



FOCUS
聚 焦 图 书

聚骄公司全心专业设计

考研数学 十年真题 全方位解码

世 华 潘正义
主 编

吃透真题，
考研成功一半！

2008版
(数学三)

世界图书出版公司



FOCUS
聚焦图书

聚骄公司全心

考研
数学

十年真题

全方位解码

世 华 潘正义 主编

(数学三)

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

考研数学十年真题全方位解码. 数学三 / 世华, 潘正义主编. — 北京: 世界图书出版公司北京公司, 2006. 2
ISBN 978 - 7 - 5062 - 7339 - 8

I. 考... II. ①世... ②潘... III. 高等数学 — 研究生 — 入学考试 — 自学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006) 第 010961 号

十年真题全方位解码(数学三)

主 编: 世 华 潘正义

责任编辑: 安秋明

封面设计: 耕者工作室

出 版: 世界图书出版公司北京公司

发 行: 世界图书出版公司北京公司

(北京朝内大街 137 号 电话: 88861708 邮编: 100089)

销 售: 各地新华书店

印 刷: 大厂县圣启印务有限公司

开 本: 787 × 1092 毫米 1/16

印 张: 14.5

字 数: 278 千字

版 次: 2007 年 2 月第 2 版 2007 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5062-7339-8/H · 762

定价: 17.80 元

服务热线: 010 - 88861708

前言

本书严格按照最新《数学考试大纲》的要求编写,对十年(2007-1998)来的考研数学真题的进行了详解、分析、归类和题型点对点演练。

本书分为三个部分:

第一部分为2007-1998年的十年真题。目的在于给考生形成一个完整的印象,了解考研数学命题的基本形式和题型分布。考生应充分利用这些真题,在规定时间内完成试卷,以达到模拟现场考试的目的。

第二部分为题型归类总结部分。我们将考研数学知识点分成了几十个不同的题型,将十年真题“打散”开,“融入”到各个题型中。目的在于让考生清楚、直观地看到每个知识点是通过何种题型来考查的,每种题型又有哪些变化形式,这样,可以做到知己知彼。

第三部分为真题及题型演练解析部分。通过“命题目的”、“思路点拨”、“详细解答”、“易错辨析”、“延伸拓展”几个部分,让考生不但知道题目该怎么做,而且知道题目为什么这么设计,易错的点在哪里,真正达到举一反三,触类旁通的目的。每套试卷的考点分布表统计了历年真题的考点分布情况,让考生可以直观地把握考试重点、了解考试特点。

本书使用建议:

在基础复习阶段,考生可以利用第二部分,体会各个知识点和题型的命题形势和特点。同时,对照第三部分,体会各种解题方法和技巧。

在模拟演练阶段,考生应在考试规定的时间内,完成第一部分的真题,锻炼提高解题速度和准确率。然后对照第三部分的真题解析归纳出自己的问题和错误点,并针对这些错误点和薄弱环节,先在《数学复习指南》(陈文灯教授编著)上找到相应的知识点和题型详解,最后结合第二部分的真题和题型演练题进行有针对性地训练。



第一篇 真题回顾

2007 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试卷	(1)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试卷	(5)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试卷	(9)
2004 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试卷	(13)
2003 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试卷	(17)
2002 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试卷	(21)
2001 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试卷	(24)
2000 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试卷	(28)
1999 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试卷	(32)
1998 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试卷	(36)

第二篇 题型归类与演练

第一部分 微积分

第一章 函数、极限、连续

题型 1 求 1^∞ 型极限	(40)
题型 2 求 $\frac{0}{0}$ 型极限	(40)
题型 3 求 $\infty - \infty$ 型极限	(40)
题型 4 求 $\infty \cdot 0$ 型极限	(40)
题型 5 函数性质(奇偶性、单调性、有界性)的判定	(41)
题型 6 无穷小的比较或确定无穷小的阶	(41)
题型 7 数列极限存在判定或证明或求解	(41)
题型 8 函数极限存在的判定或证明或求解	(42)
题型 9 函数的连续的讨论或证明或求逆问题	(42)
题型 10 函数间断点的判定或证明	(43)
题型 11 已知函数的极限存在,反求参数或其他	(43)
题型 12 与极限的定理(介值定理、保号性、单调有界等)相关的命题	(43)

