全国高等教育自学考试教材（工业工程专业）

概率论与数理统计

高旅端 编

机械工业出版社

全国高等教育自学考试教材（工业工程专业）

概率论与数理统计

高旅端　编

江苏工业学院图书馆
藏书章

机械工业出版社

本书包括随机事件及其概率、随机变量、多维随机变量、随机变量的数字特征、抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析、正交试验设计等内容；每章附有习题和答案，便于自学。可以作为高等教育自学考试工科专业的教材，也可以作为高等院校工科专业的教材。

概率论与数理统计

（重排本）

高旅端　编

*

责任编辑：王世刚　特约编辑：吴小帆

封面设计：汪德海

*

机械工业出版社出版（北京市百万庄大街 22 号）

邮政编码：100037

（北京市书刊出版业营业许可证出字第 117 号）

三河市宏达印刷厂印刷

*

开本 787mm × 1092mm 1/16 · 印张 14.25 · 字数 342 千字

1999 年 4 月第 1 版第 2 次印刷

印数 4 001 – 6 000　　定价：18.00 元

*

ISBN 7-111-03863-0/O·86（X）

凡购本书，如有缺页，倒页、脱页，由本社发行部调换

本社购书热线电话（010）68993821、68326677-2527

出 版 前 言

高等教育自学考试教材是高等教育自学考试工作的一项基本建设。经国家教育委员会同意，我们拟有计划、有步骤地组织编写一些高等教育自学考试教材，以满足社会自学和适应考试的需要。《概率论与数理统计》是为高等教育自学考试工业工程专业组编的一套教材中的一种。这本教材根据专业考试计划，从造就和选拔人才的需要出发，按照全国颁布的《概率论与数理统计自学考试大纲》的要求，结合自学考试的特点，组织高等院校一些专家学者集体编写而成的。

工业工程专业《概率论与数理统计》自学考试教材，是供个人自学、社会助学和国家考试使用的。现经组织专家审定同意予以出版发行。我们相信，随着高教自学考试教材的陆续出版，必将对我国高等教育事业的发展，保证自学考试的质量起到积极的促进作用。

编写高等教育自学考试教材是一种新的尝试，希望得到社会各方面的关怀和支持，使它在使用中不断提高和日臻完善。

全国高等教育自学考试指导委员会

1993年7月

编者的话

本书是高等教育自学考试工业工程（IE）专业本科段概率论与数理统计课程的试用教材，也是机械工程师进修学院工业工程（IE）专业继续教育用教材。本教材根据全国高等教育自学考试指导委员会颁布的本课程自学考试大纲，通过全国考委机械类专业委员会编审，机械工程师进修学院配合组织编写。

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门学科，包括概率论和数理统计两部分内容。通常，概率论偏重于从数量上研究随机现象的规律性，除了在实际中的一些直接应用之外，更主要的则是作为理论基础。数理统计以概率论为基础和工具，对实际问题中的随机现象，研究如何合理地获得数据资料，建立有效的统计方法，进行各种估计和检验。概率论与数理统计在众多领域中有着广泛的应用。本书概率论部分（第一章至第四章）包括随机事件及其概率、随机变量、多维随机变量和随机变量的数字特征等内容；数理统计部分（第五章至第十章）包括抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析和正交试验设计等内容。每章后面附有适量习题，习题答案放在全书最后。

本书可以使读者掌握概率论的基本知识和数理统计的主要方法，为学习本专业其它课程作必要的准备，同时提供解决实际问题的一些手段和方法。

本书承白玉峰（主审）、林士中和姚孟臣老师审阅，他们提出了很多宝贵意见，对此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，不当之处，敬请批评指正。

作者　1993年1月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第一章　随机事件及其概率

客观世界中发生的现象是多种多样的。有一类现象称之为确定性现象，其在一定条件下必然发生。例如，加热水可以使水沸腾；在地球引力下物体落向地面。在确定性现象中，各种量的变化服从确定的规律。例如，水在标准大气压下于100℃沸腾；自由落体下落的距离是下落时间的二次函数：$s=\frac{1}{2}gt^2$。因此，在确定性现象中，可以由给定的条件准确地预报结果。还有一类现象称之为随机现象，在这类现象中，无法由给定的条件准确地预报结果。例如，自由地向地面抛一枚硬币，其结果可能是正面（国徽面）朝上，也可能是反面朝上，在抛硬币之前无法准确知道其结果；某城市明年7月份的降雨量也是事先无法准确预报的。

