FOCUS 聚焦图书

聚骄公司全心专业设计

考研数学十年真题全方位解码

世华　潘正义

主编

吃透真题，

考研成功一半！

2008版

（数学三）

世界图书出版公司

FOCUS 聚焦图书 聚骄公司全心

考研数学 十年真题

全方位解码

世 华　潘正义 主编

（数学三）

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

考研数学十年真题全方位解码. 数学三/世华,潘正义主编. —北京:世界图书出版公司北京公司,2006.2
ISBN 978-7-5062-7339-8

Ⅰ.考… Ⅱ.①世…②潘… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 010961 号

十年真题全方位解码(数学三)

主　　编: 世　华　潘正义
责任编辑: 安秋明
封面设计: 耕者工作室

出　　版: 世界图书出版公司北京公司
发　　行: 世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街 137 号　电话:88861708　邮编:100089)
销　　售: 各地新华书店
印　　刷: 大厂县圣启印务有限公司

开　　本: 787 × 1092 毫米　1/16
印　　张: 14.5
字　　数: 278 千字
版　　次: 2007 年 2 月第 2 版　2007 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5062-7339-8/H·762　　**定价:17.80 元**

服务热线: 010-88861708

前　言

本书严格按照最新《数学考试大纲》的要求编写，对十年（2007 – 1998）来的考研数学真题的进行了详解、分析、归类和题型点对点演练。

本书分为三个部分：

第一部分为 2007 – 1998 年的十年真题。目的在于给考生形成一个完整的印象，了解考研数学命题的基本形式和题型分布。考生应充分利用这些真题，在规定时间内完成试卷，以达到模拟现场考试的目的。

第二部分为题型归类总结部分。我们将考研数学知识点分成了几十个不同的题型，将十年真题"打散"开，"融入"到各个题型中。目的在于让考生清楚、直观地看到每个知识点是通过何种题型来考查的，每种题型又有哪些变化形式，这样，可以做到知己知彼。

第三部分为真题及题型演练解析部分。通过"命题目的"、"思路点拨"、"详细解答"、"易错辨析"、"延伸拓展"几个部分，让考生不但知道题目该怎么做，而且知道题目为什么这么设计，易错的点在哪里，真正达到举一反三，触类旁通的目的。每套试卷的考点分布表统计了历年真题的考点分布情况，让考生可以直观地把握考试重点、了解考试特点。

本书使用建议：

在基础复习阶段，考生可以利用第二部分，体会各个知识点和题型的命题形势和特点。同时，对照第三部分，体会各种解题方法和技巧。

在模拟演练阶段，考生应在考试规定的时间内，完成第一部分的真题，锻炼提高解题速度和准确率。然后对照第三部分的真题解析归纳出自己的问题和错误点，并针对这些错误点和薄弱环节，先在《数学复习指南》（陈文灯教授编著）上找到相应的知识点和题型详解，最后结合第二部分的真题和题型演练题进行有针对性地训练。

目 录

第一篇 真题回顾

第二篇 题型归类与演练

第一部分 微积分

第一章 函数、极限、连续

第二章 一元函数微分学

第三章　一元函数积分学

第四章　多元函数微积分学

第五章　无穷级数

第六章　常微分方程与差分方程

第二部分　线性代数

第一章　行列式

第二章　矩阵

第一篇　真题回顾

2007 年全国硕士研究生入学统一考试
经济数学三试卷

一、选择题(本题共 10 小题,每小题 4 分,满分 40 分,在每小题给的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后括号内)

B (1) 当 $x \to 0^+$ 时,与$\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

A. $1 - e^{\sqrt{x}}$　　B. $\ln(1 + \sqrt{x})$　　C. $\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1$　　D. $1 - \cos\sqrt{x}$

D (2) 设函数$f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续,下列命题错误的是:

A. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在,则$f(0) = 0$　　B. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x) + f(-x)}{x}$存在,则$f(0) = 0$

B. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在,则$f'(0)$ 存在　　D. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x) + f(-x)}{x}$存在,则$f'(0)$ 存在

C (3) 如图,连续函数$y = f(x)$ 在区间$[-3, -2]$,$[2,3]$上的图形分别是直径为1 的上、下半圆周,在区间$[-2,0]$,$[0,2]$ 的图形分别是直径为2 的上、下半圆周,设$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. 则下列结论正确的是:

