MATH 大学数学选修课丛书

黎曼几何初步

刘西民 编

科学出版社
www.sciencep.com

大学数学选修课丛书

黎曼几何初步

刘西民 编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书深入浅出地阐述了黎曼几何的基本概念和技巧，强调对基本知识和基本理论的理解和掌握，主要内容包括：多重线性代数、微分流形、外微分、联络、曲率、子流形简介等. 本书作为黎曼几何的入门教材，在内容处理上力求做到语言简洁、条理清楚、层次分明、通俗易懂，使学生通过本教材的学习能够理解和掌握黎曼几何的基本思想和基本方法. 为巩固所学知识，每章配备了一些难易不同的习题供读者选做.

本书可作为理工科大学、师范院校数学专业高年级本科生选修课教材以及研究生黎曼几何的入门教材，也可供数学工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

黎曼几何初步/刘西民编. —北京：科学出版社，2009

(大学数学选修课丛书)

ISBN 978-7-03-024750-6

Ⅰ.黎… Ⅱ.刘… Ⅲ.黎曼几何-高等学校-教材 Ⅳ.O186.12

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 095741 号

责任编辑：姚莉丽　房　阳／责任校对：陈玉凤

责任印制：张克忠／封面设计：陈　敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2009 年 6 月第 一 版　开本：B5(720×1000)

2009 年 6 月第一次印刷　印张：9 3/4

印数：1—3 000　字数：181 000

定价：21.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

《大学数学选修课丛书》编委会

序

长期以来，在认识和改造世界的过程中，人们对数学所起作用的认识是逐渐形成的，而且这种认识随着时代的进步在不断地深化. 特别是近年来，随着数字信息技术的飞速发展，人们对数学在科学技术中所起作用的认识也越来越深刻. 在我们所处的数字信息时代，数学科学的迅猛发展，更加确立了它在整个科学技术中的基础地位. 数学已突破传统的应用范围，向几乎所有人类知识的领域渗透，并为人类的物质和精神文明作出了贡献. 甚至在诸如人文、社会科学领域，为了准确和定量地考虑问题，数学也已经成为了重要的工具.

近年来，随着高等教育事业的不断发展，以及数学在科学技术各领域不断凸显的重要作用，全国许多高等院校纷纷筹办数学和与数学有关的各专业，而且这些新的专业已经为我国培养了大量的数学和与数学有关的社会急需人才. 但是，毋庸讳言，与规模快速增长不相协调的是，高校目前培养的很多数学类专业毕业生的数学修养、数学能力等方面的综合素质，却出现了不同程度的下降. 针对这种局面，我们必须从实际出发，加快数学类专业的全方位改革步伐，提高数学类专业的办学质量，努力培养适合数字信息化时代需要的高素质的数学人才.

当前，我国正处于高等教育从精英教育到大众化教育的转型时期，高等教育的培养目标、培养模式、培养方案正处在调整之中. 针对当前压缩必修课教学课时、增开更多选修课的现实情况，如何确保培养学生的质量，已是我们必须面对和迫切需要解决的问题. 显然在夯实基础的前提下，选择适当的教材，精选教学内容，合理选取和配置讲授近现代理论体系是解决质量问题的关键之一.

在课程体系中，选修课在开拓学生视野、激发学生兴趣、提高学生修养、引导学生树立专业精神、巩固数学基础、沟通分支联系、培养探索和创新能力等各个方面，都起着不可或缺的作用. 但是，目前国内可供数学类专业本科生作为选修课教材的用书却不多见. 国内多数高校常常是选用研究生教材或专著作为本科生的选修课教材.

针对目前国内高等教育中数学类各专业选修课的实际情况，我们总结多年来的教学实践与改革的经验，吸收国内外优秀教材的长处，将传统的教学内容、体系

与近现代理论发展的成果有机结合，组织编写了《大学数学选修课丛书》．在编写的过程中，我们遵循了以下原则：选修课与基础课教学内容相衔接，反映近现代数学学科专业研究和发展的概貌，基本覆盖数学本科专业的基础内容，对本科生进行毕业设计和毕业论文的创作有实际的参考作用．