第二章 一元函数微分学

题型 1 与导数和微分的概念和性质相关的命题	(44)
------------------------------	------

题型 2	求复合函数隐函数导数以及高阶导数	(44)
题型 3	函数极值, 拐点的判定或求解	(44)
题型 4	函数(含分段函数)在某点可导或不可导判定	(45)
题型 5	函数在某一区间至少存在一点或两点使某一式子成立的判定式证明	(45)
题型 6	函数不等式的证明	(46)
题型 7	与函数图形相关的命题	(46)
题型 8	求一元函数在一点的切线方程或法线方程	(46)
题型 9	微分学在经济中的应用题	(47)
题型 10	与导数的几何意义相关的命题	(47)
题型 11	方程的根的判定式证明	(48)

第三章 一元函数积分学

题型 1	求不定积分或原函数	(48)
题型 2	函数的定积分的计算	(48)
题型 3	定积分等式或不等式的判别或证明	(49)
题型 4	求反常积分	(49)
题型 5	求平面图形的面积	(49)
题型 6	求平面图形绕坐标轴的旋转体的体积	(50)

第四章 多元函数微积分学

题型 1	求多元复合函数的偏导、全导或全微分	(50)
题型 2	多元函数极值的判定或求解或应用	(51)
题型 3	二重积分的计算	(52)
题型 4	更换二重积分的积分次序	(53)

第五章 无穷级数

题型 1	无穷级数敛散性的判定	(53)
题型 2	无穷级数的求和与展开	(54)
题型 3	求幂级数的收敛域或收敛半径或和函数	(55)

第六章 常微分方程与差分方程

题型 1	与线性微分方程解的性质和结构相关的命题	(55)
题型 2	求一阶线性微分方程的通解或特解	(55)
题型 3	求二阶齐次线性微分方程的通解或特解	(56)
题型 4	求一阶差分方程的通解	(56)

第二部分 线性代数

第一章 行列式

题型 1	求矩阵的行列式	(57)
------	---------------	------

第二章 矩阵

题型 1	与矩阵的逆相关的计算、判定或证明	(57)
题型 2	矩阵的运算	(57)

题型 3	矩阵幂的计算	(58)
题型 4	矩阵等价的判定	(58)
题型 5	含伴随矩阵的计算或证明	(58)
题型 6	与矩阵的秩相关的计算、判定或证明	(59)
题型 7	与初等矩阵或初等变换相关的命题	(60)

第三章 向量

题型 1	向量组线性相关性的判断或证明	(60)
题型 2	根据向量的线性相关性求参数	(61)
题型 3	向量的线性表出	(61)
题型 4	讨论含量变量的向量的线性表出	(61)

第四章 线性方程组

题型 1	与解的判定、性质和结构相关的命题的判定或证明	(62)
题型 2	线性方程组的通解的计算或判定	(63)
题型 3	讨论含参数的线性方程组的解的情况,如果方程组有解时求出通解	(63)

第五章 矩阵的特征值和特征向量

题型 1	求矩阵的特征值或特征向量	(64)
题型 2	已知矩阵的特征值和特征向量,求另一个矩阵的特征值、特征向量或参数	(65)
题型 3	矩阵对角化的判定或证明或对角阵求解	(65)

第六章 二次型

题型 1	化二次型为标准型有关命题	(66)
题型 2	关于矩阵的正定性	(66)

第三部分 概率论与数理统计

第一章 概率论与数理统计

题型 1	求随机事件的概率	(68)
题型 2	随机事件的关系运算	(68)

第二章 随机变量及其分布

题型 1	求一维随机变量的分布律、分布密度或分布函数	(69)
题型 2	求一维随机变量函数的分布	(69)
题型 3	与一维随机变量概念、性质相关的命题	(70)

第三章 二维随机变量及其分布

题型 1	求二维随机变量的联合分布规律或分布函数或边缘概率分布	(70)
题型 2	求二维随机变量的分布或分布密度或边缘概率密度函数	(71)
题型 3	两个或多个随机变量的独立性或相关性的判定和证明	(72)
题型 4	与二维随机变量独立性相关的命题	(72)
题型 5	求随机变量的相关系数	(72)
题型 6	求含两个随机变量的函数的概率分布或概率密度	(73)

第四章 随机变量的数字特征

题型 1 求一维随机变量函数的数字特征	(73)
题型 2 求二维随机变量或函数的数字特征	(74)
题型 3 求两个随机变量的协方差与相关系数	(74)
题型 4 数字特征在经济中的应用题	(74)