$f(t) = -f(-t)$

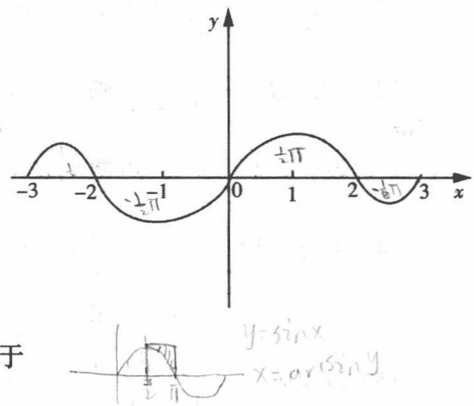
A. $F(3) = -\dfrac{3}{4}F(-2)$

B. $F(3) = \dfrac{5}{4}F(2)$

C. $F(-3) = \dfrac{3}{4}F(2)$

D. $F(-3) = -\dfrac{5}{4}F(-2)$

$F(2) = \frac{1}{2}\pi$
$F(-2) = \frac{1}{2}\pi$
$F(3) = \frac{3}{8}\pi$
$F(-3) = \frac{3}{8}\pi$



B (4) 设函数$f(x,y)$ 连续,且二次积分$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\,dy$ 等于

$y = \sin x$
$x = \arcsin y$

A. $\int_0^1 dy\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\,dx.$　　B. $\int_0^1 dy\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\,dx.$

C. $\int_0^1 dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y}f(x,y)\,dx.$　　D. $\int_0^1 dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\,dx.$

D (5) 设某商品的需求函数为$Q = 160 - 2P$,其中P,Q分别表示需要量和价格,如果该商品需求弹性的绝对值等于1,则商品的价格是

A. 10　　B. 20　　C. 30　　D. 40

$\dfrac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}}$　$\left|\dfrac{\Delta Q}{\Delta P}\cdot\dfrac{P}{Q}\right| = 1$　　$\dfrac{P}{160-2P} = \dfrac{1}{2}$

$2\cdot\left|\dfrac{P}{Q}\right| = 1$

D (6) 曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$，渐近线的条数为

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

(7) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是

A. $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$.　　B. $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$.

C. $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$.　　D. $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$.

B (8) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 A 与 B

A. 合同，且相似.　　B. 合同，但不相似.

C. 不合同，但相似.　　D. 既不合同，也不相似.

C (9) 某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率为 $p(0<p<1)$，则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为

A. $3p(1-p)^2$.　　B. $6p(1-p)^2$.

C. $3p^2(1-p)^2$　　D. $6p^2(1-p)^2$.

(10) 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，且 X 与 Y 不相关，$f_X(x)$，$f_Y(y)$ 分别表示 X,Y 的概率密度，则在 $Y=y$ 的条件下，X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$ 为

A. $f_X(x)$.　　B. $f_Y(y)$.

C. $f_X(x)f_Y(y)$.　　D. $\frac{f_X(x)}{f_Y(y)}$.

二、填空题：11 – 16 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$ $\underline{\ 0\ }$.

(12) 设函数 $y=\frac{1}{2x+3}$，则 $y^{(n)}(0)=$ $\underline{\ \frac{(-1)^n n!\,2^n}{3^{n+1}}\ }$.

(13) 设 $f(u,v)$ 为二元可微函数，$z=f\left(\frac{y}{x},\frac{x}{y}\right)$，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

(14) 微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^3$ 满足 $y\big|_{x=1}=1$ 的特解为 $y=$ $\underline{\ \frac{x}{\sqrt{\ln x+1}}\ }$.

(15) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 A^3 的秩为 $\underline{\ 1\ }$.

(16) 在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数，则这两个数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为 $\underline{\ \frac{3}{4}\ }$.

三、解答题:17 - 24 小题,共 86 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y\ln y - x + y = 0$ 确定,试判断曲线 $y = y(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近的凹凸性.

$\ln y \cdot y' + y' - 1 + y' = 0$

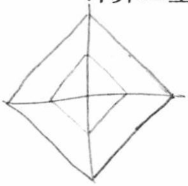
$y' = \dfrac{1}{\ln y + 2}$

(18) (本题满分 11 分)

设二元函数

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leqslant 1. \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 < |x| + |y| \leqslant 2. \end{cases}$$

计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$,其中 $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| \leqslant 2\}$.



(19) (本题满分 11 分)

设函数 $f(x)$,$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值,又 $f(a) = g(a)$,$f(b) = g(b)$. 证明:

(Ⅰ) 存在 $\eta \in (a,b)$,使得 $f(\eta) = g(\eta)$;

(Ⅱ) 存在 $\xi \in (a,b)$,使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

(20) (本题满分 10 分)

将函数 $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x - 4}$ 展开成 $x - 1$ 的幂级数,并指出其收敛区间.