在随机现象中，虽然无法由给定的条件准确预报结果，但是经过人们长期的观察和研究，发现其结果并非无规律可循，而是呈现出某种规律性，称之为统计规律性。例如，多次重复地抛一枚均匀的硬币，出现正面朝上的次数大致有一半；由某城市历年7月份的降雨量可以得到降雨量变化的大致规律。因此，在随机现象中，一次试验的结果呈现出不确定性，而在大量重复试验中其结果具有统计规律性。概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科，在自然科学、工程技术和社会科学的众多领域中有着广泛而重要的应用。

第一节　随机事件及其运算

一、随机试验与样本空间

在实际中有各种各样的试验，这里把试验的含义推广，包括各种各样的科学实验，甚至对某一事物的某种特征的观察也认为是一种试验。

在各种试验中，相同条件下可以重复进行，而不能确定其结果，但知其所有可能结果的试验叫做随机试验。例如，前面提到的抛一枚硬币，观察出现正面或反面就是一个随机试验。

例 1-1　掷一枚均匀的骰子，观察出现的点数。试验的所有可能结果有6个：出现点1，出现点2，出现点3，出现点4，出现点5，出现点6。分别用1、2、3、4、5、6表示。

例 1-2　将一枚均匀的硬币抛两次，观察两次中出现正面、反面的情况。这时一次试验是抛两次硬币，试验的所有可能结果有4个：两次都出现正面；两次都出现反面；第一次出现正面而第二次出现反面；第一次出现反面而第二次出现正面。分别用“正正”、“反反”、“正反”和“反正”表示。

这两个例子也是随机试验。这些试验具有以下3个共同特点：

（1）可以在相同的条件下重复进行。

（2）每次试验的可能结果不止一个，试验的所有可能结果在试验前是已知的。

（3）每次试验中可以出现不同的可能结果，但究竟出现哪个可能结果，在试验之前不能确定。

这就是所有随机试验所具有的3个特点。以后把随机试验简称为试验，用E表示，并通过研究随机试验来研究随机现象。

试验E中的每一个可能结果称为基本事件，所有基本事件组成的集合称为E的样本空间，记为Ω。例如，在抛一枚硬币的试验中，有两个可能结果：出现正面（用“正”表示），出现反面（用“反”表示），因此有两个基本事件，这个试验的样本空间是由这两个基本事件组成的集合：$\Omega=\{$正、反$\}$。在例1-1的试验中，有6个基本事件，样本空间$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$。在例1-2的试验中，有4个基本事件，样本空间$\Omega=\{$正正，反反，正反，反正$\}$。

应当注意，样本空间中的元素即基本事件由试验的目的所确定，不同的试验目的，其样本空间也不一样。例如，同样是将一枚均匀的硬币抛两次，但试验的目的是观察出现正面的次数。这时的基本事件有3个：出现0次，出现1次，出现2次。因此这个试验的样本空间中只有3个元素。

对一个随机试验，弄清它的样本空间即所有的基本事件是很重要的。

二、随机事件

在进行试验时，常常关心满足某些条件的基本事件所组成的集合。例如，在例1-1中，如果讨论“出现奇数点”的情况，则这是由3个基本事件1、3、5所组成的集合。在例1-2中，如果讨论“两次出现的面相同”的情况，则是由两个基本事件“正正”和“反反”所组成的集合。

通常把由试验E的样本空间Ω中的部分基本事件组成的集合称为试验E的随机事件。例如，上面所说的“出现奇数点”和“两次出现的面相同”都是随机事件。显然，任何试验的每一基本事件都是随机事件，它们是最简单的随机事件；而一般的随机事件是由若干个基本事件组成的。

