高等学校教材

高等数学

（第二版）

下册

同济大学数学教研室主编

人民教育出版社

高等学校教材

高 等 数 学

（第二版）

下 册

同济大学数学教研室　主编

人民教育出版社

本书第二版是由同济大学数学教研室，参照1980年高等学校工科数学教材编审委员会审订的《高等数学教学大纲》修订而成的。下册内容中，凡大纲上加星号及双星号部分如原教本未编入的，一律补充进去；大纲上未载部分，如二重积分换元法增写了雅可比公式，增写了含参变量的积分等等。修订者对原教本的部分内容还作了适当的修改，习题也改换和更新了不少。本书第一版中的线性代数、概率论两章，参照《工程数学教学大纲》修订后，各用《工程数学——线性代数》、《工程数学——概率论》等名义出版单行本。

本书下册修订稿仍由陆子芬教授任主审，高等学校工科数学教材编审委员会委托陆庆乐编委任复审。

本书分上、下册出版。下册内容为多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程，书末还附有习题答案。

本书说理浅显，叙述详细，例题较多，便于教学，可作为高等工业院校教材，也可作为工程技术人员的自学用书。

责任编辑　丁鹤龄

高等学校教材

高　等　数　学

（第二版）

下　册

同济大学数学教研室　主编

*

人民教育出版社出版

四川省新华书店重庆发行所发行

重庆新华印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32　印张 13.125　字数 316,000

1978年10月第1版

1982年5月第2版　1982年10月第1次印刷

印数 00,001—80,500

书号 13012·0821　　定价 1.00 元

目　　录

第八章 多元函数微分法及其应用

上册中我们讨论的都是只有一个自变量的函数，这种函数叫做一元函数. 但通常我们所研究的问题往往牵涉到多方面的因素，反映到数学上，就是一个变量依赖于多个变量的情形. 这就提出了多元函数以及多元函数的微分和积分问题. 本章将在一元函数微分学的基础上，讨论多元函数的微分法及其应用. 讨论中我们以二元函数为主，因为从一元函数到二元函数会产生新的问题，而从二元函数到二元以上的多元函数则可以类推.

第一节 多元函数的基本概念

一、多元函数概念

在很多自然现象以及实际问题中，经常会遇到多个变量之间的依赖关系，举例如下：

例 1 圆柱体的体积 V 和它的底半径 r、高 h 之间具有关系

$$V=\pi r^2 h.$$

这里，V 是随着 r、h 的变化而变化的，当 r、h 在一定范围($r>0$, $h>0$)内取定一对值时，V 的对应值就随之确定.

例 2 一定量的理想气体的压强 p、体积 V 和绝对温度 T 之间具有关系

$$p=\frac{RT}{V},$$

其中 R 为常数. 这里，p 是随着 V、T 的变化而变化的，当 V、T 在一定范围 ($V>0$, $T>0°K$) 内取定一对值时，p 的对应值就随之确定.

例 3 设 R 是电阻 R_1、R_2 并联后的总电阻，根据电学知道，它们之间具有关系

$$R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}.$$

这里，R 是随着 R_1、R_2 的变化而变化的，当 R_1、R_2 在一定范围($R_1>0$, $R_2>0$)内取定一对值时，R 的对应值就随之确定.

上面三个例子的具体意义虽各不相同，但它们却有一个共同的性质，抽出这些共性就可得出以下二元函数的定义.

定义 1 **设有变量 x、y 和 z. 如果当变量 x、y 在一定范围内任意取定一对值时，量 z 按照一定的法则，总有确定的数值和它们对应，则 z 叫做 x、y 的二元函数，记作**

$$z=f(x,\ y) \quad \text{或} \quad z=z(x,\ y),$$

其中变量 x、y 叫做自变量，而 z 也叫做因变量. 自变量 x、y 的变化范围叫做函数的定义域.

类似地可以定义三元函数 $u=f(x,\ y,\ z)$ 以及三元以上的函数.