第五章 大数定律和中心极限定理

题型 1 估计概率的值	(75)
题型 2 与中心极限定理有关的命题	(75)

第六章 数理统计

题型 1 样本容量的计算	(75)
题型 2 分位数的求解	(76)
题型 3 参数的矩估计或最大的似然估计问题	(76)
题型 4 统计量的分布的求解或判定或证明	(77)
题型 5 求总体或统计量的数字特征	(78)
题型 6 求单个正态总体均值的置信区间	(78)
题型演练参考答案	(79)

第三篇 答案详解

2007 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题详解、拓展及评析	(105)
2007 年经济数学三试卷评析	(116)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题详解、拓展及评析	(117)
2006 年经济数学三试卷评析	(126)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题详解、拓展及评析	(127)
2005 年经济数学三试卷评析	(138)
2004 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题详解、拓展及评析	(139)
2004 年经济数学三试卷评析	(151)
2003 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题详解、拓展及评析	(152)
2003 年经济数学三试卷评析	(163)
2002 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题详解、拓展及评析	(164)
2002 年经济数学三试卷评析	(175)
2001 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题详解、拓展及评析	(176)
2001 年经济数学三试卷评析	(186)
2000 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题详解、拓展及评析	(187)
2000 年经济数学三试卷评析	(198)
1999 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题详解、拓展及评析	(199)
1999 年经济数学三试卷评析	(210)
1998 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学三试题详解、拓展及评析	(211)
1998 年经济数学三试卷评析	(223)

第一篇 真题回顾

2007 年全国硕士研究生入学统一考试 经济数学三试卷

一、选择题(本题共 10 小题,每小题 4 分,满分 40 分,在每小题给的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后括号内)

B (1) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时,与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

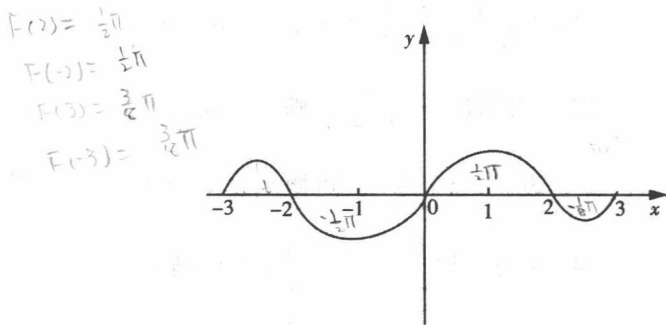
- A. $1 - e^{\sqrt{x}}$ B. $\ln(1 + \sqrt{x})$ C. $\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1$ D. $1 - \cos \sqrt{x}$

D (2) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续,下列命题错误的是:

- A. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f(0) = 0$ B. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在,则 $f(0) = 0$
B. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在 D. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在

(3) 如图,连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-3, -2]$, $[2, 3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周,在区间 $[-2, 0]$, $[0, 2]$ 的图形分别是直径为 2 的上、下半圆周,设 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. 则下列结论正确的是:

- A. $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$
B. $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$
C. $F(-3) = \frac{3}{4}F(2)$
D. $F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2)$



B (4) 设函数 $f(x, y)$ 连续,且二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy$ 等于

- A. $\int_0^1 dy \int_{\pi + \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$ B. $\int_0^1 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$
C. $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi + \arcsin y} f(x, y) dx$ D. $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx$



(5) 设某商品的需求函数为 $Q = 160 - 2P$, 其中 P, Q 分别表示需要量和价格,如果该商品需求弹性的绝对值等于 1,则商品的价格是

- A. 10 B. 20 C. 30 D. 40

$$\frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}} = 1 \quad \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}} = 1 \quad \frac{P}{160 - 2P} = 1$$

D (6) 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$, 渐近线的条数为

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

10 (7) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是

A. $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$.

B. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$.

C. $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1$.

D. $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1$.

B (8) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 与 B

A. 合同, 且相似.

B. 合同, 但不相似.

C. 不合同, 但相似.

D. 既不合同, 也不相似.

C (9) 某人向同一目标独立重复射击, 每次射击命中目标的概率为 $p (0 < p < 1)$, 则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为

A. $3p(1-p)^2$.

B. $6p(1-p)^2$.

C. $3p^2(1-p)^2$.

D. $6p^2(1-p)^2$.

18 (10) 设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布, 且 X 与 Y 不相关, $f_X(x), f_Y(y)$ 分别表示 X, Y 的概率密度, 则在 $Y = y$ 的条件下, X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为

A. $f_X(x)$.

B. $f_Y(y)$.

C. $f_X(x)f_Y(y)$.

D. $\frac{f_X(x)}{f_Y(y)}$.

二、填空题: 11 - 16 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} (\sin x + \cos x) = \frac{0}{(-1)^n n! 2^n}$.