本丛书力图体现数学类各个专业选修课的概貌，注重基础知识、基本方法的训练，加强应用．选修课门类的选择，力求适合不同层次高等院校选修课教学的实际情况．

王仁宏

2009 年元月

前　言

自从 Riemann 在 1854 年提出黎曼几何的概念以来, 经过 Christoffel, Bianchi 以及 Ricci 等的完善和拓广, 黎曼几何成为 Einstein 创立广义相对论的数学工具. 特别是 Cartan 建立外微分方法和活动标架法后, 黎曼几何得到了巨大的发展. 近半个多世纪来, 黎曼几何经历了从局部理论到大范围整体理论的发展过程, 现已成为一门内容十分丰富的学科. 如今, 黎曼几何已成为数学中十分重要的基本理论, 它在许多数学分支 (如拓扑学、微分方程、多复变函数论等) 及现代物理学中都有着重要应用, 并对它们产生了比较深刻的影响. 由此可见, 无论在理论基础还是在实际应用中, 黎曼几何都显示出它的重要性和巨大价值.

如今, 黎曼几何的基础知识已成为从事现代数学研究的人应该掌握的基本内容. 为了使数学专业的学生具有较高的数学素养, 了解黎曼几何的基本内容和基本方法是非常必要的. 通过学习黎曼几何, 可以使学生掌握黎曼几何的基本概念和流形上分析的基本技巧, 学会张量分析和外微分的计算, 了解黎曼度量与黎曼联络的重要意义, 特别是了解黎曼流形上曲率的重要作用, 从而认识黎曼流形的结构. 为今后进一步深造或实际应用打下基础.

本书是黎曼几何的一本入门教材. 从微分流形的基本概念出发, 介绍了黎曼流形研究中的各种基本概念和技巧. 以联络的讨论为重点介绍了各种形式的曲率张量, 同时还简单介绍了子流形理论. 本书可作为理工科大学、师范院校数学系高年级学生选修课教材以及研究生黎曼几何的入门教材, 也可供数学工作者参考.

本书是编者在大连理工大学应用数学系为高年级学生多年开设黎曼几何选修课的基础上编写而成的. 本书的出版得到了科学出版社的关心和帮助, 在此谨表示衷心的感谢.

由于编者的水平有限, 书中不妥、疏漏在所难免, 恳请专家、同行和广大读者批评指正.

编　者

2009 年 1 月

目 录

第 1 章 多重线性代数 …… 1
1.1 向量空间与对偶空间 …… 1
1.2 张量积与张量 …… 4
1.3 外代数 …… 9
习题 1 …… 15
第 2 章 微分流形 …… 16
2.1 微分流形的基本概念 …… 16
2.2 切空间和余切空间 …… 23
2.3 浸入与淹没 …… 30
2.4 单位分解定理 …… 34
习题 2 …… 38
第 3 章 外微分 …… 40
3.1 切丛与向量场 …… 40
3.2 张量丛与外微分 …… 46
3.3 外微分式的积分 …… 52
习题 3 …… 58
第 4 章 联络 …… 60
4.1 黎曼度量 …… 60
4.2 向量丛上的联络 …… 67
4.3 仿射联络 …… 74
4.4 黎曼流形上的微分算子 …… 79
4.5 测地线 …… 86
习题 4 …… 93
第 5 章 曲率 …… 95
5.1 曲率张量 …… 95
5.2 截面曲率 …… 103

5.3 Ricci 曲率和数量曲率 …… 106
5.4 曲率与局部几何 …… 109
习题 5 …… 115
第 6 章 子流形简介 …… 118
6.1 子流形的基本公式 …… 118
6.2 子流形的基本方程 …… 127
6.3 超曲面 …… 133
习题 6 …… 137
参考文献 …… 139
索引 …… 140
《大学数学选修课丛书》书目 …… 144

第1章

多重线性代数

1.1 向量空间与对偶空间

设 F 是一个数域, 它通常指实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$. F 上的一个向量空间 V 是具有下面两种运算的一个集合:

(1) 加法, $V\times V\to V$, $(v,w)\mapsto v+w$, 且 V 关于加法构成一个交换群, 其单位元记为 0.

(2) 数量乘法, $F\times V\to V$, $(a,v)\mapsto av$, 使得对任意的 $a_1,a_2\in F$, $v,w\in V$ 有

(i) $a(v+w)=av+aw,\ \ (a_1+a_2)v=a_1v+a_2v$;

(ii) $(a_1a_2)v=a_1(a_2v)$;

(iii) $1v=v,\ \ 0v=0$,

其中 1 为数域 F 的乘法单位元, 第一个 0 是数零, 第二个 0 是 V 作为交换群的单位元. 向量空间 V 的元素称为向量.