例如，长方体体积 V 是它的长 a、宽 b 和高 c 的函数

$$V=abc;$$

电流通过电阻时所作的功 P 是电阻 R、电流 I 和时间 t 的函数

$$P=I^2Rt;$$

等等.

二元以及二元以上的函数统称为多元函数.

如同我们用 x 轴上的点来表示数值 x 一样，我们可用 xOy 平面上的点 $P(x,\ y)$ 来表示一对有序数组 x, y. 于是函数 $z=f(x,\ y)$ 也可简记为 $z=f(P)$，而称 z 为点 P 的函数. 类似地，可用空间内的一点 $P(x,\ y,\ z)$ 来表示有序数组 x, y, z. 函数 $u=f(x,\ y,\ z)$ 也就可简记为 $u=f(P)$，等等.

关于函数的定义域，与一元函数相类似，我们作如下约定：在一般地讨论用算式表达的二元函数 $z=f(x, y)$ 时，就以使这个算式有确定值的自变量 x、y 的变化范围所确定的点集（具有某种性质的点的全体）为这个函数的定义域．例如，函数 $z=\ln(x+y)$ 的定义域为适合 $x+y>0$ 的点的全体，它是一个平面点集，其中的点 (x, y) 具有性质：$x+y>0$，我们把它简记为 $\{(x, y)\,|\,x+y>0\}$（图 8-1）．又如，函数 $z=\arcsin(x^2+y^2)$ 的定义域为适合 $x^2+y^2\leqslant 1$ 的点的全体，即平面点集 $\{(x, y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$（图 8-2）．

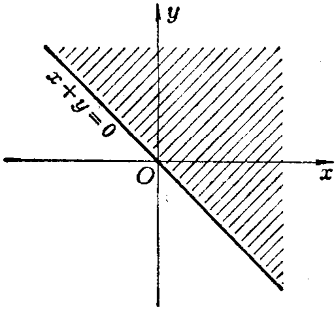

图 8-1

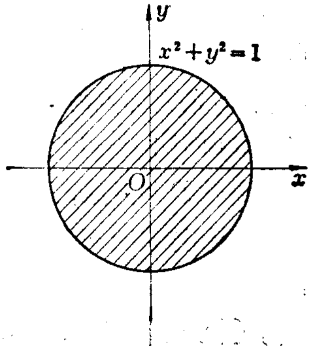

图 8-2

常见的二元函数的定义域是平面上的一个区域．为了确切地说明区域的概念，我们引入以下一些定义．

以 $P_0(x_0, y_0)$ 为中心、$\delta>0$ 为半径的圆的内部的点的全体，即平面点集 $\{(x, y)\,|\,(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$，称为点 P_0 的 δ 邻域，记为 $N(P_0, \delta)$．

设 E 为平面上的一个点集，如果点 P 属于 E，且存在某个邻域，使这邻域中的点都属于 E，则称 P 为集合 E 的内点（图 8-3）．

如果集合 E 的点都是 E 的内点，则称 E 为开集．例如，集合 $E_1=\{(x, y)\,|\,1<x^2+y^2<4\}$ 中每个点都是 E_1 的内点，故 E_1 为开集．

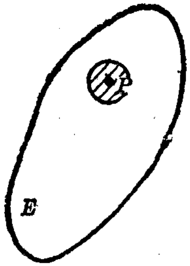

图 8-3

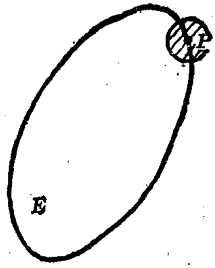

图 8-4

如果点 P 的任意一个邻域中都有属于 E 的点，也有不属于 E 的点（P 可以属于 E，也可以不属于 E），则称 P 为 E 的边界点（图 8-4）。E 的边界点的全体称为 E 的边界。例如，在上例中 E_1 的边界是圆周 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$。