在一次试验中，随机事件可能发生也可能不发生。在每次试验中，当且仅当组成随机事件的若干个基本事件中的一个基本事件出现时，称该随机事件发生。例如，随机事件“两次出现的面相同”在一次试验中（即将一枚硬币抛两次）可能发生也可能不发生，当且仅当组成它的两个基本事件“正正”和“反反”中的一个基本事件出现时，则“两次出现的面相同”这个随机事件在一次试验中发生了。

有两种特殊的情况：一是由样本空间Ω中的所有元素即全体基本事件组成的集合称为必然事件，在每次试验中它总是发生。例如，在例1-1中，“出现的点数不大于6”就是必然事件。另一是不含任何基本事件的空集合称为不可能事件，在每次试验中它都不会发生。例如，在例1-1中，“出现的点数大于6”就是不可能事件。本质上，必然事件和不可能事件没有不确定性，即它们不是随机事件。但为了今后讨论方便起见，把它们当作特

殊的随机事件。

随机事件简称为事件，常用符号A、B、C、…表示事件。例如，用A表示例 1-2 中的事件“两次出现的面相同”

$$A=\text{“两次出现的面相同”}$$
$$=\{\text{正正，反反}\}$$

用Ω表示必然事件，用Φ表示不可能事件。

三、事件间的关系与运算

在研究试验E的时候，常常遇到各种事件。这些事件之中有的比较简单，有的则比较复杂，但与比较简单的事件有一定的关系。因此，分析事件之间的关系，可以在研究较复杂事件时，把它转化为对较简单事件的研究。

设试验E的样本空间为Ω；A，B，A_1，A_2，…，A_n是E的事件。

1.事件的包含与相等

如果事件A发生必然导致事件B发生，则称事件B包含事件A，记为$A\subset B$。

如果事件A包含事件B，同时事件B也包含事件A，即$B\subset A$并且$A\subset B$，则称事件A与事件B相等，记为$A=B$。

事件B包含事件A，就是凡是属于事件A的基本事件必然属于事件B。例如，在例1-1中，设$A=$“出现点 1”$=\{1\}$，$B=$“出现奇数点”$=\{1, 3, 5\}$，则有$A\subset B$。

2.和事件

设A、B是两个事件，事件“A、B两事件至少有一个发生”称为A与B的和事件，记为$A+B$或$A\cup B$。

A、B两事件至少有一个发生意味着或者A发生，或者B发生。A、B的和事件是由A中的基本事件和B中的基本事件一起构成的事件。例如，在例 1-1 中，设$A=$“出现的点数不大于 3”$=\{1, 2, 3\}$，$B=$“出现奇数点”$=\{1, 3, 5\}$，则$A+B=\{1, 2, 3, 5\}$。

和事件的概念可以推广到n个事件的情况。事件A_1，A_2，…，A_n的和事件记为$A_1+A_2+\cdots+A_n$或$\bigcup_{i=1}^{n} A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，表示$A_1$，$A_2$，…，$A_n$这$n$个事件中至少有一个发生这一事件。

进一步，和事件的概念还可以推广到可列个事件的情况。可列个事件A_1，A_2，…，A_n，…的和事件记为

$$A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots$$

或

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$$

表示A_1，A_2，…，A_n，…中至少有一个发生这一事件。

3.积事件

设A、B是两个事件，事件“A、B两事件同时发生”称为A与B的积事件，记为

AB或$A\cap B$。

A、B的积事件是由既属于A同时又属于B的基本事件构成的事件。例如，在例1-1中，设$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{1, 3, 5\}$，则$AB=\{1, 3\}$。

积事件的概念也可以推广到n个事件的情况。事件A_1，A_2，…，A_n的积事件记为$A_1A_2\cdots A_n$或$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$，表示$A_1$，$A_2$，…，$A_n$同时发生这一事件。

4.差事件

设A、B是两个事件，事件“A发生而B不发生”称为A与B的差事件，记为$A-B$。

A、B的差事件是由属于A但不属于B的基本事件构成的事件。例如，在例1-1中，仍设$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{1, 3, 5\}$，则$A-B=\{2\}$。

