散射理论

非相对论性碰撞的量子理论

〔美〕J.R.泰勒 著

科学出版社

散 射 理 论

非相对论性碰撞的量子理论

〔美〕J.R.泰勒 著

耿天明 温源淇 译

韩辉翼 校

科 学 出 版 社

1 9 8 7

内 容 简 介

本书是关于非相对论性散射的量子理论的一本较好的教科书．内容系统、连贯，物理概念叙述清楚，文字简明扼要，易于了解，适合于熟悉量子力学一般原理并对散射理论有少许了解的大学毕业生阅读，从而较全面、系统地掌握非相对论性散射理论的基本原理．全书共二十二章，分三大部分：第一部分是数学准备，阐明了散射理论中所需的希尔伯空间和线性算符的基本内容；第二部分是散射理论，是本书的主要组成部分，下分单道散射理论和多道散射理论，在每一种情形中又分别讨论时间有关和时间无关两种情形；第三部分是考虑全同粒子的特殊问题．

J. R. Taylor
SCATTERING THEORY
The Quantum Theory on Nonrelativistic Collisions
John Wiley, 1972

散 射 理 论
非相对论性碰撞的量子理论
〔美〕J. R. 泰勒 著
耿天明 温源淇 译
韩辉翼 校
责任编辑 赵惠芝

科学出版社出版
北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1987年11月第一版　开本：787×1092 1/32
1987年11月第一次印刷　印张：17
印数：0001—4,500　字数：388,000

统一书号：13031 · 3957
本社书号：5347 · 13—3

定价：4.00元

前 言

本书是为那些想在非相对论性散射的量子理论方面得到严密基础训练的物理学研究生而写的. 假设读者已经熟悉量子力学的一般原理(例如,象美国大多数大学一年级研究生课程中所讲授的),而且具备一些散射理论的知识, 象在一年级课程中应学到的那些. 我的希望是引导原子物理或核物理方面的学生达到能够开始阅读文献和处理实际问题的水平, 并对基本原理有个完整的了解. 对于高能物理方面的学生, 我试图为他们以后研究相对论性的问题提供必要的基础.

关于选取题材的一个特点,在这里需要说明的是,我决定将相对论性散射理论排除在外. 因为非相对论性碰撞理论在原子物理、核物理及粒子物理的低能过程中有着广泛的应用,所以其本身就足以编成一本书了. 非相对论量子力学的基本规律是大家完全熟悉的,因而和相对论情况形成明显的对比,非相对论性散射理论在逻辑上是完整的, 并自成体系的. 况且,有许多重要特征对非相对论的和相对论的理论是共同的. (例如,两者都用幺正散射算符 S 进行系统讲述.)这就使得前者成为后者极好的先导,因而不论在什么地方,除了非相对论领域外,只要可能,我还介绍有关材料, 以便强调其在相对论领域中的关联.

关于内容的处理,应说明两点. 首先, 读者会发现, 我总是力图用最简单的有关实例来介绍论题 (详细讨论的最复杂的原子过程是电子-氢散射;为讨论而选择的极化实验是自旋为 1/2 的粒子在无自旋靶上的散射; 本书前面三分之二的篇

幅单独处理单道散射的简单情况)．我这样做是因为我确信，学习散射理论的最好途径是按照所有基本概念——S算符、截面、T矩阵等等——的最简单的前后关系来熟悉这些概念．一旦确实很好地理解了这些概念，将它们推广到更一般的情况往往是件简单的事，而且通常可留给读者去作．这种做法意味着，本书所包括的范围比不上关于这一题目的多数书的范围广泛和全面[1] [Mott 与 Massey (1933), Goldberger 与 Watson(1964)以及 Newton (1966)]，因此，对正在从事研究的人员来说，也许参考价值不大．然而，我希望这样做对正在攻读这一学科的学生更为有用．其次，读者会发现，更为强调的不是传统的而是与时间有关的处理问题的方法．历史上，散射理论是二十年代后期和三十年代围绕与时间无关的定散射态建立起来的．只是在五十年代后期，随着实际的与时间有关的理论的建立，才完全证明这种形式是合理的．但现在，有可能用一种更加满意的途径建立散射理论，从与时间有关的形式开始并用此来定义全部基本概念，然后时间无关理论仅仅作为一种计算工具和确立某些普遍性质的工具而引入．