(21) (本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0, \end{cases} \qquad ①$$

与方程

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \qquad ②$$

有公共解,求 a 的值及所有公共解.

(22)(本题满分 11 分)

设 3 阶对称矩阵 A 的特征向量值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2, \alpha_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量,记 $B = A^5 - 4A^3 + E$ 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ)验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量,并求 B 的全部特征值与特征向量

(Ⅱ)求矩阵 B.

(23)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 - x - y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(Ⅰ)求 $P\{X > 2Y\}$

(Ⅱ)求 $Z = X + Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

(24)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\theta} & 0 < x < \theta \\ \dfrac{1}{2(1-\theta)} & \theta \leq x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

其中参数 $\theta(0 < \theta < 1)$ 未知, $X_1, X_2 \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, $\overline{X}$ 是样本均值

(Ⅰ)求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$

(Ⅱ)判断 $4\overline{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量,并说明理由.

2006年全国硕士研究生入学统一考试
经济数学三试卷

一、填空题（本题共6小题，每小题4分，满分24分. 把答案填在题中横线上.）

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$ ___1___.

(2) 设函数$f(x)$在$x=2$的某领域内可导，且$f'(x)=e^{f(x)}$，$f(2)=1$，则$f'''(2)=$ ___$2e^3$___.

(3) 设函数$f(u)$可微，且$f'(0)=\frac{1}{2}$，则$z=f(4x^2-y^2)$在点(1,2)处的全微分$dz\Big|_{(1,2)}=$ ___$4dx-2dy$___.

(4) 设矩阵$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，$E$为2阶单位矩阵，矩阵$B$满足$BA=B+2E$，则$|B|=$ ___2___.

(5) 设随机变量X与Y相互独立，且均服从区间[0,3]上的均匀分布，则$P\{max(X,Y)\leq 1\}=$ ___$\frac{1}{9}$___.

(6) 设总体X的概率密度为$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}(-\infty<x<+\infty)$，$X_1,X_2,\cdots\cdots X_n$为总体的简单随机样本，其样本方差为$S^2$，则$ES^2=$ ___2___.

二、选择题（本题共8小题，每小题4分，满分32分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.）

(7) 设函数$y=f(x)$具有二阶导数，且$f'(x)>0$，$f''(x)>0$，Δx为自变量x在点x_0处的增量，Δy与dy分别为$f(x)$在点x_0处对应的增量与微分，若$\Delta x>0$，则

A

(A) $0<dy<\Delta y$　　(B) $0<\Delta y<dy$

(C) $\Delta y<dy<0$　　(D) $dy<\Delta y<0$　　【　　】

(8) 设函数$f(x)$在$x=0$处连续，且$\lim_{h\to 0}\frac{f(h^2)}{h^2}=1$，则

C

(A) $f(0)=0$且$f'_-(0)$存在　　(B) $f(0)=1$且$f'_-(0)$存在

(C) $f(0=0)$且$f'_+(0)$存在　　(D) $f(0)=1$且$f'_+(0)$存在　　【　　】

(9) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则级数

D

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$收敛　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$收敛　　【　　】

(10) 设非齐次线性微分方程$y'+P(x)y=Q(x)$有两个的解$y_1(x)$，$y_2(x)$，C为任意常数，则该方程通解是

B

(A) $C[y_1(x)-y_2(x)]$　　(B) $y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$

(C) $C[y_1(x)+y_2(x)]$　　(D) $y_1(x)+C[y_1(x)+y_2(x)]$　　【　　】

D (11) 设$f(x,y)$与$\varphi(x,y)$均为可微函数,且$\varphi'_y(x,y)\neq 0$,已知(x_0,y_0)是$f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$下的一个极值点,下列选项正确的是

(A) 若$f'_x(x_0,y_0)=0$,则$f'_y(x_0,y_0)=0$

(B) 若$f'_x(x_0,y_0)=0$,则$f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

(C) 若$f'_x(x_0,y_0)\neq 0$,则$f'_y(x_0,y_0)=0$

(D) 若$f'_x(x_0,y_0)\neq 0$,则$f'_y(x_0,y_0)\neq 0$ 【 】

D (12) 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots\alpha_s$,均为$n$维列向量,$A$是$m\times n$矩阵,下列正确的是

(A) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$线性相关,则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots\cdots,A\alpha_s$线性相关

(B) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$线性相关,则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots\cdots,A\alpha_s$线性无关

(C) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$线性无关,则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots\cdots,A\alpha_s$线性相关

(D) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$线性无关,则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots\cdots,A\alpha_s$线性无关 【 】