5.互不相容

若事件A与事件B不能同时发生，则称A、B互不相容或互斥。

若A、B互不相容，则有$AB=\Phi$，反之亦然。例如，在例1-1中，设$A=\{2, 4, 6\}$，$B=\{1, 3, 5\}$，则A、B互不相容。

对n个事件A_1，A_2，…，A_n，它们两两互不相容是指对$i\neq j$，$A_iA_j=\Phi(i, j=1, 2, \cdots, n)$。

对可列个事件A_1，A_2，…，A_n，…，它们两两互不相容是指对$i\neq j$，$A_iA_j=\Phi$ $(i, j=1, 2, \cdots)$。

显然，基本事件是两两互不相容的。

6.对立事件

对每次试验中的事件A，事件“A不发生”称为A的对立事件，记为$\overline{A}$。

上述定义意味着在一次试验中，A发生则$\overline{A}$必不发生，而A不发生则$\overline{A}$必发生，因此A与$\overline{A}$应满足关系

$$A+\overline{A}=\Omega \qquad A\overline{A}=\Phi \tag{1-1}$$

显然，A与$\overline{A}$互为对立事件，即，若A的对立事件为$\overline{A}$，则$\overline{A}$的对立事件为A。

上述事件间的6种关系与运算可用图1-1～图1-6分别直观地加以表示。例如，在图1-3中，方框内表示样本空间Ω，圆A和圆B分别表示事件A与事件B，阴影部分表示A、B的积事件AB。

事件间的运算服从以下规律（其中A、B、C均为试验E的事件）：

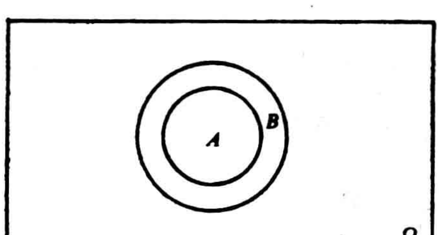


图 1-1

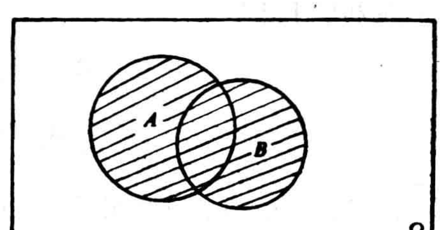


图 1-2

1.交换律

$$A+B=B+A \quad AB=BA \tag{1-2}$$

2.结合律

$$A+(B+C)=(A+B)+C=A+B+C \tag{1-3}$$

$$A(BC)=(AB)C=ABC \tag{1-4}$$

3.分配律

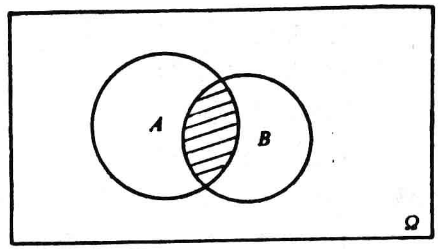
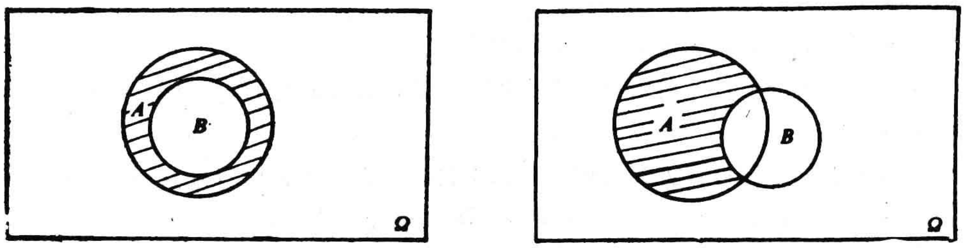


图 3



b)

