21世纪

高等院校工科类各专业

数学基础辅导教材 /主 编 刘书田

高等数学

专题分析与解题指导

(上册)

编著者 刘书田 胡京兴

冯翠莲 阎双伦

北京大学出版社

PEKING UNIVERSITY PRESS

21世纪
高等院校工科类各专业
数学基础辅导教材／主编　刘书田

高等数学
专题分析与解题指导
（上册）

编著者　刘书田　胡京兴
冯翠莲　阎双伦

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学专题分析与解题指导·上册/刘书田,胡京兴,冯翠莲等编著.—北京:北京大学出版社,2007.8

(21世纪高等院校工科类各专业数学基础辅导教材)

ISBN 978-7-301-12115-3

Ⅰ.高… Ⅱ.①刘… ②胡… ③冯… Ⅲ.高等数学-高等学校-解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第063854号

书　　名:高等数学专题分析与解题指导(上册)

著作责任者:刘书田　胡京兴　冯翠莲　阎双伦　编著

责 任 编 辑:刘　勇

标 准 书 号:ISBN 978-7-301-12115-3/O·0717

出 版 发 行:北京大学出版社

地　　址:北京市海淀区成府路205号　100871

网　　址:http://www.pup.cn

电　　话:邮购部62752015　发行部62750672　理科编辑部62752021　出版部62754962

电 子 邮 箱:zpup@pup.pku.edu.cn

印　刷　者:北京大学印刷厂

经　销　者:新华书店

787mm×960mm　16开本　19.75印张　450千字

2007年8月第1版　2007年8月第1次印刷

印　　数:0001—5000册

定　　价:28.00元

内 容 简 介

本书是高等院校工科类各专业学生学习高等数学课程的辅导书，与国内通用的各类优秀的《高等数学》教材相匹配，可同步使用. 全书共分七章，内容包括函数与极限，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用，空间解析几何与向量代数等.

本书以高等数学课程教材的内容为准，按题型归类，划分专题进行分析. 以讲思路举例题与举题型讲方法相结合的思维方式叙述. 讲述解题思路的源头，归纳总结具有共性题目的解题方法. 解题简捷、新颖，具有技巧性而又道理显然，可使读者思路畅达，所学知识融会贯通，灵活运用，达到事半功倍之效.

本书是工科类各专业在校学生学习高等数学必备的辅导教材，是有志考研学生的精品之选，是授课教师极为有益的教学参考书，是无师自通的自学指导书.

《21世纪高等院校工科类各专业数学基础辅导教材》
编审委员会

21世纪高等院校工科类各专业数学基础辅导教材书目

高等数学专题分析与解题指导(上册)	刘书田等编著	定价28.00元
高等数学专题分析与解题指导(下册)	刘书田等编著	估价25.00元
线性代数专题分析与解题指导	赵慧斌等编著	定价22.00元
概率统计专题分析与解题指导	肖筱南　编著	定价25.00元

前　言

为了满足高等院校工科类在校学生学习数学基础课的需要，我们在教学第一线的教师经集体讨论、反复推敲、分工执笔编写了《21世纪高等院校工科类各专业数学基础辅导教材》. 该系列辅导教材包括《高等数学专题分析与解题指导(上、下册)》、《线性代数专题分析与解题指导》、《概率统计专题分析与解题指导》共四分册.

本书《高等数学专题分析与解题指导》的内容选取和排序紧密结合"高等数学课程"现行教材体系，例题多样、典型. 以教材内容为准，以题型归类划分专题，以"讲思路举例题"与"举题型讲方法"相结合的思维方式叙述，强调培养学生的数学思维能力和数学方法的训练. 在每个专题中，首先概括题型特征，揭示具有共性题目的条件与结论之间的逻辑关系，分析解题时应用到的定义、定理、公式和法则，从源头上阐明解题思路，解题方法、解题程序和解题关键；然后再以此为指导讲述相应的例题(在讲述解题思路时，标明相应的例题编号).