向量空间 V 的一组基是 V 的一个线性无关的向量组 $\{v_1,\cdots,v_n\}$, V 中任意一个元素 v 都可以由它们线性表示, 即

$$v=\sum_{i=1}^{n}a_iv_i,$$

数组 $a_1,\cdots,a_n\in F$ 称为向量 v 关于基 $\{v_1,\cdots,v_n\}$ 的分量. V 的一组基中所含向量的个数称为向量空间 V 的维数.

设 V 是数域 F 上的一个 n 维向量空间, $f:V\to F$ 是 V 上的 F 值函数. 如果对任意的 $v_1,v_2\in V$ 以及 $a_1,a_2\in F$ 有

$$f(a_1v_1+a_2v_2)=a_1f(v_1)+a_2f(v_2),$$

则称 f 是 V 上的 F 值线性函数. 显然, 如果 f,g 是 V 上的 F 值线性函数, $a\in F$, 则 $f+g$, af 也是 V 上的 F 值线性函数. 从而 V 上的所有 F 值线性函数构成数域 F 上的向量空间, 记作 V^*, 称为 V 的对偶空间, 并且 V^* 也是 F 上的 n 维向量空间. 事实上, 设 $\{v_1,\cdots,v_n\}$ 是 V 的一组基, 且

$$v=\sum_{i=1}^{n}a_iv_i\in V,\quad f\in V^*,$$

则

$$f(v)=\sum_{i=1}^{n}a_if(v_i),$$

即线性函数 f 由它在基 $\{v_1,\cdots,v_n\}$ 上的值 $f(v_i)$ 完全确定. 从而可定义线性函数 $v^{*i}\in V^*$, $1\leqslant i\leqslant n$, 使得

$$v^{*i}(v_j)=\delta^i_j,\quad 1\leqslant j\leqslant n,$$

其中

$$\delta^i_j=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j\end{cases}\tag{1.1}$$

称为 Kronecker delta.

由定义知 $v^{*i}(v)=a_i$, 从而

$$f(v)=\sum_{i=1}^{n}a_if(v_i)=\sum_{i=1}^{n}f_iv^{*i}(v),$$

即

$$f=\sum_{i=1}^{n}f_iv^{*i},$$

其中 $f_i=f(v_i)$. 由此可见 V^* 的任意一个元素都可以由 $\{v^{*1},\cdots,v^{*n}\}$ 线性表示. 易验证这种表示是唯一的, 因此 $\{v^{*1},\cdots,v^{*n}\}$ 是 V^* 的一组基, 称为 $\{v_1,\cdots,v_n\}$ 的对偶基. 所以 V^* 是 F 上的 n 维向量空间.

若用 V^{**} 表示 V^* 的对偶空间, 则有下面的定理.

定理 1.1 V 是 V^* 的对偶空间, 即 $V=V^{**}$.

证明 定义

$$\langle v,v^*\rangle=v^*(v),\quad v\in V, v^*\in V^*,\tag{1.2}$$

则对任意的 $v^*,w^*\in V^*$, $a\in F$, 有

$$\langle v,v^*+w^*\rangle=(v^*+w^*)(v)=v^*(v)+w^*(v)=\langle v,v^*\rangle+\langle v,w^*\rangle,$$

$$\langle v,aw^*\rangle=(aw^*)(v)=aw^*(v)=a\langle v,w^*\rangle,$$

这说明 $\langle,\rangle$ 是定义在 $V\times V^*$ 上的 F 值函数, 并且对每一个变量都是线性的. 在 (1.2) 式中固定向量 $v\in V$, 则 $\langle v,\cdot\rangle$ 是 V^* 上的 F 值线性函数.

反过来, V^* 上的任意一个 F 值线性函数都可以这样表示. 设 φ 是 V^* 上任意

一个 F 值线性函数, 令 $v=\sum_{i=1}^{n}\varphi(v^{*i})v_i$, 则对任意的 $v^*\in V^*$ 有

$$\langle v,v^*\rangle=\sum_{i=1}^{n}\varphi(v^{*i})\langle v_i,v^*\rangle=\sum_{i=1}^{n}v^*(v_i)\varphi(v^{*i})=\sum_{i=1}^{n}\varphi(v^*(v_i)v^{*i})=\varphi(v^*).$$

因此 V 可以看成 V^* 上的 F 值线性函数构成的向量空间, 即 V 是 V^* 的对偶空间, $V=V^{**}$. □

上面定理说明, V^* 和 V 的对偶关系是相互的.

