

分形几何

—数学基础及其应用

[英]肯尼思·法尔科内 著

FRACTAL GEOMETRY

Mathematical Foundations
and Applications

曾文曲 刘世耀 戴连贵 高占阳 译



NEUPRESS
东北大学出版社

分形几何

——数学基础及其应用

(英) 肯尼思·法尔科内 著

曾文曲 刘世耀 译
戴连贵 高占阳

东北大学出版社

内 容 提 要

分形几何的概念是由 B. Mandelbrot 于 1975 年首先提出的,十几年来,它已经迅速发展成为一门新兴的数学分支。这是一个研究和处理自然与工程中不规则图形的强有力的理论工具,它的应用几乎涉及自然科学的各个领域,甚至于社会科学,并且实际上正起着把现代科学各个领域连结起来的作用。人们把它与耗散结构及混沌理论共称为 20 世纪 70 年代中期科学上的三大重要发现。

本书是一本 1990 年才在英国初版的介绍分形理论与应用的最新专著,第一部分叙述分形几何的基本理论,主要是分维的定义与计算技巧。第二部分,广泛地介绍了分形理论在数学与物理上的各方面的应用。

本书集分形理论与应用于一体,处理方法简单明了,有很强的可读性。译著中保留了原书的百幅左右的精美分形图像,是一本很好的研究生教材,可供有兴趣于分形理论及应用的大学师生及科技人员选用。

图书在版编目(CIP)数据

分形几何:数学基础及其应用/(英)肯尼思·法尔科内著,曾文曲等译.
—沈阳:东北大学出版社,2001.9

ISBN 7-81006-324-3

I. 分… II. ①肯…②曾… III. 分形几何 IV. O189.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 052309 号

©东北大学出版社出版

(沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号 邮政编码 110006)

电话:(024)23890881

传真:(024)23892538

网址:<http://www.neupress.com> E-mail:neuph@neupress.com

铁岭市新华印刷厂印刷

东北大学出版社发行

开本:850mm×1168mm 1/32 字数:322 千字 印张:12.375

印数:10000~13000 册

1991 年 8 月第 1 版

2001 年 7 月第 4 次印刷

责任编辑:冯淑琴

责任校对:张淑萍

封面设计:唐敏智

责任出版:秦 力

定价:25.00 元

原著者手迹(著者给译者的信)

Dear Prof Zeng & Lin,

Thank you for your letter. I am pleased that the translation of my book 'Frontal Genet.' is progressing well.

I am anxious for a copy of the book to be sent to you under separate cover. Please reproduce the diagrams directly from it.

I have written to my publisher, John Wiley, about this matter, and they should be writing to you. I think that there is no copyright agreement between China and Great Britain, so I do not think that any thing can be done to stop you publishing, or that a fee can be charged. However, it is obviously better that you do the translation with my publisher's permission as well as mine,

s. I hope that they raise no objection

I am sending a short preface to the Chinese edition, which I hope that will be suitable.

I would be most grateful if you would send me a copy of the book when it is published

With best wishes,

Kenneth F. Fairbank.

中译本前言

我为“分形几何——数学基础及其应用”一书已被翻译成中文感到十分荣幸,同时我非常感谢曾文曲教授及刘世耀先生为翻译本书所做的大量工作。

现在,在数学、科学研究及工程技术的许多领域中都有分形应用的特色。最近 15 年来,由于 Benoit Mandelbrot 的书“自然中的分形几何”的出版,分形已被从不同的角度广泛地进行深入细致的研究。

本书包含相当部分的可以应用到分形研究的数学思想与方法的论述,同时也带有各种形式的来自于数学和物理中的例子。希望在自己的研究课题领域中遇到分形的读者,可以从书中找到他们可以接受的有关分形和维数的数学处理的论述。

我非常欢迎由于翻译使更广大的读者能使用这本书,也希望新的读者们将发现这是一本既令人感兴趣又很有用的书。

肯尼思 J·法尔科内

(Kenneth J. Falconer)