阅读本书不仅提高读者数学思维能力、分析问题解决问题的能力，使读者花费较少的时间和精力，掌握求解各种题型的思路和方法，取得事半功倍之效果，而且能使读者运用已掌握的知识，实现纵向深入，横向联系，由继承性获得向创造性升华.

本书是工科在校大学生学习高等数学课程的辅导佳作，是报考硕士研究生的学生进行强化训练的精品，也是对授课教师有所裨益的教学参考书.

参加本书编写工作的还有徐军京、袁荫棠、孙惠玲.

限于编者水平，书中难免有不妥之处，恳请读者指正.

编　者

2007年6月

目　　录

第一章　函数与极限 …………………………………………………… (1)

一、函数的复合关系 …………………………………………………… (1)

二、函数的几种特性 …………………………………………………… (3)

三、用极限定义证明数列和函数的极限 ……………………………… (8)

四、极限运算法则与代数函数的极限 ………………………………… (12)

五、用两个重要极限求极限 …………………………………………… (18)

六、用等价无穷小代换求极限 ………………………………………… (22)

七、用单侧极限存在准则求极限 ……………………………………… (25)

八、用夹逼准则和单调有界准则求极限 ……………………………… (27)

九、通项为 n 项和与 n 个因子乘积的极限的求法 ……………………… (33)

十、确定待定常数、待定函数和待定极限 ……………………………… (35)

十一、函数的连续性与间断点 ………………………………………… (39)

十二、极限函数及其连续性 …………………………………………… (44)

十三、闭区间上连续函数性质的应用 ………………………………… (47)

十四、曲线渐近线的求法 ……………………………………………… (51)

习题一 …………………………………………………………………… (53)

第二章　导数与微分 …………………………………………………… (56)

一、正确理解和应用导数定义 ………………………………………… (56)

二、分段函数的导数 …………………………………………………… (62)

三、用导数运算法则求导数 …………………………………………… (67)

四、高阶导数的求法 …………………………………………………… (72)

五、隐函数求导数 ……………………………………………………… (76)

六、求由参数方程所确定函数的导数 ………………………………… (79)

七、曲线的切线和法线 ………………………………………………… (80)

八、微分概念及其计算 ………………………………………………… (83)

习题二 …………………………………………………………………… (84)

第三章　微分中值定理与导数的应用 ………………………………… (87)

一、罗尔定理条件的推广 ……………………………………………… (87)

二、用微分中值定理证明函数恒等式 ………………………………… (88)

三、直接用微分中值定理证明中值等式 …… (89)
四、用选取辅助函数的方法证明中值等式 …… (96)
五、用微分中值定理证明中值不等式 …… (103)
六、用微分中值定理证明不等式 …… (106)
七、用函数或曲线的性态证明不等式 …… (109)
八、用微分中值定理求极限 …… (114)
九、用洛必达法则求极限 …… (116)
十、用泰勒公式求极限 …… (120)
十一、函数或曲线的性态 …… (123)
十二、用图形的对称性确定函数(曲线)的性态 …… (131)
十三、用导数讨论方程的根 …… (135)
习题三 …… (141)

第四章 不定积分 …… (144)
一、原函数与不定积分概念 …… (144)
二、用第一换元积分法求积分 …… (146)
三、用第二换元积分法求积分 …… (156)
四、用分部积分法求积分 …… (160)
五、有理函数的积分 …… (165)
六、三角函数有理式积分的方法 …… (168)
七、用解方程组的方法求不定积分 …… (170)
习题四 …… (174)

第五章 定积分 …… (177)
一、定积分概念 …… (177)
二、定积分的性质及其应用 …… (182)
三、变限定积分函数求导数 …… (190)
四、变限定积分函数的极限 …… (195)
五、变限定积分函数的性态分析 …… (199)
六、由定积分表示的变量的极限 …… (202)
七、求解含定积分号的函数方程 …… (205)
八、分段求定积分 …… (209)
九、定积分的换元法和分部积分法 …… (212)
十、证明定积分等式 …… (224)
十一、用中值定理证明有关定积分等式及方程的根 …… (228)
十二、证明定积分不等式 …… (235)

