现代数学译丛

解析数论基础

〔苏〕A. A. 卡拉楚巴 著

科学出版社

现代数学译丛

解析数论基础

〔苏〕A. A. 卡拉楚巴 著

潘承彪 张南岳 译

科学出版社

1984

内 容 简 介

本书以解析数论的三个著名问题：素数分布、哥德巴赫问题和华林问题为中心，很好地阐明了解析数论的三个重要方法：复积分法、圆法及三角和法．本书的特点是少而精，叙述和证明简洁．阅读本书仅需要初等数论、微积分及复变函数基础知识．书中有不少习题，其中一些是近代解析数论的最重要的成果，读者可通过这些习题了解近代解析数论的研究领域．

本书可供大专院校数学系师生、研究生及有关的科学工作者阅读．

А. А. Карацуба

ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА», 1975

现代数学译丛

解 析 数 论 基 础

〔苏〕A. A. 卡拉楚巴 著

潘承彪 张南岳 译

责任编辑 吕 虹 张鸿林

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1984 年 3 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1984 年 3 月第一次印刷 印张：5 7/8

印数：0001—12,000 字数：149,000

统一书号：13031・2512

本社书号：3451・13—1

定价： 1.15 元

序　　言

数论是研究整数性质的．解析数论乃是数论的一个分支，除了数论特有的方法外，它本质上是利用数学中的解析工具来研究数论．

本书的目的是向广大读者介绍解析数论的中心问题．撇开次要的细节，作者力求叙述那些导致该理论的现代状况的主要内容．所以书中给出的结果常常不是目前已知的最好结果，但二者之间并无原则差异．

本书讨论解析数论中的三个问题：素数在自然数列和算术数列中的分布，Goldbach 问题与 Waring 问题．以解决这些问题为例，阐明解析数论的基本方法：复积分法，G. H. Hardy-J. E. Littlewood-S. Ramanujan 的圆法，以及 И. М. Виноградов 三角和方法．

从第三章开始，每章后面都配有问题，这些问题和主题紧密相关，建议读者依次去做．这些问题进一步阐明所证明的定理，或者引出现代数论的新想法．

本书要求读者具备 И. М. Виноградов 的《数论基础》，大学数学分析教程，以及 И. И. Привалов 的《复变函数引论》范围内的知识．

书中所涉及到的一些问题，历史发展以及参考文献可在专著[1—10]中找到．

命题和公式在每章中各自编排，在引用其他章节的命题时，将指出其所在的章节．

作者对于 С. М. Воронин 和 А. Ф. Лаврик 的宝贵意见表示衷心感谢．

记　　号

$c, c_0, c_1, \cdots$ 表示绝对正的常数，一般地说，在不同的定理中它们是不同的．

当 A 是正的时，记号 $B = O(A)$，$B \ll A$ 表示 $|B| \leqslant cA$；记号 $A \asymp B$ 表示

$$c_1 A \leqslant B \leqslant c_2 A.$$

$\varepsilon, \varepsilon_1, \cdots$ 表示任意小的正常数．n, m, k, l, N 表自然数；除第一章外，$p, p_1, \cdots$ 表素数．$\mu(n)$ 表 Möbius 函数，

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1; \\ 0, & n = p^2 m; \\ (-1)^k, & n = p_1 \cdots p_k. \end{cases}$$

当 $x > 0$ 时，

$$\ln x = \log x = \int_1^x \frac{du}{u}; \ \mathrm{Li}\, x = \int_2^x \frac{du}{\ln u} + c_0,$$

其中

$$c_0 = \lim_{\delta \to 0} \left(\int_0^{1-\delta} \frac{du}{\ln u} + \int_{1+\delta}^2 \frac{du}{\ln u} \right);$$

$\Lambda(n)$ 表 Mangoldt 函数，

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & n = p^k; \\ 0, & n \neq p^k. \end{cases}$$

$\varphi(k)$ 表 Euler 函数——不大于 k 且与 k 互素的自然数的个数．

$\psi(x)$ 表 Чебышев 函数，

$$\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n); \qquad \pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1;$$

