确的说法是: 初等函数在其定义区间内一定连续.

三、经典题型 (或例题)

例 1 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \arcsin \frac{x-1}{3} + \frac{\sqrt{x-x^2}}{\ln(2x-1)}. \quad (2) \frac{1}{\ln|x-1|}$$

解 函数的定义域是指使对应法则有意义的自变量取值区间,因此

$$(1) \begin{cases} \left| \frac{x-1}{3} \right| \leq 1 \\ x-x^2 \geq 0 \\ 2x-1 > 0 \\ 2x-1 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 \leq x-1 \leq 3 \\ x(1-x) \geq 0 \\ 2x > 1 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq x \leq 1 \\ x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < x < 1, \text{即} (\frac{1}{2}, 1)$$

$$(2) \begin{cases} \ln|x-1| \neq 0 \\ |x-1| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0, x \neq 2 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{定义域为 } x \neq 0, x \neq 1, x \neq 2,$$

即 $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$

注 复杂函数的定义域,就是各个简单函数定义域的交集.

例 2 设 $f(x-1)$ 的定义域为 $[0, a] (a > 0)$, 求 $f(x)$ 的定义域.

解 由 $f(x-1)$ 的定义域为 $[0, a] (a > 0)$, 即 $0 \leq x \leq a$.

令 $t = x-1$, 则 $0 \leq t+1 \leq a$, 即 $-1 \leq t \leq a-1$,

故 $f(t)$ 的定义域为 $[-1, a-1]$, 即 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, a-1]$.

注 ① 已知 $f(g(x))$ 的定义域求 $f(x)$ 的定义域的一般方法是,令 $t = g(x)$ 从 x 的变化范围 $x \in D$, 即 $g^{-1}(t) \in D$, 解出 t 的变化范围.

② 定义域是指 x 的变化范围,例 2 中 $f(x-1)$ 的定义域为 $[0, a]$, 是指 $0 \leq x \leq a$, 而不是 $x-1$ 的定义域为 $[0, a]$.

$$\text{例 3 设 } f(x) = \begin{cases} 4-x^2, & |x| \leq 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}, \text{求 } f[f(x)].$$

$$\text{解 } f[f(x)] = \begin{cases} 4-f^2(x), & |f(x)| \leq 2 \\ 0, & |f(x)| > 2 \end{cases}.$$

(1) 当 $|f(x)| \leq 2$ 时,

$$\text{或 } |x| \leq 2, |f(x)| = |4-x^2| \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} |x| \leq 2 \\ 2 \leq x^2 \leq 6 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2} \leq |x| \leq 2.$$

或 $|x| > 2, |f(x)| = 0 \leq 2 \Rightarrow |x| > 2$.

(2) 当 $|f(x)| > 2$ 时,

$$\begin{aligned} \text{或 } |x| \leq 2, |f(x)| = |4 - x^2| > 2 &\Rightarrow \begin{cases} |x| \leq 2 \\ |x| > \sqrt{6} \text{ 或 } |x| < \sqrt{2} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} |x| \leq 2 \\ |x| < \sqrt{2} \end{cases} &\Rightarrow |x| < \sqrt{2}, \\ \text{或 } |x| > 2, |f(x)| = 0 > 2, &\text{矛盾.} \end{aligned}$$

$$\text{综上所述, } f[f(x)] = \begin{cases} 0, & |x| < \sqrt{2}, \\ 4 - (4 - x^2)^2, & \sqrt{2} \leq |x| \leq 2, \\ 4, & |x| > 2. \end{cases}$$

注 复合函数的运算是内层函数(或是其一段子函数)的值域与外层函数(或是其一段子函数)的定义域对接传递的过程,须仔细分析多做练习,才能掌握.

例 4 若函数 $y = f(x)$ 的图形有对称轴 $x = a$ 及 $x = b (b > a)$, 试证 $y = f(x)$ 为周期函数, 并求出周期 T .

解 由于 $y = f(x)$ 的图形以 $x = a$ 及 $x = b$ 为对称轴, 于是有

$$f(a - x) = f(a + x), f(b - x) = f(b + x).$$

进而有 $f(x) = f(2a - x)$ 且 $f(x) = f(2b - x)$, 因此

$$f(2a - x) = f(2b - x).$$

令 $t = 2a - x$, 则 $x = 2a - t$, 便得到

$$f(t) = f(t - 2a + 2b) = f(t + 2(b - a)).$$

根据周期函数的定义, $y = f(x)$ 有周期 $T = 2(b - a) > 0$.

注 凡 $y = f(x)$ 的对称轴问题或对称中心问题, 应注意到函数的广义奇偶性.

广义奇偶性:

① 若 $y = f(x)$ 的图形以 $x = a$ 为对称轴, 则必有 $f(a - x) = f(a + x)$.

若令 $t = a - x$, 则可得 $f(t) = f(2a - t)$ 或记为(函数自变量记号可根据需要来更换) $f(x) = f(2a - x)$. 若令 $\varphi(x) = f(a - x)$, 则 $\varphi(x)$ 为偶函数.

② 若 $y = f(x)$ 的图形以 $(a, 0)$ 为对称点, 则必有 $f(a - x) = -f(a + x)$, 类似 ① 的分析可得到 $f(x) = -f(2a - x)$. 若令 $\varphi(x) = f(a - x)$, 则 $\varphi(x)$ 为奇函数.

例 5 设 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为奇函数, 已知 $f(1) = a$, 对 $x \in$

$(-\infty, +\infty)$ 有 $f(x+2) = f(x) + f(2)$.

(1) 求 $f(5)$;

(2) 若 $y = f(x)$ 以 $T = 2$ 为周期, 求常数 a .