1991 年 1 月于 Bristol

译者的话

自从 Benoit B. Mandelbrot 的《Fractal Geometry of Nature》一书出版后,分形几何已在许多学科领域中得到了广泛的应用。国内在这方面的研究也方兴未艾,可以期待分形理论与方法的引入将会大大促进许多学科的进一步发展。

许多人深感缺乏这方面系统的理论教程,也没有合适的有关分形应用的教材。笔者去年 7 月在访问英国期间,看到了英国 Bristol 大学的 K.J. Falconer 刚出版的新书“Fractal Geometry——Mathematical Foundations and Applications”,感到十分兴奋,此书条理清楚,处理方法新颖简洁,深入浅出,明白易懂,集数学基础理论及应用于一身,是一本难得的好教材。当时就萌发了尽快将它译成中文的念头,并当即与作者取得了联系,Falconer 先生对我们的打算非常支持,并寄来了为中国读者写的中文版前言,这无疑是对我们的翻译工作的一个巨大推动。

现在,在各方面的努力下,特别是由于东北大学出版社编辑同志们的出色劳动,这本译作总算与读者见面了。在书出版之际,我们首先应当向徐小荷教授表示深切的感谢,正是由于他的鼓励与支持,我们才有信心在短时间内将本书译完。

我们同样也非常感谢张嗣瀛教授和谢绪凯教授,感谢他们热情关心本书的翻译与出版,感谢他们的鼎力推荐及细心审阅了部分译稿。

应当指出,我校领导对新兴学科的研究是大力支持的。王启义副校长在百忙之中亲自过问了这本书的出版事宜,使这本译著得以尽快出版。东北大学出版社的有关同志也给了我们热情的支持,在这里,我们向他们表示衷心的感谢。

这本译著可以作为大学高年级的选修课教材,更适合作为研究生分形理论课的教本。对从事理论工作的同志,这是一本很好的参考书,而对专业工作者,本书是一本必备的理论指导书。

全书由4人合作共译,具体负责的章节是:曾文曲,前言部分及引论,第3,4,9,11,14章还有第16,18章的部分;刘世耀,第5,10,12,15,17章;高占阳,第1,2,6章及第16章部分;戴连贵,第7,8,13章及第18章部分;最后由曾文曲统稿。由于我们水平有限,译文中会有一些错误,欢迎读者们提出宝贵意见。

原著中有许多印刷错误和小的差错,由于数量较多,无法一一指出,只是在译文中改正了。有关内容的安排与使用方法,原作者在前言和引论中已有详细的说明,这里不赘述了。在原著中,用符号“□”表示每个定理证明完毕及例题计算结束,在译文中仍保留了这个记号。

最后,我们向王玉娟、银燕、林崇、王殿辉、郑连伟诸同志致谢,他(她)们分别抄写了部分译稿。

如果这本译著的出版,能给目前国内已悄然兴起的“分形热”再增添一二分热度,我们的目的也就达到了。

曾文曲

1991年3月于沈阳东北大学

原著前言

经常有人问我这样的问题：“什么是分形？”“什么是分形的维数？”“怎样去找分形维数，它能告诉我们什么？”或者“数学是怎样应用到分形上的？”本书将尽力去回答一些诸如此类的问题。

这本书的主要目的就是给在数学上或其他学科领域上经常遇到分形的人提供一个容易理解的与分形及维数有关的数学论述。尽管本书基本上是一本数学书籍，但书中也试图对分形这个课题提供一个直观的以及数学的洞察。

全书很自然地分成两部分，第一部分是关于分形及分形几何的一般理论。首先介绍了关于维数的各种不同的概念及计算它的方法，然后利用研究古典图形如圆或椭圆的方法去研究分形的几何性质，一个圆的局部可以被一直线段近似；一个圆的投影或“影子”通常是一个椭圆；一个圆与一直线段相交在两个点上等等，分形也具有类似的这些性质。一般说来，维数在这其中起着关键的作用。因此，我们将考虑分形的局部结构，分形的投影和交等等。