当 $l \leqslant k$，$(l, k) = 1$ 时，

$$\psi(x;k,l)=\sum_{\substack{n\equiv l\ (\mathrm{mod}\ k)\\ n\leqslant x}}\Lambda(n);$$

$$\pi(x;k,l)=\sum_{\substack{p\equiv l\ (\mathrm{mod}\ k)\\ p\leqslant x}}1.$$

$\tau(n)$ 表 n 的正除数的个数；$\tau_k(n)$ 表方程 $x_1x_2\cdots x_k=n$ 的解数，$x_1, x_2, \cdots, x_k$ 是自然数；因此 $\tau_2(n)=\tau(n)$；$\Omega(n)$ 表 n 的素因子个数． 对于实数 α，$[\alpha]$ 表 α 的整数部分，即不超过 α 的最大整数；$\{\alpha\}=\alpha-[\alpha]$ 表 α 的小数部分；$(\alpha)=\min(\{\alpha\}, 1-\{\alpha\})$ 表 α 到最近整数的距离．

s 表复数，$s=\sigma+it$，其中 $i^2=-1$，$\mathrm{Re}\, s=\sigma$，$\mathrm{Im}\, s=t$；$\bar{s}=\sigma-it$；一般地，$\bar{f}$ 表与 f 共轭的量．

目　　录

序言 ………………………………………………………… i

记号 ………………………………………………………… ii

第一章　有穷级整函数 ……………………………………… 1

　§1. 无穷乘积. Weierstrass 公式 ……………………… 1

　§2. 有穷级整函数 ………………………………………… 7

第二章　Euler Gamma 函数 ………………………………… 15

　§1. 定义和最简单的性质 ………………………………… 15

　§2. Γ 函数的函数方程 ………………………………… 16

　§3. 余元公式和积分公式 ………………………………… 16

　§4. Stirling 公式 ………………………………………… 19

　§5. Euler 积分与 Dirichlet 积分 ……………………… 21

第三章　Riemann Zeta 函数 ………………………………… 24

　§1. 定义与最简单的性质 ………………………………… 24

　§2. ζ 函数的函数方程 ………………………………… 28

　§3. 非显然零点. 对数导数按零点展为级数 …………… 29

　§4. 关于零点的最简单定理 ……………………………… 31

　§5. 有穷和的逼近 ………………………………………… 35

　问题 ………………………………………………………… 39

第四章　Dirichlet 级数的系数和与此级数所给定的函数之间的联系 ………………………………………………… 41

　§1. 一般定理 ……………………………………………… 41

　§2. 素数分布的渐近公式 ………………………………… 44

　§3. Чебышев 函数表为 ζ 函数的零点和 ……………… 47

　问题 ………………………………………………………… 50

第五章　ζ 函数理论中的 Виноградов 方法 ……………… 52

　§1. 三角和的模的中值定理 ……………………………… 52

　§2. Zeta 和的估计 ………………………………………… 59

　§3. ζ 函数在直线 $\mathrm{Re}\, s = 1$ 附近的估计 ……………… 64

问题 ………………………………………………………………………… 65
第六章 ζ 函数零点的新边界 ……………………………… 68
§1. 函数论的定理 ……………………………………………… 68
§2. ζ 函数零点的新边界 ……………………………………… 69
§3. 素数分布的渐近公式中的新余项 ………………………… 72
问题 ………………………………………………………………………… 73
第七章 ζ 函数的零点密度与小区间内的素数分布问题 …… 77
§1. 最简单的密度定理 ………………………………………… 77
§2. 小区间内的素数 …………………………………………… 82
问题 ………………………………………………………………………… 84
第八章 Dirichlet L 级数 ……………………………………… 86
§1. 特征及其性质 ……………………………………………… 86
§2. L 级数的定义及其最简单的性质 ………………………… 96
§3. 函数方程 …………………………………………………… 99
§4. 非显然零点. 对数导数按零点展为级数 ………………… 103
§5. 关于零点的最简单的定理 ………………………………… 105
问题 ………………………………………………………………………… 106
第九章 算术数列中的素数 ……………………………………… 112
§1. 显式 ………………………………………………………… 112
§2. 关于零点界限的定理 ……………………………………… 114
§3. 算术数列中素数分布的渐近公式 ………………………… 128
问题 ………………………………………………………………………… 132
第十章 Goldbach 问题 …………………………………………… 134
§1. Goldbach 问题中的圆法 …………………………………… 134
§2. 素变数的线性三角和 ……………………………………… 142
§3. 实效定理 …………………………………………………… 147
问题 ………………………………………………………………………… 153
第十一章 Waring 问题 …………………………………………… 157
§1. Waring 问题中的圆法 ……………………………………… 157
§2. H. Weyl 和的估计及 Waring 问题的渐近公式 …………… 170
§3. $G(n)$ 的估计 ………………………………………………… 174
问题 ………………………………………………………………………… 176
参考文献 …………………………………………………………………… 177

第一章　有穷级整函数

这章具有辅助性质，它包含以后所必需的整函数知识.