十三、用反常积分敛散性的定义计算反常积分 …………………………… (246)
习题五…………………………………………………………………… (250)
第六章 定积分的应用……………………………………………………… (254)
一、定积分在几何学上的应用 ……………………………………… (254)
二、定积分在物理学上的应用 ……………………………………… (263)
习题六…………………………………………………………………… (266)
第七章 向量代数与空间解析几何……………………………………… (268)
一、向量概念及向量的运算 ………………………………………… (268)
二、平面及其方程 …………………………………………………… (274)
三、直线及其方程 …………………………………………………… (280)
四、空间曲面与曲线 ………………………………………………… (286)
习题七…………………………………………………………………… (288)
习题答案与解法提示……………………………………………………… (291)

第一章　函数与极限

一、函数的复合关系

1. 在 $f(x)$，$\varphi(x)$ 和 $f(\varphi(x))$ 三个函数中，若已知其二，便可求得其三

(1) 已知 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$，求 $f(\varphi(x))$ 的**解题思路**：

将 $f(x)$ 中的 x 代换以 $\varphi(x)$ 即得 $f(\varphi(x))$.

(2) 已知 $f(x)$ 和 $f(\varphi(x))$ 求 $\varphi(x)$ 的**解题思路**：

将 $f(x)$ 中的 x 换以 $\varphi(x)$ 得含未知 $\varphi(x)$ 的 $f(\varphi(x))$，令其等于已知 $f(\varphi(x))$ 的表达式，从而解出 $\varphi(x)$. 见例 1.

(3) 已知 $\varphi(x)$ 和 $f(\varphi(x))$ 求 $f(x)$ 的**解题思路**：

变量替换法：令 $u=\varphi(x)$，求得 $x=\varphi^{-1}(u)$，将其代入 $f(\varphi(x))$ 表达式中的 x 即得 $f(u)$，再将 u 换成 x 得 $f(x)$. 此法具有一般性. 见例 2.

直接表示法：将 $f(\varphi(x))$ 的表达式设法表示成 $\varphi(x)$ 的函数，然后将式中的 $\varphi(x)$ 换成 x 即得 $f(x)$. 见例 3.

(4) 已知 $f(g(x))$，$g(x)$ 和 $f(\varphi(x))$，求 $\varphi(x)$ 的**解题思路**：

这是上述(3)和(2)情况的综合，先由 $g(x)$ 和 $f(g(x))$ 求 $f(x)$；再由 $f(x)$ 和 $f(\varphi(x))$ 求 $\varphi(x)$. 见例 4.

2. 已知关于 $f(x)$ 和 $f(\varphi(x))$ 的一个等式，求 $f(x)$ 的解题思路

令 $t=\varphi(x)$，求得 $x=\varphi^{-1}(t)$. 将原等式中的 x 换为 $\varphi^{-1}(t)$，可得到关于 $f(t)$ 和 $f(\varphi^{-1}(t))$ 的另一等式. 若 $\varphi(x)=\varphi^{-1}(x)$，由解上述两个等式的方程组可得 $f(x)$，见例 5；若 $\varphi(x)\neq\varphi^{-1}(x)$，需再作变量替换，见例 6.

3. 分段函数的复合函数

若 $f(x)$ 为分段函数，$\varphi(x)$ 为分段函数或为初等函数，求复合函数 $f(\varphi(x))$ 或 $\varphi(f(x))$ 时，可采取先内后外或先外后内的分析法. 见例 7.

例 1　已知 $f(x)=\sin x$，$f(\varphi(x))=1-x^2$，且 $|\varphi(x)|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，求 $\varphi(x)$ 并写出其定义域.

解　依题设 $f(\varphi(x))=\sin\varphi(x)=1-x^2$，有 $\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$，其定义域

$$D=\{x\,|\,|1-x^2|\leqslant 1\}=\{x\,|\,0\leqslant x^2\leqslant 2\}=\{x\,|\,|x|\leqslant\sqrt{2}\}.$$

例 2　已知 $f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=\dfrac{x}{x-1}$，求 $f(x)$.