如果集合 D 是开集，且对于 D 中任意二点，都可以用完全落在 D 内的折线连接起来（称 D 的这种性质为连通性），则称 D 为区域或开区域。换句话说，区域是连通的开集。例如，$\{(x, y)|x+y>0\}$，$\{(x, y)|1<x^2+y^2<4\}$ 都是区域。

区域连同它的边界一起，称为闭区域。例如，$\{(x, y)|x+y\geqslant 0\}$，$\{(x, y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 都是闭区域。

以后在不需要区分开区域和闭区域时，我们统称它们为区域，并用字母 D 表示。

如果点集 E 可以被包含在一个以原点为中心的圆内，则称 E 为有界点集，否则称为无界点集。例如，$\{(x, y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 是有界闭区域，$\{(x, y)|x+y>0\}$ 是无界开区域。

上述关于平面点集的内点、邻域、开集、区域、闭区域等概念可以完全类似地推广到空间点集的情形。

我们曾利用平面直角坐标系来表示一元函数 $y=f(x)$ 的图形，一般说来，它是平面上的一条曲线。对于二元函数 $z=f(x, y)$，

我们可以利用空间直角坐标系来表示它的图形. 设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 xOy 坐标面上某一区域 D, 对于 D 中的每一点 $P(x, y)$, 在空间可以作出一点 $M(x, y, f(x, y))$ 与它对应. 当点 $P(x, y)$ 在 D 中变动时, 点 $M(x, y, f(x, y))$ 就在空间相应地变动, 一般说来, 它的轨迹是一个曲面 (图 8-5). 这个曲面就称为二元函数 $z=f(x, y)$ 的图形. 因此, 二元函数可用一个曲面作为它的几何表示.

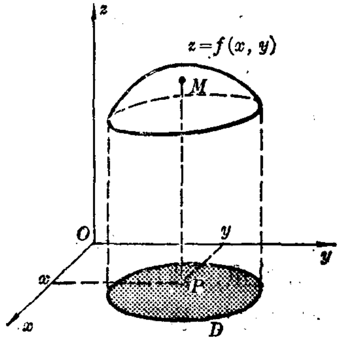

图 8-5

例如, 由空间解析几何知道, 线性函数

$$z=ax+by+c$$

的图形是一个平面; 由方程

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

所确定的函数 $z=f(x, y)$ 的图形是球心在原点、半径为 a 的球面. 它的定义域是圆形闭区域 $D=\{(x, y)|x^2+y^2\leqslant a^2\}$. 在 D 的内部任一点 (x, y) 处, 这函数有两个对应值, 一个为 $\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, 另一个为 $-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. 因此, 这是多值函数. 取正值的一个表示上半球面, 取负值的一个表示下半球面. 以后除了对二元函数 $z=f(x, y)$ 另作声明外, 总假定它是单值的; 如果遇到多值函数, 我们可以把它拆成几个单值函数后再分别加以讨论.

二、二元函数的极限

现在来讨论二元函数 $z=f(x, y)$ 当自变量 $x\to x_0$, $y\to y_0$, 即点 $P(x, y)\to P_0(x_0, y_0)$ 时的极限定义.

设函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某一邻域内有定义(点

P_0 可以除外），$P(x, y)$是该邻域内异于 P_0 的任意一点．如果当点 P 以任何方式趋近于点 P_0 时，函数的对应值 $f(x, y)$趋近于一个确定的常数 A，我们就说，A 是函数 $z=f(x, y)$当 $x\to x_0$，$y\to y_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A$$