§1. 无穷乘积. Weierstrass 公式

我们引进无穷乘积的概念.

定义 1. 设 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$是异于$-1$的无穷复数序列. 形如

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)=(1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_n)\cdots \tag{1}$$

的表达式称为无穷乘积.

形如

$$\prod_{n=1}^{k}(1+u_n)=(1+u_1)\cdots(1+u_k)=v_k \tag{2}$$

的表达式称为部分乘积.

定义 2. 如果序列 (2) v_k 当 $k\to\infty$时趋于 $v\neq 0$，则称无穷乘积 (1) 收敛，其值为 v，即

$$v=\lim_{k\to\infty}v_k=\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n). \tag{3}$$

如果序列 v_k 不收敛，或者 $v=0$，则称无穷乘积 (1) 发散.

对于大多数情形，下面的收敛判别法是够用的.

定理 1. 如果级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{4}$$

绝对收敛，则乘积 (1) 收敛.

证　因为级数

$$|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|+\cdots$$

收敛，所以

$$\lim_{n\to\infty}|u_n|=0;$$

不失一般性，可以设 $|u_n|\leqslant\frac{1}{2}$，$n=1,2,\cdots$. 首先设 $u_n=a_n$ 是实数，$n=1,2,\cdots$. 那么 $|\ln(1+u_n)|\leqslant 2|u_n|$. 由此推出序列

$$\ln(1+u_1)+\cdots+\ln(1+u_n)=\ln(1+u_1)\cdots(1+u_n)$$

收敛，所以乘积 (1) 收敛.

现在设 u_n 是任意复数，需要证明，当 $n\to\infty$ 时，两个实数序列

$$\begin{aligned}|v_n|&=|(1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_n)|\\&=|1+u_1|\cdots|1+u_n|,\end{aligned}\tag{5}$$

$$\begin{aligned}\arg v_n&=\arg(1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_n)\\&=\arg(1+u_1)+\cdots+\arg(1+u_n)\end{aligned}\tag{6}$$

均收敛.

序列 (5) 收敛的充分必要条件是序列 $|v_n|^2$ 收敛. 由于

$$|1+u_n|^2=|1+\alpha_n+i\beta_n|^2=1+\alpha_n^2+\beta_n^2+2\alpha_n,$$

$$\alpha_n=\operatorname{Re}u_n,\qquad \beta_n=\operatorname{Im}u_n,$$

以及

$$|\alpha_n^2+\beta_n^2+2\alpha_n|\leqslant|u_n|^2+2|u_n|,$$

所以从已经证明的结果立即推出 $|v_n|^2$ 收敛. 序列 (6) 的收敛性从以下事实推出：对于充分大的 n_0，当 $n>n_0$ 时，

$$|\arg(1+u_n)|=\left|\arcsin\frac{\beta_n}{\sqrt{(1+\alpha_n)^2+\beta_n^2}}\right|<\pi|\beta_n|.$$

定理 1 证毕.

现在转向研究某区域内的解析函数的无穷乘积.

定理 2. 设 $u_n(s)$ 是在某区域 G 内解析函数的无穷序列，且

a) $u_n(s)\neq -1$, $n=1,2,\cdots$, $s\in G$;

b) $|u_n(s)|\leqslant a_n$, $n=1,2,\cdots$, $s\in G$;

c) 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

那么，对于任意的 $s \in G$，乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(s)) \tag{7}$$

收敛．由等式

$$v(s)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(s))$$

定义的函数 $v(s)$ 在 G 内是解析的，且 $v(s)\neq 0$，$s \in G$．

证．对于 $s \in G$，乘积 (7) 的收敛性从定理 1 推出．要证明 $v(s)$ 的解析性，只要证明解析函数序列

$$v_k(s)=\prod_{n=1}^{k}(1+u_n(s))$$

对于 $s \in G$ 是一致收敛到 $v(s)$ 的．然后再应用 Weierstrass 定理．

设 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=p$，$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)=p_n$．