解　用变量替换法. 令 $u=\dfrac{x}{x+1}$，可解得 $x=\dfrac{u}{1-u}$，将其代入已知等式，有

$$f(u)=\frac{\frac{u}{1-u}}{\frac{u}{1-u}-1}=\frac{u}{2u-1},\quad 即\quad f(x)=\frac{x}{2x-1},\quad x\neq\frac{1}{2}.$$

例 3　已知 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^4+1)$，求 $f(x)$.

解　用直接表示法. 由于

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^4+1}=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2},$$

所以
$$f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{x^2-2}=-\frac{1}{2}\ln(x^2-2),\quad |x|>\sqrt{2}.$$

例 4　已知 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2+1}{x^2-3}$，$f(\varphi(x))=x^2$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

解　因　$f(x^2-1)=\ln\frac{x^2+1}{x^2-3}=\ln\frac{x^2-1+2}{x^2-1-2}$，　故　$f(x)=\ln\frac{x+2}{x-2}$. 又

$$f(\varphi(x))=\ln\frac{\varphi(x)+2}{\varphi(x)-2}=x^2,\quad 即\quad \frac{\varphi(x)+2}{\varphi(x)-2}=e^{x^2},$$

可解得 $\varphi(x)=\frac{2(1+e^{x^2})}{e^{x^2}-1}$，$x\neq 0$. 由此可知 $\varphi(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

例 5　设 $f\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)-2f(x)=x$，求 $f(x)$.

解　令 $t=\frac{x+1}{2x-1}$，可解得 $x=\frac{t+1}{2t-1}$，将其代入原等式，则有

$$f(t)-2f\left(\frac{t+1}{2t-1}\right)=\frac{t+1}{2t-1}.$$

于是有 $\begin{cases} f\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)-2f(x)=x, \\ 2f\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)-f(x)=-\frac{x+1}{2x-1}. \end{cases}$ 将 $f(x)$ 和 $f\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)$ 看做未知数，解此线性方程组，可求得 $f(x)=\frac{4x^2-x+1}{3(1-2x)}$.

例 6　设 $f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=2x$，求 $f(x)$.

解　令 $t=\frac{x-1}{x}$，得 $x=\frac{1}{1-t}$，代入原式得

$$f\left(\frac{1}{1-t}\right)+f(t)=\frac{2}{1-t},\quad 即\quad f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2}{1-x}. \tag{1}$$

再设 $u=\frac{1}{1-x}$，可得 $x=\frac{u-1}{u}$，代入原式得

$$f\left(\frac{u-1}{u}\right)+f\left(\frac{1}{1-u}\right)=\frac{2(u-1)}{u},\quad 即\quad f\left(\frac{1}{1-x}\right)=-f\left(\frac{x-1}{x}\right)+\frac{2(x-1)}{x}.$$

将上式代入(1)式得

$$f(x)-f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{2(x^2-x+1)}{x(1-x)}. \tag{2}$$

由已知式和(2)式可解得 $f(x)=x+\frac{x^2-x+1}{x(1-x)}$.

例 7 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ 求 $f(g(x))$.

解 1 按先内层函数后外层函数的方法,有

$$f(g(x))=\begin{cases}f(2-x), & x\leqslant 0,\\ f(x+2), & x>0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(2-x)^2, & 2-x<0\text{ 且 }x\leqslant 0,\\ -(2-x), & 2-x\geqslant 0\text{ 且 }x\leqslant 0,\\ (x+2)^2, & x+2<0\text{ 且 }x>0,\\ -(x+2), & x+2\geqslant 0\text{ 且 }x>0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x-2, & x\leqslant 0,\\ -x-2, & x>0.\end{cases}$$

解 2 按先外层函数后内层函数的方法,有

$$f(g(x))=\begin{cases}[g(x)]^2, & g(x)<0,\\ -g(x), & g(x)\geqslant 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(2-x)^2, & x\leqslant 0\text{ 且 }2-x<0,\\ (x+2)^2, & x>0\text{ 且 }x+2<0,\\ -(2-x), & x\leqslant 0\text{ 且 }2-x\geqslant 0,\\ -(x+2), & x>0\text{ 且 }x+2\geqslant 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x-2, & x\leqslant 0,\\ -x-2, & x>0.\end{cases}$$

二、函数的几种特性

函数的几种特性是指函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性.