或
$$f(x, y)\to A \quad (x\to x_0,\ y\to y_0).$$

在这里，我们注意到点 $P(x, y)$ 趋近于点 $P_0(x_0, y_0)$，就是它们之间的距离趋于零，即

$$\rho=|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0.$$

因此上述极限记号也可记作

$$f(x, y)\to A \quad (\rho\to 0).$$

类似于一元函数极限的"ε-δ"定义，上述极限也可用"ε-δ"的方式定义如下．

定义 2　设函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某一邻域内有定义（点 P_0 可以除外），如果对于每一个任意给定的正数 ε，总存在一个正数 δ，使得对于适合不等式

$$0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切点 $P(x, y)$，都有

$$|f(x, y)-A|<\varepsilon \tag{1}$$

成立，则称 A 为函数 $z=f(x, y)$ 当 $x\to x_0$，$y\to y_0$ 时的极限①．

利用点的邻域概念，上述极限定义也可描述为：对于点 A 的任何邻域$(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$，总存在点 P_0 的 δ 邻域 $N(P_0, \delta)$，使这个邻域内不与 P_0 重合的任意一点 P 的函数值$f(P)=f(x, y)$，

---

① 如果函数 $z=f(x, y)$在 P_0 的任一邻域中除 P_0 外，尚有不属于函数的定义域 D 的点，但又总有异于 P_0 的属于 D 的点，则只要对 D 内适合不等式 $0<|PP_0|<\delta$ 的点 P，有不等式(1)成立，便称函数 $f(P)$ 当 $P\to P_0$ 时的极限为 A．在后面讨论函数的连续性及函数的偏导数等问题时，对上述这类点的情形，也作类似的规定，不再说明。

都落在 A 的 ε 邻域内. 从几何上来说, 就是在 P_0 的 δ 邻域内(P_0 可以除外), 函数 $z=f(x, y)$ 的图形将位于两个平行平面 $z=A-\varepsilon$ 和 $z=A+\varepsilon$ 之间.

利用点函数的概念, 上述极限定义可用与一元函数的极限完全相同的形式来描述: 对于任意给定的正数 ε, 总存在一个正数 δ, 使当 $0<|PP_0|<\delta$ 时, 都有 $|f(P)-A|<\varepsilon$ 成立. 这一形式的极限定义, 对二元以上的函数也完全适用.

为了区别于一元函数的极限, 我们把上述二元函数的极限叫做二重极限.

例 4 设 $f(x, y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\quad(x^2+y^2\neq 0)$,

求证
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)=0.$$

证 因为

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right| = |x^2+y^2|\cdot\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant x^2+y^2,$$

可见, 对任给 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$, 则当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ 时, 总有

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$$

成立, 所以
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)=0.$$

我们必须注意, 所谓二重极限存在, 是指 $P(x, y)$ 以任何方式趋近于 $P_0(x_0, y_0)$ 时, 函数都无限接近于 A. 因此, 如果 $P(x, y)$ 以某一特殊方式, 例如沿着一条定直线或定曲线趋近于 $P_0(x_0, y_0)$ 时, 即使函数无限接近于某一确定值, 我们还不能由此断定函数的极限存在. 但是反过来, 如果当 $P(x, y)$ 以不同方式趋近于 $P_0(x_0, y_0)$ 时, 函数趋近于不同的值, 那末就可以断定这函数的极限不存在. 下面用例子来说明这种情形.

考察函数

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

显然，当点 $P(x, y)$ 沿 x 轴趋近于点 $(0, 0)$ 时，

$$\lim_{x\to 0} f(x, 0)=\lim_{x\to 0} 0=0;$$

又当点 $P(x, y)$ 沿 y 轴趋近于点 $(0, 0)$ 时，

$$\lim_{y\to 0} f(0, y)=\lim_{y\to 0} 0=0.$$

虽然点 $P(x, y)$ 以上述两种特殊方式(沿 x 轴或沿 y 轴)趋近于原点时函数的极限存在并且相等，但是极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ 并不存在. 这是因为当点 $P(x, y)$ 沿着直线 $y=kx$ 趋近于点 $(0, 0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

显然它是随着 k 的不同而改变的.