首先我们证明对于任意的 $s \in G$，有

$$\left|\frac{v(s)}{v_n(s)}-1\right|\leqslant\frac{p}{p_n}-1. \tag{8}$$

事实上，如果 $k\geqslant 1$，则

$$\begin{aligned}\left|\frac{v_{n+k}(s)}{v_n(s)}-1\right| &= |(1+u_{n+1}(s))\cdots(1+u_{n+k}(s))-1|\\ &= |u_{n+1}(s)+\cdots+u_{n+k}(s)+u_{n+1}(s)u_{n+2}(s)\\ &\quad+\cdots+u_{n+1}(s)\cdots u_{n+k}(s)|\\ &\leqslant a_{n+1}+\cdots+a_{n+k}+a_{n+1}a_{n+2}+\cdots\\ &\quad+a_{n+1}\cdots a_{n+k}\\ &=\frac{p_{n+k}}{p_n}-1.\end{aligned}$$

令 $k\to\infty$，便得到式 (8)．这样，对于 $n\geqslant n_0(\varepsilon)$ 以及任意的 $s \in G$，有

$$|v(s)-v_n(s)|=|v_n(s)|\left|\frac{v(s)}{v_n(s)}-1\right|\leqslant p_n\left(\frac{p}{p_n}-1\right)$$

$$=p-p_n<\varepsilon.$$

定理证毕.

定义 3. 在 s 平面上的任意有穷部分是解析的函数，称为整函数.

现在,我们来证明两个定理：一是存在整函数,以且仅以给定无穷序列中的数为其零点；二是整函数可按其零点展为无穷乘积(代数基本定理的推广).

定理 3. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 是无穷复数序列,且

$$0<|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant\cdots\leqslant|a_n|\leqslant\cdots$$

及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|a_n|}=0.$$

则存在整函数 $G(s)$，它仅以 a_n 为其零点(如果其中 a_n 有相同的，那么 $G(s)$ 的零点有相应的重数).

证. 设

$$u_n=u_n(s)=\left(1-\frac{s}{a_n}\right)e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}}, n=1,2,\cdots,$$

并考虑无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}u_n(s) \tag{9}$$

我们来证明这个乘积在复平面的每个点 $s\neq a_n$ 收敛，并且是以 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 为其零点的整函数 $G(s)$. 考虑以原点为中心,以 $|a_n|$ 为半径的圆 C 及无穷乘积

$$\prod_{r=n}^{\infty}u_r(s).$$

我们要证明这个乘积在圆 $|s|<|a_n|$ 内收敛到解析函数. 从而无穷乘积 (9) 在这个圆内也是解析的，它仅以 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 为零点. 因为 $|a_n|\to\infty$，所以就证明了定理. 对于 $|s|<|a_n|$，$r\geqslant n$，设

$$\ln u_r(s) = \ln\left(1-\frac{s}{a_r}\right)+\frac{s}{a_r}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_r}\right)^2$$

$$+\cdots+\frac{1}{r-1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r-1},$$

这里 $\ln\left(1-\frac{s}{a_r}\right)$ 是对数主值,即 $s=0$ 时它等于0.

于是,当 $r=n,\ n+1,\cdots$ 和 $|s|<|a_n|$ 时,

$$\ln u_r(s) = -\frac{1}{r}\left(\frac{s}{a_r}\right)^r-\frac{1}{r+1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r+1}-\cdots$$

及

$$u_r(s) = e^{-\frac{1}{r}\left(\frac{s}{a_r}\right)^r-\frac{1}{r+1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r+1}-\cdots}$$

因此,我们应当证明,级数

$$\sum_{r=n}^{\infty}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{s}{a_r}\right)^r+\frac{1}{r+1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r+1}+\cdots\right] \tag{10}$$

在 $|s|<|a_n|$ 内收敛到一个解析函数. 对于任意的 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$,及 $|s|\leqslant(1-\varepsilon)|a_n|$,有

$$\left|\frac{1}{r}\left(\frac{s}{a_r}\right)^r+\frac{1}{r+1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r+1}+\cdots\right|\leqslant\frac{1}{r}(1-\varepsilon)^r$$

$$+\frac{1}{r+1}(1-\varepsilon)^{r+1}+\cdots<\frac{(1-\varepsilon)^r}{\varepsilon r}.$$

因此,级数 (10) 在区域 $|s|\leqslant(1-\varepsilon)|a_n|$ 内一致收敛,即无穷乘积 (9) 在圆 C 内是解析的. 定理证毕.