(12) 设函数 $y = \frac{1}{2x+3}$, 则 $y^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n n! 2^n}{3^{n+1}}$.

(13) 设 $f(u, v)$ 为二元可微函数, $z = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right)$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x}$.

(14) 微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^3$ 满足 $y|_{x=1} = 1$ 的特解为 $y = \frac{x}{\sqrt{\ln x + 1}}$.

(15) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A^3 的秩为 1.

(16) 在区间 $(0, 1)$ 中随机地取两个数, 则这两个数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为 $\frac{3}{4}$.

三、解答题:17 - 24 小题,共 86 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y \ln y - x + y = 0$ 确定, 试判断曲线 $y = y(x)$ 在点 $(1, 1)$ 附近的凹凸性.

$$\ln y \cdot y' + y' - 1 + y' = 0$$

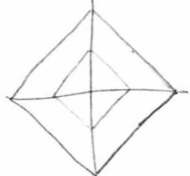
$$y' = \frac{1}{\ln y + 2}$$

(18) (本题满分 11 分)

设二元函数

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leq 1. \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 < |x| + |y| \leq 2. \end{cases}$$

计算二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 2\}$.



(19) (本题满分 11 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值, 又 $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$. 证明:

(I) 存在 $\eta \in (a, b)$, 使得 $f(\eta) = g(\eta)$;

(II) 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

(20) (本题满分 10 分)

将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4}$ 展开成 $x - 1$ 的幂级数, 并指出其收敛区间.

(21) (本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0, \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

与方程

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$$

②

有公共解,求 a 的值及所有公共解.

(22) (本题满分 11 分)

设 3 阶对称矩阵 A 的特征向量值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2, \alpha_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量,记 $B = A^5 - 4A^3 + E$ 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(I) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量,并求 B 的全部特征值与特征向量

(II) 求矩阵 B .

(23) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(I) 求 $P\{X > 2Y\}$

(II) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

(24) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta} & 0 < x < \theta \\ \frac{1}{2(1-\theta)} & \theta \leq x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

其中参数 $\theta (0 < \theta < 1)$ 未知, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, $\bar{X}$ 是样本均值

(I) 求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$

(II) 判断 $4\bar{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量,并说明理由.

2006 年全国硕士研究生入学统一考试 经济数学三试卷

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上.)

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n} = \underline{1}$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 2$ 的某领域内可导,且 $f'(x) = e^{f(x)}$, $f(2) = 1$, 则 $f'''(2) = \underline{2e^3}$.

(3) 设函数 $f(u)$ 可微,且 $f'(0) = \frac{1}{2}$, 则 $z = f(4x^2 - y^2)$ 在点 $(1, 2)$ 处的全微分 $dz \Big|_{(1,2)} = \underline{4dx - 2dy}$.

(4) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, E 为 2 阶单位矩阵,矩阵 B 满足 $BA = B + 2E$, 则 $|B| = \underline{2}$.

(5) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且均服从区间 $[0, 3]$ 上的均匀分布,则 $P\{\max(X, Y) \leq 1\} = \underline{\frac{1}{9}}$.

(6) 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} (-\infty < x < +\infty)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为总体的简单随机样本,其样本方差为 S^2 , 则 $ES^2 = \underline{1}$.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 设函数 $y = f(x)$ 具有二阶导数,且 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分,若 $\Delta x > 0$, 则

- (A) $0 < dy < \Delta y$ (B) $0 < \Delta y < dy$
(C) $\Delta y < dy < 0$ (D) $dy < \Delta y < 0$ []

(8) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续,且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2)}{h^2} = 1$, 则

- (A) $f(0) = 0$ 且 $f'_-(0)$ 存在 (B) $f(0) = 1$ 且 $f'_-(0)$ 存在
(C) $f(0) = 0$ 且 $f'_+(0)$ 存在 (D) $f(0) = 1$ 且 $f'_+(0)$ 存在 []

(9) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则级数

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛 (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛
(C) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 收敛 (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛 []

(10) 设非齐次线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 有两个的解 $y_1(x), y_2(x)$, C 为任意常数,则该方程通解是

- (A) $C[y_1(x) - y_2(x)]$ (B) $y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$
(C) $C[y_1(x) + y_2(x)]$ (D) $y_1(x) + C[y_1(x) + y_2(x)]$ []

D (11) 设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x, y) \neq 0$, 已知 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是

(A) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$

(B) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$

(C) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$

(D) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ []

B (12) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均为 n 维列向量, A 是 $m \times n$ 矩阵, 下列正确的是

(A) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关

(B) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关

(C) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关

(D) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关 []

B (13) 设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B , 再将 B 的第一列的 -1 倍加到第 2 列得 C ,

记 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则

(A) $C = P^{-1}AP$

(B) $C = PAP^{-1}$

(C) $C = P^TAP$

(D) $C = PAP^T$ []

B (14) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, 随机变量 Y 服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 且 $P\{|X - \mu_1| < 1\} > P\{|Y - \mu_2| < 1\}$, 则必有

(A) $\sigma_1 < \sigma_2$

(B) $\sigma_1 > \sigma_2$

(C) $\mu_1 < \mu_2$

(D) $\mu_1 > \mu_2$ []

三、解答题 (本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 7 分)

设 $f(x, y) = \frac{y}{1+xy} - \frac{1-y\sin\frac{\pi x}{y}}{\arctan x}, x > 0, y > 0$, 求

(I) $g(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y)$

(II) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

$g(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y)$

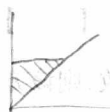
$= \frac{1}{x} - \frac{1-\pi x}{\arctan x}$

$\begin{aligned} &= \frac{\arctan x - x + \pi x^2}{x \arctan x} \\ &= \frac{\arctan x - x}{x^2} + \pi \\ &= \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{2x} + \pi \end{aligned}$

$= \pi$

(16) (本题满分 7 分)

计算二重积分 $\iint_D \sqrt{y^2 - xy} dx dy$, 其中 D 是由直线 $y = x, y = 1, x = 0$, 所围成的平面区域.



$\int_0^1 dy \int_0^y \sqrt{y^2 - xy} dx$

$= \int_0^1 y dy \int_0^y \sqrt{1 - \frac{1}{y}x} dx$

$= \frac{2}{3} \int_0^1 y^2 dy$

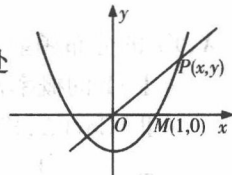
(17) (本题满分 10 分)

证明: 当 $0 < a < b < \pi$ 时, $b \sin b + 2 \cos b + \pi b > a \sin a + 2 \cos a + \pi a$.

$$f(x) = x \sin x + 2 \cos x + \pi x$$

(18) (本题满分 8 分)

在 XOY 坐标平面上, 连续曲线 L 过点 $M(1,0)$, 其上任意点 $P(x,y)$ ($x \neq 0$) 处的切线的斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax (常数 $a > 0$)



(I) 求 L 的方程;

(II) 当 L 与直线 $y = ax$ 所围成平面图形的面积为 $\frac{8}{3}$ 时, 确定 a 的值.

$$y = f(x)$$

$$y' - \frac{y}{x} = ax$$

$$y = e^{\int -\frac{1}{x} dx} \left[\int ax e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right]$$

$$= x(ax + C)$$

(19) (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n-1)}$ 的收敛域及和函数 $S(x)$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$$

(20) (本题满分 13 分)

设 4 维向量组 $\alpha_1 = (1+a, 1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (2, 2, +a, 2, 2)^T, \alpha_3 = (3, 3, 3+a, 3)^T, \alpha_4 = (4, 4, 4, 4+a)^T$. 问为何值时 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关? 当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关时, 求其一个极大线性无关组, 并将其余向量用该极大线性无关组线性表出.

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$$

当 $a=0$ 时

$$AX=0 \text{ 有非0解}$$

当 $a=-10$

$$|A|=0$$

$$a=0 \quad a=-10$$

(21) (本题满分 13 分)

设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $I_1 = (-1, 2, -1)^T, I_2 = (0, -1, 1)^T$, 是线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解.