图 1-4

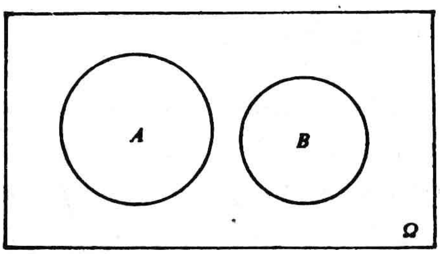


图 1-5

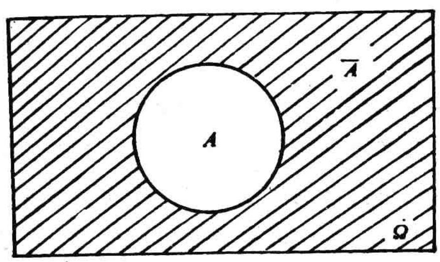


图 1-6

$$A(B+C)=AB+AC \tag{1-5}$$

$$A+BC=(A+B)(A+C) \tag{1-6}$$

4.对偶公式

$$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B} \tag{1-7}$$

$$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B} \tag{1-8}$$

对偶公式还可以推广到多个事件的情况。例如对 3 个事件A、B、C有

$$\overline{A+B+C}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \tag{1-9}$$

$$\overline{ABC}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C} \tag{1-10}$$

对偶公式的意义很明显。式(1-7)和式(1-9)表明，“至少有一个事件发生”的对立事件是“所有的事件都不发生”；式(1-8)和式(1-10)表明，“所有事件都发生”的对立事件是“至少有一个事件不发生”。

例 1-3 向目标射击两次，用A表示事件“第一次击中目标”，用B表示事件“第二次击中目标”，试用A、B表示下列各个事件:

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

（1）只有第一次击中目标。

（2）仅有一次击中目标。

（3）两次都未击中目标。

（4）至少一次击中目标。

解 显然，$\overline{A}$表示第一次未击中目标，$\overline{B}$表示第二次未击中目标。

（1）只有第一次击中目标隐含着第二次未击中目标，因此表示为$A\overline{B}$。

（2）仅有一次击中目标意味着第一次击中目标而第二次未击中目标或第一次未击中目标而第二次击中目标，因此表示为$A\overline{B}+\overline{A}B$。

（3）两次都未击中目标显然可以表示为$\overline{A}\overline{B}$。

（4）至少一次击中目标包括只一次击中目标或两次都击中目标，因此可以表示为$A\overline{B}+\overline{A}B+AB$。

至少一次击中目标也可以理解为第一次击中目标和第二次击中目标这两个事件至少有一个发生，因此可以表示为$A+B$。于是有$A+B=A\overline{B}+\overline{A}B+AB$。

又由于至少一次击中目标与两次都未击中目标互为对立事件，因此$\overline{A+B}=\overline{A}\overline{B}$，正是对偶公式（1-7）。

第二节 概率及其运算

除了必然事件和不可能事件以外，一般的随机事件在一次试验中可能发生，也可能不发生。虽然不能预先知道它们是否发生，但发生的可能性有大小之分，因此，需要定量地描述这种可能性的大小。对一个事件，用一个适当的数表示该事件在一次试验中发生的可能性的大小，这个数就是事件的概率，它是概率论中最基本的概念之一。为此，先引入频率的概念。

一、频率

设在相同的条件下，进行了n次试验，在n次试验中，事件A发生的次数为n_A，把比值n_A/n称为事件A发生的频率，记为$f_n(A)$

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n} \tag{1-11}$$

容易看出，频率具有以下3条基本性质：

（1）
$$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1 \tag{1-12}$$

（2）
$$f_n(\Omega)=1 \tag{1-13}$$

（3）若A_1，A_2，…，A_k是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1+A_2+\cdots+A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k) \tag{1-14}$$

事件A发生的频率描述了事件发生的频繁程度。频率越大，事件A发生越频繁，即在一次试验中A发生的可能性越大。因此，自然想到用A发生的频率表示在一次试验中A发生的可能性的大小。但是，有个问题，频率不是固定数：一方面，这一遍n次重复试验中A发生的频率与另一遍n次重复试验中A发生的频率一般不相同；另一方面，当重复试验

的次数 n 发生变化时，A发生的频率也会有所变化。下面先看一个著名的例子。

例 1-4 考虑抛一枚均匀的硬币，观察出现正面的情况。如果取 $n=500$，即将这枚硬币在相同条件下重复抛500次，用A表示出现正面这一事件，n_A为500次中出现正面的次数。历史上曾经有人做了10遍这个试验，所得结果见表1-1。