例 1 设 $f(x)$是偶函数,$\varphi(x)$是奇函数,则下列函数(假设都有意义)中,是奇函数的是(　　).

(A) $f(\varphi(x))$　　(B) $f(f(x))$　　(C) $\varphi(f(x))$　　(D) $\varphi(\varphi(x))$

解 选(D).令 $g(x)=\varphi(\varphi(x))$,注意 $\varphi(x)$是奇函数,有

$$g(-x)=\varphi(\varphi(-x))=\varphi(-\varphi(x))=-\varphi(\varphi(x))=-g(x).$$

注　复合函数的奇偶性:若 $f(x)$是偶函数,$\varphi(x)$是奇函数,则在 4 个复合函数 $f(\varphi(x))$,$f(f(x))$,$\varphi(f(x))$,$\varphi(\varphi(x))$中,只有 $\varphi(\varphi(x))$是奇函数,其余均为偶函数.

例 2　将函数 $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$ 分解为一个偶函数与一个奇函数之和.

解　$f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$,有

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

$$=\frac{1}{2}[\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+x+1}]+\frac{1}{2}[\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}].$$

可以证明 $F(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$是偶函数,$G(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$是奇函数.

注　任意一个定义在以原点为对称区间上的函数 $f(x)$都可以分解为一个偶函数 $F(x)$与一个奇函数 $G(x)$之和,其中

$$F(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],\quad G(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

例 3　设 $f(x)=\sin(\cos x)$,$\varphi(x)=\cos(\sin x)$,则在区间$(0,\pi/2)$内(　　).

(A) $f(x)$是增函数,$\varphi(x)$是减函数　　(B) $f(x)$,$\varphi(x)$都是减函数

(C) $f(x)$是减函数,$\varphi(x)$是增函数　　(D) $f(x)$,$\varphi(x)$都是增函数

解　选(B).注意到在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内,$\sin x$ 是增函数,$\cos x$ 是减函数.

任取 $x_1,x_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,且 $x_1<x_2$,有 $\cos x_1>\cos x_2$,所以 $\sin(\cos x_1)>\sin(\cos x_2)$,即 $f(x)$是减函数;由于 $\sin x_1<\sin x_2$,所以 $\cos(\sin x_1)>\cos(\sin x_2)$,即 $\varphi(x)$是减函数.

注　**复合函数的单调性**:若 $f(x)$是增函数,$\varphi(x)$是减函数,则 $f(f(x))$,$\varphi(\varphi(x))$是增函数,而 $f(\varphi(x))$,$\varphi(f(x))$是减函数.

例 4　设 $f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的偶函数,$f(x)$在$(0,+\infty)$内单调增加,解方程

$$f(x)=f\left(\frac{24}{x+10}\right).$$

分析　按单调函数的定义,在 $f(x)$的单调区间内,有 $x_1\neq x_2\Longleftrightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$.

解　由于 $f(x)$是偶函数,其图形关于 y 轴对称,所以 $f(x)$在$(-\infty,0)$内单调减少.

当 x 与$\frac{24}{x+10}$同号时,根据函数的单调性,依题设,必有

$$x=\frac{24}{x+10},\quad 即\quad x^2+10x-24=0,\quad 得\quad x_1=2,\quad x_2=-12.$$

当 x 与$\frac{24}{x+10}$异号时,根据函数的单调性及偶函数,必有

$$x=-\frac{24}{x+10},\quad 解得\quad x_3=-4,\quad x_4=-6.$$

注　**奇偶函数的单调性**:在区间$(-l,0)$和$(0,l)$内,奇函数的单调性保持一致,偶函数的单调性恰好相反.