(I) 求 A 的特征值与特征向量

(II) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ , 使得 $Q^T A Q = \Lambda$;

(III) 求 A 及 $(A - \frac{3}{2}E)^6$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

$$\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \beta_1 I_1 = 0 \\ \beta_2 I_2 = 0 \end{cases}$$

$$I_3 = (1, 1, 1)^T$$

$$\beta_1 = I_1 = (-1, 2, -1)^T$$

$$\beta_2 = I_2 = \frac{(I_2, \beta_1)}{(I_1, \beta_1)} \beta_1$$

$$= (-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})^T$$

(22)(本题满分 13 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 令 $Y = X^2$, $F(X, Y)$ 为二维随机变量

(X, Y) 的分布函数, 求:

(I) Y 的概率密度 $f_Y(y)$;

(II) $\text{Cov}(X, Y)$;

(III) $F(-\frac{1}{2}, 4)$.

$$\text{II) } \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \\ = E(X^3) - E(X) \cdot E(X^2)$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \\ = \int_{-1}^0 \frac{1}{2} x dx + \int_0^2 \frac{1}{4} x dx$$

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} \\ = P\{X^2 \leq y\} \\ = P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\} \\ = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

$$\text{III) } P\{X \leq \frac{1}{2}, Y \leq 4\} \\ = P\{-2 \leq X \leq \frac{1}{2}\} \\ = P\{-1 \leq X \leq \frac{1}{2}\}$$

(23)(本题满分 13 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \begin{cases} \theta, & 0 < x < 1 \\ 1 - \theta, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 其中 θ 是未知参数 ($0 < \theta < 1$), $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体的随机样本, 记 N 为样本值 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 中小于 1 的个数, 求:

(I) θ 的矩估计;

(II) θ 的最大似然估计.

$$\text{I) } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x; \theta) dx$$

$$= \int_0^1 x \theta dx + \int_1^2 (1 - \theta) x dx$$

$$= \frac{1}{2} \theta + \frac{3}{2} (1 - \theta)$$

$$= \frac{3}{2} - \theta = \bar{X}$$

$$\hat{\theta} = \frac{3}{2} - \bar{X}$$

$$\text{II) } L(\theta) = f(x_1; \theta) \cdot f(x_2; \theta) \cdots f(x_n; \theta)$$

$$= \theta^N (1 - \theta)^{n - N}$$

$$\ln L(\theta) = N \ln \theta + (n - N) \ln(1 - \theta)$$

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = \frac{N}{\theta} - \frac{n - N}{1 - \theta} = 0$$

$$N - \theta N - \theta n + N \theta = 0$$

$$\theta = \frac{N}{n}$$

2005 年全国硕士研究生入学统一考试 经济数学三试卷

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上.)

(1) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2x}{x^2 + 1} = \underline{2}$.

(2) 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足初始条件 $y(1) = 2$ 的特解为 $y = 2e^{-\ln x}$.

(3) 设二元函数 $z = xe^{xy} + (x+1)\ln(1+y)$, 则 $dz \Big|_{(1,0)} = \underline{2edx + 1e + 2edy}$.

(4) 设行向量组 $(2, 1, 1, 1), (2, 1, a, a), (3, 2, 1, a), (4, 3, 2, 1)$ 线性相关, 且 $a \neq 1$, 则 $a = \underline{\frac{1}{2}}$.

(5) 从数 1, 2, 3, 4 中任取一个数, 记为 X , 再从 $1, \dots, X$ 中任取一个数, 记为 Y , 则 $P\{Y = 2\} = \underline{\frac{13}{48}}$.

(6) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率分布为

		Y	
		0	1
X	0	0.4	a
	1	b	0.1

若随机事件 $\{X = 0\}$ 与 $\{X + Y = 1\}$ 相互独立, 则 $a = \underline{0.4}$, $b = \underline{0.1}$.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 当 a 取下列哪个值时, 函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - a$ 恰有两个不同的零点.

- (A) 2. (B) 4. (C) 6. (D) 8. []

(8) 设 $I_1 = \iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$, $I_2 = \iint_D \cos(x^2 + y^2) d\sigma$, $I_3 = \iint_D \cos(x^2 + y^2)^2 d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则

- (A) $I_3 > I_2 > I_1$. (B) $I_1 > I_2 > I_3$.
(C) $I_2 > I_1 > I_3$. (D) $I_3 > I_1 > I_2$. []

(9) 设 $a_n > 0, n = 1, 2, \dots$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 则下列结论正确的是

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 发散. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 发散.
(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ 收敛. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$ 收敛. []

(10) 设 $f(x) = x \sin x + \cos x$, 下列命题中正确的是