表 1-1

遍 数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_A	251	249	256	253	251	246	244	258	262	247
$f_n(A)$	0.502	0.498	0.512	0.506	0.502	0.492	0.488	0.516	0.524	0.494

改变试验中的 n，所得结果见表1-2。

结果表明，虽然频率$f_n(A)$不是固定数，并且当n较小时，差异较大。但是，随着n的增大，A发生频率的波动会越来越小，呈现出一种稳定性。这与直观感觉“出现正面”的可能性是0.5相一致。因此，可以用“频率的稳定值”0.5表示在一次试验中事件 A 发生的可能性的大小。

表 1-2

实验者	n	n_A	$f_n(A)$
蒲 丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

二、概率

由例1-4以及其它很多例子，都可以得到这样的认识：随着试验次数 n 逐渐增大，事件A发生的频率总在一个常数附近上下摆动，并逐渐稳定于该常数。这个性质反映了随机事件的统计规律性，说明一个事件发生的可能性的大小可以用一个适当的常数表示，此常数就是频率的稳定值。

定义 1-1 在相同条件下进行n次试验，n_A为n次试验中事件A发生的次数，$f_n(A)=n_A/n$为事件A发生的频率。如果当n很大时，$f_n(A)$稳定地在某一常数值p的附近摆动，并且通常随着n的增大，摆动的幅度越变越小，则称p为事件A的概率，记为$P(A)=p$。

定义1-1称为概率的统计定义。因此，在例1-4中，P(“出现正面”)$=0.5$。

概率的统计定义虽然直观，但在实用上，不可能对每一个事件都做大量的重复试验，从中得到频率的稳定值，因此不便于实际计算使用。另外，从数学上看，有些说法也不严密，不便于在理论研究上使用。

注意到频率$f_n(A)$所具有的3条基本性质以及$f_n(A)$与$P(A)$很接近，因此可以想象$P(A)$也具有这3条基本性质。由此得到启发，给出概率的公理化定义。

定义 1-2 设试验E的样本空间为Ω，如果对于E的每一个事件A，都有一实数$P(A)$与它对应，并且满足下面3个条件：

（1）对每一个事件A，有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1 \qquad (1\text{-}15)$$

（2）

$$P(\Omega)=1 \qquad (1\text{-}16)$$

（3）对两两互不相容的事件A_1，A_2，…，A_n，…，有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n) \qquad (1\text{-}17)$$

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots \qquad (1\text{-}18)$$

则称$P(A)$为事件A的概率。

概率的公理化定义，看起来抽象，但它反映了事件概率的本质，并且便于理论研究和实际计算上的使用。定义1-2中并没有规定对应于事件A的$P(A)$究竟是什么，这在不同的试验中，可以具体加以规定。

在式（1-17）中，当$n=2$时，即对互不相容的两个事件A_1、A_2，有

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2) \qquad (1\text{-}19)$$

三、概率的性质

由定义1-2，可以得到概率的一些重要性质。

性质 1-1 对事件A及其对立事件$\overline{A}$，有

$$P(A)=1-P(\overline{A}) \qquad (1\text{-}20)$$

证 由于$A+\overline{A}=\Omega$，$A\overline{A}=\Phi$，由式（1-19）有

$$P(\Omega)=P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=1$$

因此式（1-20）成立。

性质 1-2

$$P(\Phi)=0 \qquad (1\text{-}21)$$

证 由于$\overline{\Phi}=\Omega$，由性质1-1得到

$$P(\Phi)=1-P(\overline{\Phi})=1-P(\Omega)=0$$

性质 1-3 设A、B为两个事件，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \qquad (1\text{-}22)$$