例 5　设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,证明 $F(x)=\frac{[f(x)]^2}{1+[f(x)]^4}$在$(-\infty,+\infty)$内是有界函数.

证　对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，都有

$$(1-[f(x)]^2)^2=1-2[f(x)]^2+[f(x)]^4\geqslant 0,\quad \text{即}\quad 2[f(x)]^2\leqslant 1+[f(x)]^4,$$

所以

$$0\leqslant F(x)=\frac{[f(x)]^2}{1+[f(x)]^4}\leqslant\frac{1}{2}.$$

按函数有界定义，$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有界.

例 6　设函数 $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}[x]\right)$，其中$[x]$表示取整函数，分析 $f(x)$的奇偶性、周期性和有界性，并作出函数 $y=\cos\left(\frac{\pi}{2}[x]\right)$的图形.

解　由取整函数的定义，任取 $x\in(-\infty,+\infty)$，设 $n\leqslant x<n+1$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$. $[x]=n$，$[-x]=-n-1$. 于是

$$\begin{aligned}f(-x)&=\cos\left(\frac{\pi}{2}[-x]\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}(-n-1)\right)\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{n\pi}{2}.\end{aligned}$$

而 $f(x)=\cos\frac{n\pi}{2}$，所以 $f(-x)\neq f(x)$，$f(-x)\neq -f(x)$，即 $f(x)$既不是奇函数，也不是偶函数.

对任取 $x\in(-\infty,+\infty)$，因

$$\begin{aligned}f(x+4)&=\cos\left(\frac{\pi}{2}[x+4]\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}([x]+4)\right)\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}[x]+2\pi\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}[x]\right)=f(x),\end{aligned}$$

所以 $f(x)$是以 4 为周期的周期函数.

对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，因$|f(x)|\leqslant 1$，所以 $f(x)$是有界函数，函数 $y=f(x)$的图形如图 1-1 所示.

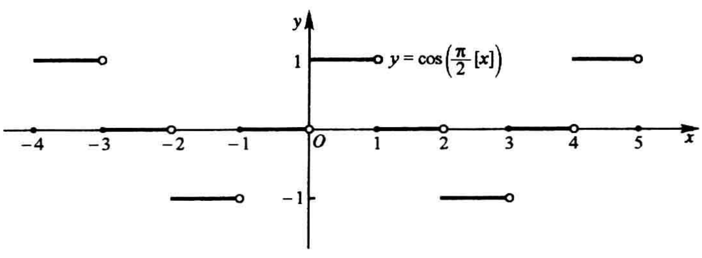

图　1-1

注　对周期函数有如下结论：

(1) 若函数 $f(x)$的周期为 T，则 $f(ax+b)$的周期为$\frac{T}{|a|}$；

(2) 若函数 $f(x)$，$g(x)$的周期都是 T，则 $f(x)\pm g(x)$的周期也是 T；

(3) 若函数 $f(x)$, $g(x)$ 的周期分别是 $T_1, T_2(T_1 \neq T_2)$，且 T_1 与 T_2 是可通约的，则 $f(x) \pm g(x)$ 和 $f(x) \cdot g(x)$ 都是以 T_1 和 T_2 的最小公倍数 T 为周期的周期函数.

例 7 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数，且在 $[0,T)$ 内，

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leqslant x < \dfrac{T}{2}, \\ -x + \dfrac{T}{2}, & \dfrac{T}{2} \leqslant x < T. \end{cases}$$

试写出 $f(x)$ 在 $[T,3T)$ 内的表达式.