除少数几章以外，本书内容安排要求从头到尾系统地阅读，因而我希望读者将会这样选用它[2]．我还希望读者试着做每章末尾为数不多的习题，即使不能全做也应尽量多做．这些习题的绝大多数曾在 Colorodo 大学由连续三个班的学生试验过．目的是促进读者掌握刚学过的内容，并给读者介绍某些重要的课文中未曾论述的最新进展．

J. R. 泰勒

---

1) 全部参考书按作者姓名和年代在书后列出．

2) 主要的例外是第七、十四、十五、二十和二十一章．读者可将这几章的部分或全部材料略去或放在次要地位，这样并不严重影响对后面内容的了解．

目　录

绪　论

量子物理学中最重要的实验技术是散射实验．回顾一下现代物理学的发展过程，就会发现情况确实如此．在原子物理学中，Rutherford 根据他的 α 粒子被金箔散射的实验，发现了原子核；Franck-Hertz 由电子通过水银蒸气的散射实验，确立了原子能级的存在．在核物理学中，原子核有结构的第一个明确证据，来自 Rutherford 对于如下散射反应

$$\alpha + {}^{14}N \to p + {}^{17}O$$

的观察．在基本粒子物理学的研究中，散射实验不仅提供了实验数据，而且也是产生粒子本身的主要方法，例如，π 介子产生过程

$$p + p \to p + p + \pi^0.$$

分析散射实验的理论工具是散射理论．在讨论散射理论中，对问题进行各种可能分类是方便的．首先，理论有非相对论性的和相对论性的，而如前言所指出的，本书仅限于前者．其次，理论分为单道和多道两部分．第三，有与时间有关的和与时间无关的两个部分．这些分类决定了本书内容的编排．

在叙述对单道和多道散射处理之前，我们必须扼要地讨论一下这两个概念的定义．在大多数碰撞过程中，可能有许多不同的粒子集合出现在末态中．例如，当用 α 粒子轰击氮时，几种可能的末组态为

$$\begin{aligned}\alpha + {}^{14}N \to\ & \alpha + {}^{14}N\\ & p + {}^{17}O\\ & \alpha + \alpha + {}^{10}B \text{ 等等.}\end{aligned}$$

每一个可能的末粒子集合称为一个道．因此，这种类型的碰撞过程称为*多道碰撞*．但是也存在只有一个道的简单碰撞过

程．电子被质子或中子被α粒子的低能散射，是这种单道过程的两个实例．这两个过程中的任何一个都只能是弹性散射：

$$e+p\to e+p \quad 和 \quad n+\alpha\to n+\alpha.$$

单道散射过程实际是理想化的概念．例如，如果我们将n-α碰撞能量增加到约20兆电子伏以上，中子就能击碎α粒子；而在e-p散射的例子中，不论入射能量多大，总有产生低能光子的可能． 因此，这两个例子都不是真正的单道碰撞．不过在适当的条件下，有许多过程(包括这两个例子)能很好地近似为单道碰撞．在非相对论量子力学的框架内，单粒子在固定势上的散射和两个粒子的互相散射，提供了完全一致的单道系统的模型．

单道散射理论的形式自然要比一般的多道问题简单得多．同时，前者包含了后者所需要的几乎全部基本概念．所以我们在处理多道问题之前，先要相当详细地讨论单道散射．具体地说，在用一章的篇幅做了数学准备之后，在第二至十五章逐一地介绍单道散射的全貌，尔后，在第十六至二十一章对多道散射进行类似的论述．（第二十二章考虑全同粒子的特殊问题．）

散射理论的另一个主要分类是将它分为与时间有关的和与时间无关的两个部分．在与时间有关的散射理论中涉及含时波函数，它是用来描述实际碰撞过程的．远在碰撞开始前和碰撞完全过去后，粒子的行为就象是自由粒子，所以相应的波函数的行为也与自由粒子波函数相似．能够证明，可用一个称为*散射算符* S 的某一幺正算符把碰撞前后的自由波函数联系起来．实际上，所有的测量都是对碰撞前后的粒子进行的．（甚至在极慢的碰撞中，通常持续时间也比10^{-10}秒短得多．）因此，所有实验上有关的信息（至少对散射实验来说）都包含在算符 S 之中了．特别是实验上测量的*散射截面*完全可

以用S的矩阵元表示.