书中的第二部分包含一些分形的例子，在其中可能应用了第一部分理论。这些例子是从物理和数学的非常广泛的领域中提取出来的，题目包括：自相似集、自仿射集、函数的图、数论和纯数学的例子、动力系统、Julia 集、随机分形，还有一些物理上的应用。

正文中给出了许多图，同时频繁地给出一些说明性的例子。还有计算机绘制的各种各样的分形，提供这些信息是希望具有计算机程序知识的读者可以自己制作所需要的进一步的图形。

希望本书能给研究人员提供一个有用的参考，因为它提供了作为分形理论基础的易于接受的数学上的一些新进展，并且展示了在特殊情况下它是如何应用的。书中包含了与分形有关的非常广泛的数学思想。特别在第二部分提供了一些可以得到的结果而不是详细地探讨任何一个主题，并且题目的选择在某种程度上是作者的偏好，肯定有一些主要的应用没有包含在本书中。一些最早的材料可追溯到 20 世纪初，而另一些又是非常新的。

在每一章的结尾都提供了一些注记和参考书目，绝不可能把参考文献全都列出来。确实，在所涉及的各个题目中，如果把完整的参考文献都列出来将是浩如烟海的，但是总是希望提供的参考文献包含足够的信息，使欲从事这方面工作的人能更进一步了解这个主题。

本书可以作为研究生、或者大学高年级学生的分形数学教程。为了理解每一章的内容，在每章后面都有一些练习题，较难的部分和证明都用“*”注明，并且在不影响有关问题的连贯性的条件下，可以删去。

一直努力使书中的数学知识保持在数学和物理系毕业生或将要毕业的勤奋学生能理解的程度上，特别是测度论思想保持在最低限度上，读者可以把一个集上的测度作为一个质量分布，在可以接受测度论和它的一些直观性质的前提下，我们在论述中就基本不需要更深入的测度理论。

为了避免与其他结论混淆，所有结论都是精确给出的。我们用的方法一般来说是严格的，但是一些较难或技巧性较高的证明，或是给出证明的梗概，或完全删去（但是一些较难的证明并不是在形成其他理论时没有用，特别是在随机分形和集的大交上）。合适的图可以帮助理解几何性质的证明，书中也绘制出了一些图，读者可以发现，这有助于绘制其他图形。

第 1 章是以对一些基本的数学概念和定义的快速浏览开始的，例如，集合论和函数论，书中自始至终应用这些概念。也介

绍了测度和质量分布，希望这些都适于读者。概率论部分对随机分形及布朗运动这两章有帮助。

因为本书覆盖的题目很广，在概念的应用上完全一致是不可能的，有时不可避免地在本书的一致性上与标准用法之间做一些折衷。

随着计算机作图的出现和分形被做为一种广泛物理现象的模型，在最近几年分形作为一种艺术形式已经相当流行。在某种程度上，缺乏或完全不懂数学知识，可能并不影响对分形的欣赏。但是，对能应用到如此多样化目标上的数学的充分理解，一定能提高我们的鉴赏力。时常听到赞叹：“美丽的分形！”作者相信分形的美丽将在它的数学中进一步被发现。

非常感谢在本书准备过程中提供帮助的人，Philip Drazin 和 Geoffrey Grimmett 对部分手稿做了有益的注记，Peter Shiarly 在计算机绘图和制作一些照片中给了有价值的帮助，Aidan Foss 制作了一些图。我非常感谢 John Wiley and Sons 出版公司的 Charlotte Farmer, Jackie Cowling 和 Stuart Gale 对本书出版所起的作用。