(13) 设A为3阶矩阵,将A的第2行加到第1行得B,再将B的第一列的-1倍加到第2列得C,
B

记$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,则

(A)$C=P^{-1}AP$ (B)$C=PAP^{-1}$

(C)$C=P^{T}AP$ (D)$C=PAP^{T}$ 【 】

B (14) 设随机变量X服从正态分布$N(\mu_1,\sigma_1^2)$,随机变量Y服从正态分布$N(\mu_2,\sigma_2^2)$,且$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$,则必有

(A)$\sigma_1<\sigma_2$ (B)$\sigma_1>\sigma_2$

(C)$\mu_1<\mu_2$ (D)$\mu_1>\mu_2$ 【 】

三、解答题(本题共9小题,满分94分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分7分)

设$f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\frac{\pi x}{y}}{\arctan x},x>0,y>0$,求

(Ⅰ)$g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$

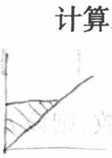
(Ⅱ)$\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)$

$g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$
$=\frac{1}{x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)$
$=\frac{\arctan x-x+\pi x^2}{x\arctan x}$
$=\frac{\arctan x-x}{x^2}+\pi$
$=\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{2x}+\pi$
$=\pi$

(16)(本题满分7分)

计算二重积分$\iint\limits_{D}\sqrt{y^2-xy}\,dxdy$,其中$D$是由直线$y=x,y=1,x=0$,所围成的平面区域.



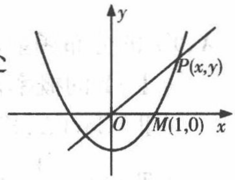
$\int_0^1 dy\int_0^y\sqrt{y^2-xy}\,dx$
$=\int_0^1 y\,dy\int_0^y\sqrt{1-\frac{1}{y}x}\,dx$
$=\frac{2}{3}\int_0^1 y^2\,dy$

(17)(本题满分 10 分)

证明:当 $0 < a < b < \pi$ 时,$b\sin b + 2\cos b + \pi b > a\sin a + 2\cos a + \pi a$.

$f(x) = x\sin x + 2\cos x + \pi x$

(18)(本题满分 8 分)



在 XOY 坐标平面上,连续曲线 L 过点 $M(1,0)$,其上任意点 $P(x,y)(x \neq 0)$ 处的切线的斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax(常数 $a > 0$)

(Ⅰ)求 L 的方程;

(Ⅱ)当 L 与直线 $y = ax$ 所围成平面图形的面积为 $\frac{8}{3}$ 时,确定 a 的值.

(I)令 $y=f(x)$

$y' - \frac{y}{x} = ax$

$y = e^{-\int -\frac{1}{x}dx}\left[\int ax e^{\int -\frac{1}{x}dx} dx + c\right]$

$= x(ax+c)$

$y(1)=0$

$\therefore c=-a$

$y = ax^2 - ax$

(II) $\begin{cases} y=ax \\ y=ax^2-ax \end{cases}$

$x_1=0,\ x_2=2$

$\int_0^2 2ax - ax^2\, dx = \frac{8}{3}$

$a \cdot (x^2 - \frac{1}{3}x^3)\Big|_0^2 = \frac{8}{3}$

$a=2$

(19)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}$ 的收敛域及和函数 $S(x)$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$

(20)(本题满分 13 分)

设 4 维向量组 $\alpha_1 = (1+a,1,1,1)^T$,$\alpha_2 = (2,2,+a,2,2)^T$,$\alpha_3 = (3,3,3+a,3)^T$,$\alpha_4 = (4,4,4,4+a)^T$. 问为何值时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关?当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关时,求其一个极大线性无关组,并将其余向量用该极大线性无关组线性表出.

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$

$AX=0$ 有非0解

$|A|=0$

$a=0 \quad a=-10$

当 $a=0$ 时

当 $a=-10$

(21)(本题满分 13 分)

设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3,向量 $I_1 = (-1,2,-1)^T$,$I_2 = (0,-1,1)^T$,是线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解.

(Ⅰ)求 A 的特征值与特征向量

(Ⅱ)求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ,使得 $Q^TAQ = \Lambda$;

(Ⅲ)求 A 及 $(A - \frac{3}{2}E)^6$,其中 E 为 3 阶单位矩阵.