与时间无关的理论形式(至少对其最简单的形式)是用所谓定散射态展开实际含时波函数得到的，而这些定散射态就是哈密顿算符的适当本征函数. 这种理论形式的主要用途在于,它提供了一个实际计算散射算符(或相关的散射振幅),并确定其某些一般性质的手段.

推导散射理论的自然(虽不是历史的)顺序应从与时间有关的理论形式开始,用它来定义 S 算符和散射截面,然后作为一种计算技术才推导与时间无关的理论形式. 这是本书所遵循的顺序，其内容概述如下:

数学准备——第一章

散射理论
- 单道
  - 时间相关的——第二—七章
  - 时间无关的——第八—十五章
- 多道
  - 时间相关的——第十六—十七章
  - 时间无关的——第十八—二十一章

全同粒子引起的必要修正——第二十二章

这里所述的顺序并不是散射理论最初建立的顺序. 历史上,散射理论的建立,类似于束缚态理论的情况,是围绕定散射态进行的; 即用时间无关的表述形式. 后来才建立了与时间相关的理论，并对已导出的结果提供正式的证明.

多数量子力学课本都采用从时间无关理论开始的传统理论. 因此，在单粒子被固定势散射的问题中，“散射波函数” $\psi_{\mathbf{p}}^{+}(\mathbf{x})$ 读者无疑是熟悉的，它被定义为有如下边界条件的定态薛定谔方程的解:

$$\psi_{\mathbf{p}}^{+}(\mathbf{x}) \xrightarrow[r\to\infty]{} (2\pi)^{-3/2}\left\{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + f(E,\theta)\frac{e^{ipr}}{r}\right\}.$$

(本书始终使用 $\hbar=1$ 的单位.) 把这个波函数说成是代表动量 $\mathbf{p}$ 的稳定入射粒子束加上振幅为 $f(E,\theta)$ 的球面散射波. 这种解释立刻导致微分散射截面的著名结果:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\text{散射通量/立体角}}{\text{入射通量/面积}}=|f(E,\theta)|^2.$$

虽然这种方法得出正确结果（或至少在适当条件下是正确结果），且对散射理论无疑也是一个良好开端，但它远不是令人满意的．含有一个变量 $\mathbf{x}$ 的波函数应该表示一个粒子的态，而不能如所求的那样表示一束粒子的态．又因为 $\psi_{\mathbf{p}}^{+}(\mathbf{x})$ 是不可归一化的，所以事实上它完全不能表示一个态．而且函数 $\psi_{\mathbf{p}}^{+}(\mathbf{x})$ 是哈密顿算符的本征函数，从而对应的是定态情况，这同明显地与时间进程有关的任何实际碰撞过程是完全相反的．最后，散射通量和入射通量的计算完全不管两个波的干涉．

尽管如此，传统的论证导致正确答案也并非偶然．事实上，如果我们用具有适当动量 $\mathbf{p}$ 的波函数 $\psi_{\mathbf{p}}^{+}(\mathbf{x})$ 通过叠加的办法，构成一个归一化的含时波包，则上述缺点能够全部消除，并能使所期望的结论站得住脚．即可以认为，利用传统的不含时方法构造含时理论的形式是合理的．事实上，这种完全合理的步骤在一些高等量子力学教材中已有介绍．不过本书中，我们将遵循另外一种更为自然的步骤，从实际的时间相关理论形式开始，只是在作为一种计算方法需要时才引入时间无关理论．也许这种程序唯一令人遗憾的是，对熟悉用定态 $\psi_{\mathbf{p}}^{+}(\mathbf{x})$ 的传统论述的读者，不得不等到第十章才能接触到他所熟悉的内容．

最后我们对符号作一些简短的说明．对于表示量子力学体系状态的矢量，我们用狄拉克右矢符号 $|\phi\rangle$，$|\psi\rangle$ 等等．虽然这种符号有时有些不便之处，但它确实常有简捷明了的优点．例如，上面讨论过的波函数 $\psi_{\mathbf{p}}^{+}(x)$ 可简捷地用 $|\mathbf{p}+\rangle$ 代替．对于正规的可归一化的态矢，也允许我们专用希腊字母 $|\psi\rangle$，$|\phi\rangle$，$\cdots$，因为对非正规矢——平面波态 $|\mathbf{p}\rangle$，角动量