推论 1 (Weierstrass 公式). 设 $a_1,\ a_2,\cdots,\ a_n,\ \cdots$ 是满足定理 3 的条件的复数序列,则函数

$$G(s) = s^m\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{a_n}\right)e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}}$$

是整函数,且仅以 $0,\ a_1,\ a_2,\cdots,\ a_n,\cdots$ 为其零点.

推论 2. 设序列 $a_1,\ a_2,\cdots,\ a_n,\ \cdots$ 满足定理 3 的条件,且存在整数 $p\geqslant 0$,使得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|^{p+1}}$$

收敛，则函数

$$G_1(s)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{a_n}\right)e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{s}{a_n}\right)^p}$$

满足定理 3 的要求.

事实上，在这种情况下，当 $|s|\leqslant(1-\varepsilon)|a_n|$ 时，级数

$$\sum_{r=n}^{\infty}\left[\frac{1}{p+1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{p+1}+\frac{1}{p+2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{p+2}+\cdots\right]$$

有控制级数

$$\sum_{r=n}^{\infty}\frac{(1-\varepsilon)^{p+1}}{(p+1)\varepsilon}\cdot\left(\frac{|a_n|}{|a_r|}\right)^{p+1}<+\infty.$$

定理 4. 每个整函数 $G(s)$ 可以表为以下形式

$$G(s)=e^{H(s)}s^m\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{a_n}\right)e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}},\quad(*)$$

其中 $H(s)$ 是整函数，而数 $0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 是 $G(s)$ 的零点，且按其模的增长顺序排列. 如果除此以外，序列 a_n, $n=1,2,\cdots$, 满足推论 2 的条件，则

$$G(s)=e^{H(s)}s^m\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{a_n}\right)e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{s}{a_n}\right)^p}$$

证. $G(s)$ 的零点不能有极限点，即它们能按模的增长顺序排列. 由定理 3，我们可以构造整函数 $G_1(s)$，它以 $G(s)$ 的零点为其零点. 设 $\varphi(s)=\dfrac{G(s)}{G_1(s)}$, $s\neq a_n$; $\varphi(a_n)=\lim\limits_{s\to a_n}\varphi(s)$. 可以看出，$\varphi(s)$ 是不等于零的整函数，即 $\varphi(s)$ 的对数是整函数. 于是

$$\varphi(s)=e^{H(s)},$$

其中 $H(s)$ 是整函数. 这就证明了定理的第二个断言. 定理证毕.

§2. 有穷级整函数

我们引进今后所必需的一些定义.

定义 4. 设 $G(s)$ 是整函数,

$$M(r)=M_G(r)=\max_{|s|=r}|G(s)|.$$

如果存在 $a>0$, 使得

$$M(r)<e^{r^a},\quad r>r_0(a)>0, \tag{11}$$

则称 $G(s)$ 是有穷级整函数;在这种情形, $\alpha=\inf a$ 称为 $G(s)$ 的级.如果不管怎样的 $a>0$,式(11)都满足,则称 $G(s)$的级等于∞.

定义 5. 设 $s_1, s_2,\cdots, s_n,\cdots$是复数序列,且

$$0<|s_1|\leqslant|s_2|\leqslant\cdots\leqslant|s_n|\leqslant\cdots. \tag{12}$$

如果存在 $b>0$, 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}|s_n|^{-b}<+\infty, \tag{13}$$

则称序列(12)有有穷收敛指数;在这种情形, $\beta=\inf b$ 称为序列(12)的收敛指数. 如果不管怎样的 $b>0$, 式(13)都不成立,则称序列(12)的收敛指数等于∞.

这节的基本结果是:

定理 5. 设 $G(s)$ 是有穷级 α 的整函数, $G(0)\neq 0$, s_n是 $G(s)$ 的零点序列,且 $0<|s_1|\leqslant|s_2|\leqslant\cdots\leqslant|s_n|\leqslant\cdots$, 则序列 s_n 有有穷收敛指数 $\beta\leqslant\alpha$,

$$G(s)=e^{g(s)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{s_n}\right)e^{\frac{s}{s_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{s}{s_n}\right)^p},$$

其中 $p\geqslant 0$ 是使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|s_n|^{p+1}}<+\infty$$

的最小整数. $g(s)$ 是次数 $g\leqslant\alpha$ 的多项式,并且 $\alpha=\max(g,\beta)$. 除此以外,如果对于任意的 $c>0$, 能够找到无穷序列 $r_1, r_2,\cdots, r_n,\cdots, r_n\to+\infty$, 使得

$$\max|G(s)| > e^{cr_n^{\alpha}}, \quad |s| = r_n, n = 1, 2, \cdots,$$

则 $\alpha = \beta$ 及级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|s_n|^{-\beta}$ 发散.