定义 1.1 向量空间 V 上的一个内积定义为满足下列条件的一个映射 $\langle,\rangle: V\times V\to\mathbb{R}$,

(1) $\langle v,w\rangle=\langle w,v\rangle$;

(2) $\langle av,w\rangle=a\langle v,w\rangle$;

(3) $\langle v_1+v_2,w\rangle=\langle v_1,w\rangle+\langle v_2,w\rangle$;

(4) $\langle v,v\rangle\geqslant 0$, 等号成立当且仅当 $v=0$,

其中 $v,v_1,v_2,w\in V$, $a\in\mathbb{R}$.

利用内积可以在向量空间 V 中引入范数. $v\in V$ 的范数, 或者 v 的长度定义为

$$|v|=\sqrt{\langle v,v\rangle}.$$

$|v|=1$ 的向量称为单位向量. 关于内积有 Schwarz 不等式

$$\langle v,w\rangle\leqslant|v|\cdot|w|,$$

以及三角不等式

$$|v+w|\leqslant|v|+|w|.$$

定义 1.2 向量空间 V 和 V 上的一个内积 $\langle,\rangle$ 一起称为欧氏向量空间, 简记为 $(V,\langle,\rangle)$.

在欧氏向量空间 $(V,\langle,\rangle)$ 中, 可以引入角度这一几何概念. 对于任意两个非零向量 $v,w\in V$, 由下式唯一确定一个角度 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$:

$$\cos\theta=\frac{\langle v,w\rangle}{|v|\cdot|w|}.$$

如果 $\theta=0$, 即 $\langle v,w\rangle=0$, 则称向量 v 和 w 是正交的. 若 $\dim V=n$, $(V,\langle,\rangle)$ 的 n 个两两正交的单位向量称为 V 的一组正交规范基, 通常简称为 V 的一组幺正标架.

定理 1.2 在欧氏向量空间 $(V,\langle,\rangle)$ 中, 总存在幺正标架.

证明 设 $v_1,\cdots,v_n$ 是 V 的任意一组基, 定义

$$e_1=\frac{v_1}{|v_1|},$$

再归纳定义

$$e_k = \frac{v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_i, v_k \rangle e_i}{\left| v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_i, v_k \rangle e_i \right|}, \quad k = 2, \cdots, n.$$

易验证 $e_1, \cdots, e_n$ 为 $(V, \langle, \rangle)$ 的一组正交规范基, 这个构造正交规范基的过程称为 Schmidt 正交化. □

显然, 对于 $(V, \langle, \rangle)$ 的一组幺正标架 $e_1, \cdots, e_n$, 有

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

1.2 张量积与张量

设 V, W, Z 都是数域 F 上的有限维向量空间.

定义 1.3 映射 $f : V \to Z$ 称为线性的, 如果对于任意的 $v_1, v_2 \in V$, $a_1, a_2 \in F$ 有

$$f(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2).$$

映射 $f : V \times W \to Z$ 称为双线性的, 如果 f 对于每一个变量都是线性的, 即对于任意的 $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ 以及 $a_1, a_2 \in F$ 有

$$f(a_1 v_1 + a_2 v_2, w) = a_1 f(v_1, w) + a_2 f(v_2, w),$$

$$f(v, a_1 w_1 + a_2 w_2) = a_1 f(v, w_1) + a_2 f(v, w_2).$$

完全类似地, 可定义 r 重线性映射

$$f : V_1 \times \cdots \times V_r \to Z,$$

其中 $V_1, \cdots, V_r$ 都是 F 上的向量空间. 从 $V_1 \times \cdots \times V_r$ 到 Z 的所有 r 重线性映射的集合记为 $\mathcal{L}(V_1, \cdots, V_r; Z)$.

设 $f, g \in \mathcal{L}(V_1, \cdots, V_r; Z)$, $a \in F$, 对于任意的 $v_i \in V_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$, 令

$$(f + g)(v_1, \cdots, v_r) = f(v_1, \cdots, v_r) + g(v_1, \cdots, v_r),$$

$$(af)(v_1, \cdots, v_r) = af(v_1, \cdots, v_r),$$

则 $f + g, af \in \mathcal{L}(V_1, \cdots, V_r; Z)$. 故 $\mathcal{L}(V_1, \cdots, V_r; Z)$ 关于上面两种运算成为数域 F 上的向量空间.