解 依题设 $f(x+nT) = f(x)$，且当 $0 \leqslant x+nT < T$ 时，即当 $-nT \leqslant x < (-n+1)T$ 时，有

$$f(x) = \begin{cases} (x+nT)^2, & -nT \leqslant x < -nT + \dfrac{T}{2}, \\ -(x+nT) + \dfrac{T}{2}, & -nT + \dfrac{T}{2} \leqslant x < (-n+1)T. \end{cases}$$

分别取 $n=-1, n=-2$，有

$$f(x) = \begin{cases} (x-T)^2, & T \leqslant x < \dfrac{3T}{2}, \\ -x + \dfrac{3T}{2}, & \dfrac{3T}{2} \leqslant x < 2T, \\ (x-2T)^2, & 2T \leqslant x < \dfrac{5T}{2}, \\ -x + \dfrac{5T}{2}, & \dfrac{5T}{2} \leqslant x < 3T. \end{cases}$$

例 8 设存在正数 T 和 $R(\neq 1)$，使对一切实数 x 都有 $f(x+T) = Rf(x)$. 试证明函数 $f(x)$ 一定可以分解为一个指数函数与一个以 T 为周期的函数之积.

分析 假设有 $f(x) = a^x \varphi(x)$，且 $\varphi(x+T) = \varphi(x)$，由此来确定 a 和 $\varphi(x)$. 由题设

$$Rf(x) = f(x+T) = a^{x+T}\varphi(x+T) = a^T \cdot a^x \varphi(x) = a^T f(x),$$

即 $a = R^{\frac{1}{T}}$，从而 $\varphi(x) = R^{-\frac{x}{T}} f(x)$.

证 令 $f(x) = R^{\frac{x}{T}}\varphi(x)$，其中 $R^{\frac{x}{T}}$ 是指数函数，下面证明 $\varphi(x) = \varphi(x+T)$. 由于 $\varphi(x) = R^{-\frac{x}{T}} f(x)$，且

$$\varphi(x+T) = R^{-\frac{x+T}{T}} f(x+T) = R^{-\frac{x}{T}-1} \cdot Rf(x) = R^{-\frac{x}{T}} f(x) = \varphi(x),$$

所以 $\varphi(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

例 9 设函数 $f(x) = x - [x]$，试确定：

(1) $f(x)$ 的定义域　　(2) $f(x)$ 的值域

(3) $f(x)$ 是有界函数　　(4) $f(x)$ 是以 1 为周期的周期函数

解 因 $y = [x]$ 是取整函数：$y = [x] = n, n \leqslant x < n+1, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$，该函数的定义

域是$(-\infty,+\infty)$，值域是整数集合$\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$.

(1) 由 $y=[x]$的定义域知，$f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$.

(2) 按 $y=[x]$的意义知，对 $n\leqslant x<n+1$，$x-[x]\geqslant n-n=0$，$x-[x]<n+1-n=1$，即 $0\leqslant x-[x]<1$.

由此 $f(x)$的值域是$[0,1)$. 这表明 $f(x)=x-[x]$表示 x 的非负小数部分.

(3) 由 $f(x)$的值域知，该函数是有界函数.

(4) 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f(x+1)=x+1-[x+1]=x+1-([x]+1)=x-[x]=f(x).$$

上式表明，$f(x)$是以 1 为周期的周期函数，$f(x)=x-[x]$的图形如图 1-2 所示.

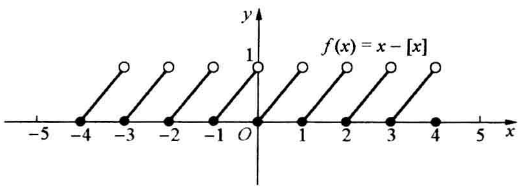

图 1-2

例 10 设 λ,μ 是正数，且 $\lambda+\mu=1$，证明：

(1) 若 $f(x)$是$[0,+\infty)$上的单调减函数，对任何 $x\in[0,+\infty)$，有不等式

$$f(x)\leqslant\lambda f(\lambda x)+\mu f(\mu x);$$

(2) 若$\dfrac{f(x)}{x}$是$(0,+\infty)$内的单调减函数，对任何 $x\in(0,+\infty)$，有不等式

$$f(x)\leqslant f(\lambda x)+f(\mu x);$$

(3) 由(2)证明：对任何正数 a,b，有 $f(a+b)\leqslant f(a)+f(b)$.

分析 (1) 由题设知，在$[0,+\infty)$上，有 $\lambda x\leqslant x$，$\mu x\leqslant x$，从而 $f(\lambda x)\geqslant f(x)$，$f(\mu x)\geqslant f(x)$；并注意$(\lambda+\mu)f(x)=f(x)$.