证 由于$A+B=A+(B-A)$，$A(B-A)=\Phi$，$B=AB+(B-A)$，$(AB)(B-A)=\Phi$，所以由式（1-19）有

$$P(A+B)=P(A)+P(B-A)$$

$$P(B)=P(AB)+P(B-A)$$

由以上两式易得式（1-22）。

性质 1-4 设A、B为两个事件，若$A\subset B$，则

$$P(B-A)=P(B)-P(A) \qquad (1\text{-}23)$$

$$P(A)\leqslant P(B)$$

证 由于$B=A+(B-A)$，$A(B-A)=\Phi$，由式（1-19）有

$$P(B)=P(A)+P(B-A)$$

从而可得式（1-23）。由式（1-15）有$P(B-A)\geqslant 0$，因此$P(B)-P(A)\geqslant 0$，即得$P(A)\leqslant P(B)$。

四、古典概型

下面讨论一类简单的试验，例1-1、例1-2和例1-4都属于这类试验，它们都具有下面两个共同的特点：

（1）试验的样本空间中的元素只有有限个，即基本事件的数目有限。

（2）试验中的每个基本事件发生的可能性相同。

例如，在例1-1中，样本空间由6个基本事件组成，由于骰子均匀，因此，每个基本事件发生的可能性都是1/6。在例1-2中，样本空间由4个基本事件组成，由于硬币均匀，因此，每个基本事件发生的可能性都是1/4。在例1-4中，样本空间由两个基本事件组成，每个基本事件发生的可能性都是1/2。

具有以上两个特点的试验很多，这一类试验称之为古典概率模型，简称为古典概型。这类试验是概率论发展初期的主要研究对象，有着广泛的应用。如果试验有象抛硬币的均匀性或几何上的对称性，或者没有理由认为某些基本事件出现的可能性偏大及偏小时，可以认为是古典概型。

对古典概型，设基本事件为ω_1，ω_2，…，ω_n，于是$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，且$P(\omega_i)=1/n(i=1,2,\cdots,n)$。

设事件A包含m个基本事件$\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_m}(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant n)$。由于$\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_m}$这$m$个基本事件中有一个发生，事件$A$即发生，从而$A=\omega_{i_1}+\omega_{i_2}+\cdots+\omega_{i_m}$。注意到基本事件都是两两互不相容的，根据式（1-17）

$$
\begin{aligned}
P(A)&=P(\omega_{i_1}+\omega_{i_2}+\cdots+\omega_{i_m})\\
&=P(\omega_{i_1})+P(\omega_{i_2})+\cdots+P(\omega_{i_m})=\frac{m}{n}
\end{aligned}
$$

于是
$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{包含的基本事件数}}{\Omega\text{中基本事件的总数}} \tag{1-24}$$

这就是古典概型中计算事件A的概率公式。

使用式（1-24）计算$P(A)$时，关键是求出Ω中基本事件的总数n和A包含的基本事件数m。有的试验n与m很容易看出，例如，在例1-1中，$n=6$，设$A=$“出现的点数不大于3”$=\{1,2,3\}$，于是$m=3$，$P(A)=3/6=1/2$。又如，在例1-2中，$n=4$，设$A=$“两次出现的面相同”$=\{$正正,反反$\}$，于是$m=2$，$P(A)=2/4=1/2$；又设$B=$“不出现正面”$=\{$反反$\}$，于是$m=1$，$P(B)=1/4$。有的试验n与m则不容易看出，这时常使用排列与组合的计算公式，特别是组合计算公式。