下面引入向量空间的张量积概念, 目的是把 $V \times W$ 上的双线性映射转化为线性映射.

定义 1.4 给定数域 F 上的两个向量空间 V 和 W, 如果存在 F 上的向量空间 Y 和双线性映射 $h: V \times W \to Y$, 使得对于任意的双线性映射 $f: V \times W \to Z$, 都存在唯一的线性映射 $g: Y \to Z$, 使得

$$f = g \circ h : V \times W \to Z,$$

则称 Y 为 V 和 W 的张量积, 记作 $Y = V \otimes W$.

为了更清楚地了解张量积的概念, 首先看对偶空间 V^* 和 W^* 的张量积. 设 $v^* \in V^*$, $w^* \in W^*$, 其张量积定义为

$$v^* \otimes w^*(v, w) = v^*(v)w^*(w) = \langle v, v^* \rangle \langle w, w^* \rangle,$$

其中 $v \in V, w \in W$, 从而 $v^* \otimes w^*$ 是 $V \times W$ 上的双线性函数. 故运算 $\otimes$ 是从 $V^* \times W^*$ 到 $\mathcal{L}(V, W; F)$ 的双线性映射.

向量空间 V^* 和 W^* 的张量积 $V^* \otimes W^*$ 是指形如 $v^* \otimes w^*(v^* \in V^*, w^* \in W^*)$ 的元素所生成的向量空间. 在 V^* 和 W^* 中分别取基 $\{v^{*i} | \ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 和 $\{w^{*j} | \ 1 \leqslant j \leqslant m\}$, 因为 $\otimes$ 是双线性映射, 所以

$$v^* \otimes w^* = \sum_{i,j} v^*(v_i) w^*(w_j) v^{*i} \otimes w^{*j},$$

其中 $\{v_i\}$ 和 $\{w_j\}$ 分别是 $\{v^{*i}\}$ 和 $\{w^{*j}\}$ 的对偶基, 因此 $V^* \otimes W^*$ 中的元素都可以表示成 $v^{*i} \otimes w^{*j}$ 的线性组合. 容易证明 $v^{*i} \otimes w^{*j}$ 是线性无关的, 所以构成张量积 $V^* \otimes W^*$ 的基, 从而 $V^* \otimes W^*$ 是 $n \times m$ 维向量空间. 另一方面, 容易证明任意一个 F 值双线性函数 $f: V \times W \to F$ 都可以表示成 $v^{*i} \otimes w^{*j}$ 的线性组合, 因此

$$V^* \otimes W^* = \mathcal{L}(V, W; F).$$

向量空间 V 和 W 分别是 V^* 和 W^* 的对偶空间, 完全类似地, 可以定义张量积 $V \otimes W$, 且有

$$V \otimes W = \mathcal{L}(V^*, W^*; F).$$

若令 $\langle v \otimes w, v^* \otimes w^* \rangle = \langle v, v^* \rangle \langle w, w^* \rangle$, 可见 $V \otimes W$ 和 $V^* \otimes W^*$ 是互为对偶的. 因此

$$V^* \otimes W^* = (V \otimes W)^*.$$

定理 1.3 设 $h: V \times W \to V \otimes W$ 是张量积 $\otimes$ 给出的双线性映射, 即对 $v \in V$, $w \in W$ 有

$$h(v, w) = v \otimes w,$$

则对任意的双线性映射 $f: V\times W\to Z$, 存在唯一的线性映射 $g: V\otimes W\to Z$, 使得

$$f=g\circ h: V\times W\to Z.$$

证明 设 $\{v_1,\cdots,v_n\}$ 和 $\{w_1,\cdots,w_m\}$ 分别为 V 和 W 的基. 定义线性映射 $g: V\otimes W\to Z$, 使得它在基上的作用为

$$g(v_i\otimes w_j)=f(v_i,w_j),\quad 1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m,$$

则对任意

$$v=\sum_{i=1}^{n}a_iv_i\in V,\quad w=\sum_{j=1}^{m}b_jw_j\in W,$$

有

$$g(v\otimes w)=\sum_{i,j}a_ib_jg(v_i\otimes w_j)=\sum_{i,j}a_ib_jf(v_i,w_j)=f(v,w),$$

所以 $f=g\circ h$, 并且显然 g 是唯一确定的. □

推论 1.1 向量空间 $\mathcal{L}(V,W;Z)$ 和 $\mathcal{L}(V\otimes W;Z)$ 是同构的.