本征态$|E, l, m\rangle$，散射态$|\mathbf{p}+\rangle$——是用有关的本征值（罗马字）标记的。

我们尽可能用大写字母标记算符和矩阵，而用小写字母标记数。如算符是A，它的本征值是a。单粒子的位置算符是$\mathbf{X}$，动量算符是$\mathbf{P}$，相应的本征值是$\mathbf{x}$和$\mathbf{p}$。当讨论其位置算符分别是$\mathbf{X}_1$和$\mathbf{X}_2$，动量算符分别是$\mathbf{P}_1$和$\mathbf{P}_2$的两个粒子时，这个规则迫使我们引入如下不习惯的记号：$\bar{\mathbf{X}}, \mathbf{X}=$质心位置和相对位置算符，$\bar{\mathbf{P}}, \mathbf{P}=$总动量和相对动量的算符。这些算符有相应的本征值$\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}$。当然，对我们的一般规则也有例外；比如用小写字母$\sigma$和$\rho$表示泡利矩阵和密度矩阵，而用大写字母$E$表示能量本征值，另外还有若干这样的情况。

对于某些使用过多的字母，我们就用它们的各种不同字体。具体地说，所有幺正（及反幺正）算符都用无端体字母表示。例如，散射算符是S，其本征值是s，转动算符是R，平移算符是D，宇称是P，时间反演是T等等。

关于算符的另一惯例值得提一下。我们既要处理动量守恒的问题（如两个相互作用的粒子间的散射），也要处理动量不守恒的问题（如一个粒子被固定势的散射）。这两种体系的碰撞（散射）算符用不同的符号表示显得方便。故动量不守恒的体系的散射算符用S表示，而动量守恒体系的散射算符用黑体字$\mathbf{S}$表示。

我们用大写字母表示态矢$|\phi\rangle$的集合。所以对（给定体系的）全部态矢的希耳伯空间，用$\mathscr{H}$表示，各有关子空间用$\mathscr{B}$，$\mathscr{D}$，$\mathscr{R}$和$\mathscr{G}$表示。最后，三维实空间(R^3)的矢量与平常一样用黑体字表示。一般矢量$\mathbf{a}$的绝对值用$a=|\mathbf{a}|$表示（位置矢量$\mathbf{x}$的绝对值用$r=|\mathbf{x}|$），而$\mathbf{a}$方向的单位矢量为$\hat{\mathbf{a}}=\mathbf{a}/a$。沿三个坐标轴的单位矢量写为$\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$。

第一章 数学准备

本书的主要宗旨之一是表明散射的量子理论并不象一般想像那样困难。实现这一目标的主要手段之一是用比多数教科书稍微高级一点的数学。为此，第一章专门简单复习其余二十一章所使用的数学工具[1]。

用现代标准来衡量，本书所涉及的这些数学并不是特别高深的，而且对多数读者来说，其内容除复习大家所熟悉的知识外，并没有更多的新东西。只有少数几个概念，特别是等距算符和收敛性（两者在散射理论中都具有重要地位）的概念，对许多读者可能是新的材料。

我们将从希耳伯空间、本征矢展开和子空间的简短介绍开始。然后复习算符特别是关于幺正算符和等距算符的某些性质。最后讨论矢量和算符的收敛性这一重要概念。我们将主要钻研适用于最简单体系，即在恒定势场中运动的单个无自旋粒子的形式理论。至于有关处理更复杂体系的方法，将在以后需要时再介绍。

精通这些材料的读者略去这一章无关紧要。

1-a 态矢的希耳伯空间

用波函数 $\psi(\mathbf{x})$ 标示的单个无自旋粒子的状态满足

$$\int d^3x\,|\psi(\mathbf{x})|^2<\infty. \tag{1.1}$$

每一个波函数 $\psi(\mathbf{x})$ 都可以看作是无限维态矢 $|\psi\rangle$ 的特定

1) 本章的许多材料可以在若干量子力学教科书中找到（如 Messiah, 1961; Gottfried, 1966; 或 Jordan, 1969）。