为了证明定理 5，需要一些辅助结果——引理. 在这些引理中，我们假定满足定理 5 中的条件，且利用这个定理中的记号.

引理 1. 设 $0<r<R$，m 是 $G(s)$ 在圆 $|s| \leqslant r$ 上的零点个数，则

$$\left(\frac{R}{r}\right)^m \leqslant \frac{M(R)}{|G(0)|}, \text{ 其中 } M(R) = \max_{|s|=R}|G(s)|.$$

证. 考虑

$$F(s) = G(s) \prod_{n=1}^{m} \frac{R^2 - s\bar{s}_n}{R(s - s_n)}, \quad s \neq s_n,$$

$$F(s_n) = \lim_{s \to s_n} G(s) \prod_{n=1}^{m} \frac{R^2 - s\bar{s}_n}{R(s - s_n)}$$

其中 $s_1, s_2, \cdots, s_m$ 是 $G(s)$ 在 $|s| \leqslant r$ 上的零点.

函数 $F(s)$ 在圆 $|s| \leqslant R$ 上是解析的，且在 $|s| = R$ 上

$$|F(s)| = |G(s)|.$$

因此，由最大模原理，

$$|F(0)| = |G(0)| \prod_{n=1}^{m} \frac{R}{|s_n|} \leqslant \max_{|s|=R}|F(s)| = M(R),$$

由此推出引理的断言.

推论. 如果 m 是函数 $G(s)$ 在以原点为中心、$\frac{R}{2}$为半径的圆上的零点数，则

$$m \leqslant \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{M(R)}{|G(0)|}.$$

引理 2. 如果 $N(r)$ 表示 $G(s)$ 在圆 $|s| \leqslant r$ 上的零点数，则对于任意的 $\varepsilon > 0$，能够找到 $c = c(\varepsilon) > 0$，使得

$$N(r) \leqslant c r^{\alpha+\varepsilon};$$

此外有 $\beta \leqslant \alpha$.

证. 第一个不等式由引理 1 和 $G(s)$ 的级的定义推出. 现在我们来证明,对于任意的 $b>\alpha$, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|s_n|^{-b}$$

收敛. 由此就推出引理的第二个断言. 由已经证明的不等式可知,对于任意的 $\varepsilon>0$, 有 $n\leqslant c|s_n|^{\alpha+\varepsilon}$, 即

$$|s_n|^{-b}\leqslant c^{\frac{b}{\alpha+\varepsilon}}n^{-\frac{b}{\alpha+\varepsilon}}$$

如果 $b>\alpha$, 那么对于充分小的 $\varepsilon>0$, $\dfrac{b}{\alpha+\varepsilon}>1$. 因此上述级数收敛.

引理 3. 设 s_n 是具有有穷收敛指数 β 的序列(12), $p\geqslant 0$ 是使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|s_n|^{-(p+1)}<+\infty$ 的最小整数. 又设 $P(s)$ 是由下面等式给定的整函数:

$$P(s)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{s_n}\right)e^{\frac{s}{s_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{s}{s_n}\right)^p}. \qquad (14)$$

那么, $P(s)$ 的级等于β. 此外,如果 $|s_n|\to+\infty$, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}|s_n|^{-\beta}<+\infty$$

则

$$|P(s)|\leqslant e^{cr^{\beta}}, \quad |s|=r.$$

证. 设 $P(s)$ 的级是 α. 由引理 2 推出, $\beta\leqslant\alpha$. 剩下要证明, 对于任意的 $\varepsilon>0$, $\alpha\leqslant\beta+\varepsilon$, 即应证明当 $|s|\to+\infty$ 时,

$$\ln|P(s)|<c(\varepsilon)|s|^{\beta+\varepsilon}.$$

为了简明起见,乘积(14)中的因子用 $u(s,s_n)$ 表示. 设

$$\ln|P(s)|=\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2,$$

其中 $\sum_1=\sum\limits_{\left|\frac{s}{s_n}\right|\leqslant\frac{1}{2}}\ln|u(s,s_n)|$, $\sum_2=\sum\limits_{\left|\frac{s}{s_n}\right|>\frac{1}{2}}\ln|u(s,s_n)|$.

其次,对于 $\sum_1$ 中的项