特别感谢要归于 David Marsh，他不但对手稿做了有用的注记和制作了许多计算机图形，而且还以最有经验的方式打印了手稿。

最后，我还要感谢我的妻子 Isobel 的支持和鼓励，这些促使我继续去阅读本书的各种手稿。

Kenneth J. Falconer
Bristol, 1989 年 4 月

目 录

原著者手迹

中译本前言

译者的话

原著前言

引 论 1

I 基 础

1. 数学基础 14

1.1 集合论基础 14

1.2 函数和极限 18

1.3 测度和质量分布 23

1.4 有关概率论的注记 31

1.5 注记和参考文献 38

练 习 39

2. 豪斯道夫测度和维数 41

2.1 豪斯道夫测度 41

2.2 豪斯道夫维数 45

2.3	豪斯道夫维数的计算——简单的例子	48
*2.4	豪斯道夫维数的等价定义	51
*2.5	维数的更精细定义	52
2.6	注记和参考文献	52
	练习	53
3.	维数的其他定义	55
3.1	计盒维数	57
3.2	计盒维数的性质与问题	65
*3.3	修改的计盒维数	67
*3.4	填充 (Packing) 测度与维数	68
3.5	维数的一些其他定义	71
3.6	注记和参考文献	75
	练习	75
4.	计算维数的技巧	78
4.1	基本方法	78
4.2	有限测度子集	88
4.3	位势理论方法	91
*4.4	傅立叶 (Fourier) 变换法	93
4.5	注记和参考文献	95
	练习	95
5.	分形的局部结构	97
5.1	密度	97
5.2	1-集的结构	102
5.3	s -集的切线	107
5.4	注记和参考文献	112
	练习	112

6. 分形的射影	114
6.1 任意集的射影	115
6.2 整数维 s -集的射影	117
6.3 任意整数维集的射影	119
6.4 注记和参考文献	122
练 习	122
7. 分形的乘积	124
7.1 乘积公式	124
7.2 注记和参考文献	133
练 习	133
8. 分形的交	135
8.1 分形的交集公式	136
*8.2 大交集	140
8.3 注记和参考文献	146
练 习	147

II 应用与例子

9. 用变换定义的分形——自相似集和自仿射集	149
9.1 迭代函数图	149
9.2 自相似集的维数	155
9.3 一些变化	160
9.4 自仿射集	167
9.5 对编码图像的应用	173
9.6 注记和参考文献	179
练 习	179

10. 数论中的例子	181
10.1 数中的数字的分布	181
10.2 连分数	183
10.3 丢番图逼近	185
10.4 注记和参考文献	189
练 习	189
11. 函数的图像	191
11.1 图的维数	191
* 11.2 分形函数的自相关	202
11.3 注记和参考文献	205
练 习	206
12. 纯数学中的例子	208
12.1 对偶和 Kakeya 问题	208
12.2 Vitushkin 猜想	212
12.3 凸曲面	213
12.4 分数维的群或环	215
12.5 注记和参考文献	218
练 习	218
13. 动力系统	220
13.1 斥子与迭代函数图	222
13.2 逻辑斯谛 (logistic) 映射	225
13.3 拉伸与折叠变换	229
13.4 螺线管 (The Solenoid)	234
13.5 连续动力系统	239
* 13.6 小因子理论	244

* 13.7 李雅普诺夫指数和熵	248
13.8 注记和参考文献	253
练 习	253
14. 复变函数的迭代——Julia 集	256
14.1 Julia 集的一般理论	256
14.2 二次函数——Mandelbrot 集	265
14.3 二次函数的 Julia 集	271
14.4 拟圆的维数特征	281
14.5 解多项式方程的牛顿法	283
14.6 注记和参考文献	288
练 习	288
15. 随机分形	290
15.1 随机康托集	291
15.2 分形渗流	298
15.3 注记和参考文献	304
练 习	304
16. 布朗运动和布朗曲面	306
16.1 布朗运动	306
16.2 分数布朗运动	316
16.3 平稳过程	320
16.4 布朗曲面	322
16.5 注记和参考文献	325
练 习	325
17. 多重分形测度	327
17.1 多重分形的一种形式体系	328

17.2 注记和参考文献.....	339
练 习.....	339
18. 物理应用	341
18.1 分形的生长.....	344
18.2 静电势和引力势的奇异性.....	350
18.3 流体力学和湍流.....	351
18.4 注记和参考文献.....	355
练 习.....	355
References	357
索 引.....	369
中译本后记.....	376