证明 定义映射

$$\varphi: \mathcal{L}(V\otimes W;Z)\to\mathcal{L}(V,W;Z)$$

为 $\varphi(g)=g\circ h,\ g\in\mathcal{L}(V\otimes W;Z)$, 其中 h 如上面定理中所定义. 由定理 1.3 知 φ 是双射, 显然 φ 是线性的, 因此 φ 是同构映射. □

定理 1.4 张量积运算 $\otimes$ 适合结合律. 即对任意的 $\phi\in V^*$, $\varphi\in W^*$, $\psi\in Z^*$ 有

$$(\phi\otimes\varphi)\otimes\psi=\phi\otimes(\varphi\otimes\psi).$$

证明 对任意 $v\in V$, $w\in W$, $z\in Z$, 有

$$(\phi\otimes\varphi)\otimes\psi(v,w,z)=(\phi\otimes\varphi)(v,w)\psi(z)=\phi(v)\varphi(w)\psi(z).$$

同理可得

$$\phi\otimes(\varphi\otimes\psi)(v,w,z)=\phi(v)\varphi(w)\psi(z).$$

所以

$$(\phi\otimes\varphi)\otimes\psi=\phi\otimes(\varphi\otimes\psi).$$ □

双线性映射的张量积运算可以推广到任意的 r 重线性映射, 也就是可类似定义张量积 $V_1\otimes V_2\otimes\cdots\otimes V_r$, 即有 r 重线性映射

$$h: V_1\times\cdots\times V_r\to V_1\otimes\cdots\otimes V_r,$$

满足：对任意 r 重线性映射 $f \in \mathcal{L}(V_1,\cdots,V_r;Z)$，都存在唯一的线性映射 $g \in \mathcal{L}(V_1\otimes\cdots\otimes V_r;Z)$，使得 $f=g\circ h$. 此时 $\dim(V_1\otimes\cdots\otimes V_r)=\prod\limits_{i=1}^{r}\dim V_i$.

定义 1.5 设 V 是数域 F 上的 n 维向量空间，V^* 为其对偶空间. 张量积

$$V_s^r=\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{r}\otimes\underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{s}$$

中的元素称为 (r,s) 型张量，其中 r 是张量的反变阶数，s 是其协变阶数. 一阶反变张量即为反变向量，F 中的元素看成 (0,0) 型张量. 根据上面的讨论，有 $\dim V_s^r=n^{r+s}$，且

$$V_s^r=\mathcal{L}(\underbrace{V^*,\cdots,V^*}_{r},\underbrace{V,\cdots,V}_{s};F).$$

设 $\{v_i\}$ 是 V 的一组基，$\{\omega^i\}$ 是其对偶基，则空间 V_s^r 的基为

$$v_{i_1}\otimes\cdots\otimes v_{i_r}\otimes\omega^{k_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{k_s},\quad 1\leqslant i_1,\cdots,i_r,k_1,\cdots,k_s\leqslant n.$$

因此任意 (r,s) 型张量 x 可以唯一地表示为

$$x=\sum_{i_1,\cdots,i_r;k_1,\cdots,k_s}x_{k_1\cdots k_s}^{i_1\cdots i_r}v_{i_1}\otimes\cdots\otimes v_{i_r}\otimes\omega^{k_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{k_s},$$

其中 $x_{k_1\cdots k_s}^{i_1\cdots i_r}$ 为张量 x 在如上基下的分量.

在处理张量时，通常采用 Einstein 的和式约定：在一个单项表达式中如果出现重复的上、下指标，表示该式关于这个指标在它的取值范围内求和，而略去和号不写.

(r,s) 型张量构成的空间 V_s^r 是向量空间，所以同类型的张量可以相加，张量也可以进行数乘. 下面定义张量的乘法和缩并这两种重要的运算.

定义 1.6 设 x 是 (r_1,s_1) 型张量，y 是 (r_2,s_2) 型张量，则它们的张量积 $x\otimes y$ 是如下定义的 (r_1+r_2,s_1+s_2) 型张量：

$$\begin{aligned}&x\otimes y(\theta^1,\cdots,\theta^{r_1+r_2},v_1,\cdots,v_{s_1+s_2})\\=&x(\theta^1,\cdots,\theta^{r_1},v_1,\cdots,v_{s_1})\times y(\theta^{r_1+1},\cdots,\theta^{r_1+r_2},v_{s_1+1},\cdots,v_{s_1+s_2}),\end{aligned}$$

$x\otimes y$ 称为张量 x 和 y 的乘法运算，显然张量的乘法运算满足结合律和分配律.