$\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$

$\begin{cases} AI_1=0 \\ AI_2=0 \end{cases}$

$I_3=(1,1,1)^T$

$\beta_1 = I_1 = (-1,2,-1)^T$

$\beta_2 = I_2 - \frac{(I_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$

$= (-\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2})^T$

(22)(本题满分 13 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<0\\ \frac{1}{4}, & 0\leqslant x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$，令 $Y=X^2$，$F(X,Y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数，求：

(Ⅰ) Y 的概率密度 $f_Y(y)$；

(Ⅱ) $\mathrm{Cov}(X,Y)$；

(Ⅲ) $F(-\frac{1}{2},4)$.

(Ⅰ)

$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$

$=\begin{cases}\int_{-1}^{x}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} & -1<x<0\\ \int_{-1}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{x}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2} & 0<x<2\end{cases}$

$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}$

$=P\{X^2\leq y\}$

$=P\{|X|\leq\sqrt{y}\}$

$=P\{-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y}\}$

$=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$

(Ⅱ) $\mathrm{cov}(X,Y)=EXY-EXEY$

$=EX^3-EX\cdot EX^2$

$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x f_X(x)\,dx$

$=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}x\,dx+\int_{0}^{2}\frac{x}{4}dx$

(Ⅲ) $P\{X\leq\frac{1}{2},Y\leq 4\}$

$=P\{-2\leq X\leq\frac{1}{2}\}$

$=P\{-1\leq X\leq\frac{1}{2}\}$

(23)(本题满分 13 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1\\ 1-\theta, & 1\leqslant x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$，其中 θ 是未知参数$(0<\theta<1)$，$X_1,X_2,\cdots\cdots X_n$ 为来自总体的随机样本，记 N 为样本值 $x_1,x_2,\cdots\cdots x_n$ 中小于 1 的个数，求：

(Ⅰ) θ 的矩估计；

(Ⅱ) θ 的最大似然估计.

(Ⅰ) $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x f(x;\theta)$

$=\int_0^1 x\theta\,dx+\int_1^2(1-\theta)x\,dx$

$=\frac{1}{2}\theta+\frac{3}{2}(1-\theta)$

$=\frac{3}{2}-\theta=\overline{X}$

$\hat{\theta}=\frac{3}{2}-\overline{X}$

(Ⅱ) $L(\theta)=f(x_1;\theta)\cdot f(x_2;\theta)\cdots f(x_n;\theta)$

$=\theta^N(1-\theta)^{n-N}$

$\ln L(\theta)=N\ln\theta+(n-N)\ln(1-\theta)$

$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{N}{\theta}-\frac{n-N}{1-\theta}=0$

$N-\theta N-\theta n+N\theta=0$

$\theta=\frac{N}{n}$

2005 年全国硕士研究生入学统一考试
经济数学三试卷

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上.)

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2x}{x^2+1} =$ ___2___.

(2) 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足初始条件 $y(1) = 2$ 的特解为 ___$y=2e^{-\ln x}$___.

(3) 设二元函数 $z = xe^{x+y} + (x+1)\ln(1+y)$,则 $\mathrm{d}z\Big|_{(1,0)} =$ ___$2e\mathrm{d}x + (e+2)\mathrm{d}y$___.

(4) 设行向量组 $(2,1,1,1)$,$(2,1,a,a)$,$(3,2,1,a)$,$(4,3,2,1)$ 线性相关,且 $a \neq 1$,则 $a =$ ________. $\frac{1}{2}$

(5) 从数 1,2,3,4 中任取一个数,记为 X,再从 $1,\cdots,X$ 中任取一个数,记为 Y,则 $P\{Y = 2\} =$ ________. $\frac{13}{48}$

(6) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

0.4+a　　　　a+b=0.5

若随机事件 $\{X = 0\}$ 与 $\{X + Y = 1\}$ 相互独立,则 $a =$ ___0.4___,$b =$ ___0.1___.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 当 a 取下列哪个值时,函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - a$ 恰有两个不同的零点.

(A) 2.　　(B) 4.　　(C) 6.　　(D) 8.　　【　　】

(8) 设 $I_1 = \iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$,$I_2 = \iint\limits_D \cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma$,$I_3 = \iint\limits_D \cos(x^2+y^2)^2\,\mathrm{d}\sigma$,其中 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$,则

(A) $I_3 > I_2 > I_1$.　　(B) $I_1 > I_2 > I_3$.

(C) $I_2 > I_1 > I_3$.　　(D) $I_3 > I_1 > I_2$.　　【　　】

(9) 设 $a_n > 0$,$n = 1,2,\cdots$,若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛,则下列结论正确的是

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 发散.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 发散.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n})$ 收敛.　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} - a_{2n})$ 收敛.　　【　　】

(10) 设 $f(x) = x\sin x + \cos x$,下列命题中正确的是