解 (1) 对已知等式令 $x = -1$, 则有 $f(-1+2) = f(-1) + f(2)$, 又因为 $y = f(x)$ 为奇函数, 因此 $f(2) = 2f(1) = 2a$.

再令 $x = 3$, 则有 $f(5) = f(3) + f(2)$.

至于 $f(3)$, 可通过令 $x = 1$, 知道 $f(3) = f(1) + f(2) = 3a$, 最后得到 $f(5) = 5a$.

(2) 若 $y = f(x)$ 以 $T = 2$ 为周期, 则应有 $f(x+2) = f(x) + f(2) = f(x)$. 因为 $f(2) = 0$, 即解出 $a = 0$.

例 6 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k}$.

解 记 $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k} = \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{2}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n}$.

又因为 $\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + n} \leq x_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2},$

于是有 $\frac{1}{n^2 + n} \frac{n(n+1)}{2} \leq x_n \leq \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2},$

由夹逼准则, 令 $n \rightarrow \infty$, 上述不等式两端有相同的极限 $\frac{1}{2}$, 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k} = \frac{1}{2}.$$

例 7 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$.

解 显然有 $3 = (3^n)^{\frac{1}{n}} < (1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} < (3 \cdot 3^n)^{\frac{1}{n}} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{n}},$

令 $n \rightarrow \infty$, 给上式两边同时取极限可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} = 3$.

注 用夹逼准则求极限时, 应合理使用放缩法, 找到具有相同极限两个数列, 其中一个比目标数列大, 另一个比目标数列小, 从而得到目标数列的极限.

类题 试用夹逼定理证明下列数列的极限为零(当 $n \rightarrow \infty$ 时)

$$(1) a_n = \frac{n+2}{n^2+2n+2}; \quad (2) \alpha^n \quad (0 < \alpha < 1).$$

提示: (1) $0 < \frac{n+2}{n^2+2n+2} < \frac{2n}{n^2};$

(2) 记 $\alpha = \frac{1}{(1+h)}$ ($h > 0$), 则

$$0 < \alpha^n = \frac{1}{(1+h)^n} = \frac{1}{1+nh + \frac{n(n-1)}{2!}h^2 + \cdots + h^n} < \frac{1}{1+nh} < \frac{1}{nh}.$$

例 8 设 $a_1 = \alpha > 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{a_1}{a_n})$ ($n = 1, 2, \cdots$), 证明极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在,

并求出此极限值.

证 由已知递推式, 首先有 $a_n > 0$, 即 $\{a_n\}$ 有下界, 只需再考虑序列的单调性.

证法 1 $a_{n+1} \geq \frac{1}{2}(2 \cdot \sqrt{a_n \cdot \frac{\alpha}{a_n}}) = \sqrt{\alpha} > 1$ (平均值不等式),

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_n + \frac{\alpha}{a_n}) - a_n \leq \frac{1}{2}(a_n + \frac{a_n^2}{a_n}) - a_n = 0.$$

因此, $a_{n+1} \leq a_n$, 即 $\{a_n\}$ 单调减少, 故有极限.

证法 2 $a_{n+1} \geq \sqrt{\alpha}$, 即 $\alpha \leq a_n^2$, 因此

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{\alpha}{a_n^2}) \leq 1,$$

于是 $\{a_n\}$ 单调减少.

证法 3 由 $\alpha \leq a_n^2$, 则立即有

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{\alpha}{a_n}) \leq \frac{1}{2}(a_n + \frac{a_n^2}{a_n}) = a_n,$$

于是 $\{a_n\}$ 单调减少.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 由极限的唯一性, 对已知递推式令 $n \rightarrow \infty$, 得到

$$A = \frac{1}{2}(A + \frac{\alpha}{A}),$$

解得 $A = \sqrt{\alpha}$ (含负根).

注 对只给出递推表达式或抽象表达式 (无具体函数类型表达) 的极限问题, 应首先考虑单调有界或夹逼准则. 用单调有界性求数列极限的一般步骤: (1) 证明数列单调有界; (2) 建立数列相邻两项之间的关系式; (3) 对上述关系式两端同时取极限, 得到关于极限 α 的方程, 从中解出 α 即可.

类题 设 $x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$ ($n = 1, 2, \cdots$), 试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在并求此极限.

提示:用数学归纳法证明数列 $\{x_n\}$ 单调减少,由 $x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$ 可知 $x_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$,设数列 $\{x_n\}$ 的极限为 a ,对 $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$ 式两端同时取极限,得到关于极限 a 的方程,从中解出 a .

例 9 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

解法 1 凑成重要极限形式

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \{[1 + (x-1)]^{\frac{1}{x-1}}\}^{-1} = e^{-1}.$$

解法 2 令 $y = x^{\frac{1}{1-x}}$,两边同时取对数,有 $\ln y = \frac{\ln x}{1-x}$,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+x-1)}{-(x-1)} = -1,$$

因此 $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1}$.

注 这一极限为幂指函数的极限,属于“ 1^∞ ”型不定式,用重要极限或两边同时取对数的方法都可以解决.

例 10 判断下列解题过程是否正确?

(1) 由于当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan^2 x \sim x^2, \sin x \sim x$,所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x - \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x} = 0.$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (\text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时}, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2). \end{aligned}$$

答 (1) 的题解错误,原因在于将 $\tan x$ 与 $\sin x$ 同时用 x 替换是不符合等价无穷小替换要求的.正确解为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x - \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - 1 \right) = 1 \cdot (0 - 1) = -1$$

(2) 的题解正确.

说明 1. 等价无穷小替换定理要求,被替换的无穷小部分处于原式分子或分母的因子位置.

2. 常用等价无穷小替换有当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\sin x \sim x, \tan x \sim x, \ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, (1+x)^m - 1 \sim mx.$$