例 1-5 盒中装有3个红色球和两个白色球，现从盒中任意取出两个球，问取出的两个球都是红色球的概率是多少？

解 首先将盒中的5个球编号：红色球编为1、2、3号，白色球编为4、5号。从盒中任意取出两个球共有以下10种可能结果（基本事件）：

取出1、2号球	取出1、3号球
取出1、4号球	取出1、5号球
取出2、3号球	取出2、4号球
取出2、5号球	取出3、4号球
取出3、5号球	取出4、5号球

由于是任意取出，因此上述每种结果发生的可能性相同，该问题属于古典概型，并且

$n=10$。$A=$“取出的两个球都是红色球”包含3个基本事件：取出1、2号球，取出1、3号球，取出2、3号球，因此$m=3$，$P(A)=3/10$。

可以使用组合计算公式。由于n是从5个球中任意取出两个球的所有不同的取法的种数，因此

$$n=\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{5\times 4}{2}=10$$

而m是取出的两个球都是红色球的所有不同的取法的种数，取出的这两个红色球只能来源于1、2、3号球，因此m是从3个球中任意取出两个球的所有不同取法的种数，即

$$m=\binom{3}{2}=\frac{3!}{2!(3-2)!}=3$$

于是

$$P(A)=\binom{3}{2}\Big/\binom{5}{2}=\frac{3}{10}$$

例 1-6 设有一批产品共100件，其中有3件次品，现从这批产品中任取5件，求其中无次品的概率和有两件次品的概率。

解 如将所有基本事件一一罗列出来太麻烦，因此只有使用组合计算公式。从100件产品中任取5件共有$\binom{100}{5}$种不同的取法，$n=\binom{100}{5}$。设$A=$“5件中无次品”，$B=$“5件中有两件次品”。对事件A，5件产品全由正品中取出，有97件正品，从97件正品中任取5件共有$\binom{97}{5}$种不同的取法，$m=\binom{97}{5}$。于是

$$P(A)=\frac{\binom{97}{5}}{\binom{100}{5}}=\frac{97!}{5!(97-5)!}\Big/\frac{100!}{5!(100-5)!}$$
$$=\frac{97!\times 95!}{92!\times 100!}=\frac{95\times 94\times 93}{100\times 99\times 98}=\frac{27683}{32340}$$

对事件B，5件产品中有两件次品和3件正品，这两件次品从原有的3件次品中取出，共有$\binom{3}{2}$种不同取法，而3件正品从原有的97件正品中取出，共有$\binom{97}{3}$种不同取法，于是$m=\binom{3}{2}\times\binom{97}{3}$

$$P(B)=\binom{3}{2}\times\binom{97}{3}\Big/\binom{100}{5}$$
$$=\frac{3!}{2!(3-2)!}\ \frac{97!}{3!(97-3)!}\Big/\frac{100!}{5!(100-5)!}$$
$$=\frac{97!\times 5!\times 95!}{2\times 94!\times 100!}=\frac{120\times 95}{2\times 100\times 99\times 98}=\frac{19}{3234}$$

从本质上看，例1-5和例1-6相同，它们都属于古典概型中的抽球问题。抽球问题是一类常见问题，在古典概型中，我们主要讨论它。

五、概率的计算

使用概率的性质可以简化概率的计算。

例 1-7 在例1-6中，求任取的5件产品中至少有一件次品的概率。

解 设

$A=$“5件产品中至少有一件次品”

$A_1=$“5件产品中有一件次品”

$A_2=$“5件产品中有两件次品”

$A_3=$“5件产品中有3件次品”

则有$A=A_1+A_2+A_3$，并且A_1、A_2、A_3两两互不相容，从而由式（1-17）有

$$P(A)=P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$$

由例1-6知$P(A_2)=19/3234$，同样可以算出

$$P(A_1)=\binom{3}{1}\times\binom{97}{4}\Big/\binom{100}{5}=\frac{893}{6468}$$

$$P(A_3)=\binom{3}{3}\times\binom{97}{2}\Big/\binom{100}{5}=\frac{1}{16170}$$

于是
$$P(A)=\frac{893}{6468}+\frac{19}{3234}+\frac{1}{16170}=\frac{4657}{32340}$$

例1-7还可以从另外一个角度考虑。注意到A的对立事件

$\bar{A}=$“5件产品中没有次品”

可以算出

$$P(\bar{A})=\binom{97}{5}\Big/\binom{100}{5}=\frac{27683}{32340}$$

利用式（1-20）有

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{27683}{32340}=\frac{4657}{32340}$$

例 1-8 盒中装有红、黄、白色球各一个，每次从盒中任取一个球，记住其颜色以后再放回盒中，这样共取3次（称为有放回地抽取）。求3次都没有取到红球或3次都没有取到黄球的概率。

解 设

$A=$“3次都没有取到红球”

$B=$“3次都没有取到黄球”

所求的概率为$P(A+B)$。利用式（1-22）

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

此试验属于古典概型，$n=3\times3\times3=27$。对A，$m=2\times2\times2=8$，$P(A)=8/27$。同样，$P(B)=8/27$。注意到

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com