定义 1.7 取两个指标 λ,μ，$1\leqslant\lambda\leqslant r$，$1\leqslant\mu\leqslant s$. 对于任意一个 (r,s) 型张量

$$x=v_1\otimes\cdots\otimes v_r\otimes\theta^1\otimes\cdots\otimes\theta^s\in V_s^r,$$

令

$$C_\lambda^\mu(x)=\langle v_\lambda,\theta^\mu\rangle v_1\otimes\cdots\otimes\hat{v}_\lambda\otimes\cdots\otimes v_r\otimes\theta^1\otimes\cdots\otimes\hat{\theta}^\mu\otimes\cdots\otimes\theta^s,$$

其中记号 ^ 表示去掉该因子, 则 $C_\lambda^\mu(x) \in C_{s-1}^{r-1}$. 将映射 $x \mapsto C_\lambda^\mu(x)$ 作线性扩张就得到线性映射 $C_\lambda^\mu: V_s^r \to V_{s-1}^{r-1}$, 称之为缩并.

设

$$T^r(V) = V_0^r = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r},$$

考虑直和 $T(V) = \sum\limits_{r \geqslant 0} T^r(V)$, $T(V)$ 中元素 x 可以表示成形式和

$$x = \sum_{r \geqslant 0} x^r, \quad x^r \in T^r(V),$$

和式中除去有限项外其余各项都为零. 这样 $T(V)$ 为一个无限维向量空间. 张量的乘法可以通过分配律扩张成 $T(V)$ 上的乘法, 使得 $T(V)$ 成为一个代数, 称为向量空间 V 的张量代数. 类似可以定义 V^* 的张量代数 $T(V^*)$.

下面讨论两类特殊的张量: 对称张量和反对称张量.

用 $\varphi(r)$ 表示自然数 $\{1, \cdots, r\}$ 的置换群. $\sigma \in \varphi(r)$ 可如下决定向量空间 $T^r(V)$ 的一个自同态. 设 $x \in T^r(V)$, 定义

$$\sigma x(\theta^1, \cdots, \theta^r) = x(\theta^{\sigma(1)}, \cdots, \theta^{\sigma(r)}),$$

其中 $\theta^i \in V^*$. 易证, 若 $x = v_1 \otimes \cdots \otimes v_r$, 则

$$\sigma x = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(r)},$$

其中 σ^{-1} 表示 σ 的逆元素.

定义 1.8 设 $x \in T^r(V)$. 若对任意的 $\sigma \in \varphi(r)$, 都有 $\sigma x = x$, 则称 x 是对称的 r 阶反变张量. 若对任意的 $\sigma \in \varphi(r)$, 都有 $\sigma x = (\mathrm{sgn}\sigma)x$, 则称 x 是反对称的 r 阶反变张量, 其中 $\mathrm{sgn}\sigma$ 表示置换 σ 的符号, 即

$$\mathrm{sgn}\sigma = \begin{cases} 1, & \sigma\text{是偶置换}, \\ -1, & \sigma\text{是奇置换}. \end{cases}$$

定理 1.5 设 $x \in T^r(V)$, 则 x 是对称张量当且仅当它的分量关于各指标是对称的; x 是反对称张量当且仅当它的分量关于各指标是反对称的.

证明 设 V 的基底为 $\{v_1, \cdots, v_n\}$, 则当 x 是对称张量时, 对任意的 $\sigma \in \varphi(r)$ 有

$$x^{i_1 \cdots i_r} = x(v^{*i_1}, \cdots, v^{*i_r}) = \sigma x(v^{*i_1}, \cdots, v^{*i_r}) = x(v^{*i_{\sigma(1)}}, \cdots, v^{*i_{\sigma(r)}}) = x^{i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(r)}}.$$

反之亦然. 若 x 是反对称张量, 对任意的 $\sigma \in \varphi(r)$ 有

$$x^{i_1 \cdots i_r} = x(v^{*i_1}, \cdots, v^{*i_r}) = (\mathrm{sgn}\sigma)\sigma x(v^{*i_1}, \cdots, v^{*i_r}) = (\mathrm{sgn}\sigma)x^{i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(r)}}.$$