三、二元函数的连续性

明白了极限的概念，就不难讨论二元函数的连续性问题. 设函数 $z=f(x, y)$ 在区域 D 内有定义，$P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的一个内点，$P(x, y)$ 是在 D 内而且是 P_0 的一个邻域内的任意点，我们给出二元函数在点 P_0 为连续的定义如下：

定义 3 如果当 $x\to x_0$, $y\to y_0$ 时，函数的极限存在，且等于它在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处的函数值，即

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=f(x_0, y_0),$$

那末就称函数 $z=f(x, y)$ 在点 P_0 处连续.

换句话说，如果当点 $P(x, y)$ 与点 $P_0(x_0, y_0)$ 的距离趋于零时，差值 $f(x, y)-f(x_0, y_0)$ 也趋近于零，那末二元函数在点 P_0 是

连续的.

采用"ε-δ"的方式以及利用点的邻域概念来描述函数 $z=f(x, y)$ 在点 P_0 处连续的定义，读者可自行给出.

如果二元函数在区域 D 内各点都连续，那末就称函数在 D 内连续. 二元连续函数的图形是一个无孔隙、无裂缝的曲面. 例如连续函数

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2} \qquad (x^2+y^2\leqslant 1)$$

的图形是球心在原点、半径等于 1 的上半球面.

函数的不连续点称为间断点. 上面已经讨论过的函数

$$f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

当 $x\to 0$, $y\to 0$ 时的极限不存在，所以点 $(0, 0)$ 是函数的一个间断点. 二元函数的间断点可以形成一条曲线，例如函数

$$z=\sin\frac{1}{x^2+y^2-1}$$

在圆周 $x^2+y^2=1$ 上没有定义，所以该圆周上各点都是间断点.

类似地可给出二元以上的函数在某点是连续的定义，在此不再赘述.

与闭区间上一元连续函数的性质相类似，在有界闭区域上多元连续函数也有如下性质.

性质 1(最大值和最小值定理) **在有界闭区域 D 上的多元连续函数，在该区域上至少取得它的最大值和最小值各一次.** 这就是说，在 D 上至少有一点 P_1 及一点 P_2，使得 $f(P_1)$ 为最大值而 $f(P_2)$ 为最小值:

$$f(P_2)\leqslant f(P)\leqslant f(P_1) \quad (\text{点 } P \text{ 在 } D \text{ 上}).$$

性质 2(介值定理) **在有界闭区域上的多元连续函数，如果取得两个不同的函数值，则它在该区域上取得介于这两个值之间**

的任何值至少一次．特殊地，如果μ是在函数的最小值m和最大值M之间的一个数，则在D上至少有一点Q，使得$f(Q)=\mu$.

*性质 3(一致连续性定理) **在有界闭区域上的多元连续函数必定在该区域上一致连续**．这就是说，若$f(P)$在有界闭区域D上连续，那末对于任意给定的正数ε，总存在一个正数δ，使得对于区域D上的任意二点P_1、P_2，只要当$|P_1P_2|<\delta$时，都有

$$|f(P_1)-f(P_2)|<\varepsilon$$

成立．

我们指出：一元函数中关于极限的运算法则，对于多元函数仍然适用；根据极限运算法则，可以证明多元连续函数的和、差、积均为连续函数；在分母不为零处，连续函数的商是连续函数；多元连续函数的复合函数也是连续函数．

与一元的初等函数相类似，多元初等函数也是可由一个式子所表示的函数，而这个式子是由含多个自变量(如x, y等)的基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成的．例如，$\frac{x+x^2-y^2}{1+x^2}$, $\sin(x+y)$, $e^{x+y}\cdot\ln(1+x^2+y^2)$等都是多元初等函数．

根据上面指出的连续函数的和、差、积、商的连续性以及连续函数的复合函数的连续性，我们进一步可得如下结论：

一切多元初等函数在其定义区域内是连续的．

由多元初等函数的连续性，如要找它在一点P_0处的极限值，而该点又在此函数的定义区域内，则极限值就是函数在该点的函数值，即

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0).$$

例如 $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}(x^2-2xy+3y^2)=2^2-2\cdot 2\cdot 1+3\cdot 1^2=3,$