(2) 由(1)的结果可推出(2)的结果.

证 (1) 由于 $\lambda>0$，$\mu>0$，且 $\lambda+\mu=1$，有 $0<\lambda<1$，$0<\mu<1$；故任取 $x\in[0,+\infty)$，有 $\lambda x\leqslant x$，$\mu x\leqslant x$；又 $f(x)$是单减函数，所以

$$f(\lambda x)\geqslant f(x),\quad f(\mu x)\geqslant f(x).$$

上两式两边分别乘以 λ 和 μ，并相加，得

$$\lambda f(\lambda x)+\mu f(\mu x)\geqslant\lambda f(x)+\mu f(x)=(\lambda+\mu)f(x)=f(x).$$

(2) 由于$\dfrac{f(x)}{x}$是$(0,+\infty)$内的单减函数，用(1)的结果，有

$$\frac{f(x)}{x}\leqslant\lambda\frac{f(\lambda x)}{\lambda x}+\mu\frac{f(\mu x)}{\mu x}=\frac{f(\lambda x)}{x}+\frac{f(\mu x)}{x},$$

即
$$f(x)\leqslant f(\lambda x)+f(\mu x).$$

(3) 令 $x=a+b$，$\lambda=\dfrac{a}{a+b}$，$\mu=\dfrac{b}{a+b}$，由(2)的不等式，有 $f(a+b)\leqslant f(a)+f(b)$.

例 11 (1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,则曲线 $y=f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称的充要条件是对一切 x,都有 $f(a+x)=f(a-x)$;

(2) 若 $a\neq b$,求曲线 $y=\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x-b}$ 的铅直对称轴 $x=x_0$;

(3) 若曲线 $y=f(x)$ 有两条铅直对称轴 $x=a,x=b(a<b)$,则函数 $f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数.

分析 (1) 若点 (x,y) 在曲线 $y=f(x)$ 上,按题设,它关于直线 $x=a$ 对称的点 (x_1,y_1) 也在曲线 $y=f(x)$ 上,即有 $y_1=f(x_1)$. 而 $x_1-a=a-x$,即 $x_1=2a-x,y_1=y$. 因而对任意 x,有

$$y=f(x)=f(2a-x).$$

解 (1) 设曲线 $y=f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称,按上述分析,对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,必有 $f(x)=f(2a-x)$. 从而有

$$f(a+x)=f(2a-(a+x))=f(a-x).$$

对函数 $f(x)$,设对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,有 $f(a+x)=f(a-x)$ 成立. 令 $t=a+x$,则

$$f(t)=f(a-(t-a))=f(2a-t),$$

即对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,有 $f(x)=f(2a-x)$,从而曲线 $y=f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称.

(2) 因曲线 $y=\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x-b}$ 关于直线 $x=x_0$ 对称,有 $f(x_0+x)=f(x_0-x)$,即

$$\frac{1}{x_0+x-a}-\frac{1}{x_0+x-b}=\frac{1}{x_0-x-a}-\frac{1}{x_0-x-b},$$

$$\frac{1}{x_0+x-a}-\frac{1}{x_0-x-a}=\frac{1}{x_0+x-b}-\frac{1}{x_0-x-b},$$

或 $$\frac{2x}{(x_0-a)^2-x^2}=\frac{2x}{(x_0-b)^2-x^2},\quad 即\quad (x_0-a)^2-x^2=(x_0-b)^2-x^2,$$

可解得 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$,即曲线的铅直对称轴 $x=\dfrac{a+b}{2}$.

(3) 由(1)及题设,对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,有 $f(x)=f(2a-x),f(x)=f(2b-x)$. 由于

$$f(x+2(b-a))=f(2b-(2a-x))=f(2a-x)=f(x).$$

按周期函数的定义,$f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数.

三、用极限定义证明数列和函数的极限

1. 用定义证明数 A 是数列 $\{x_n\}$ 的极限的解题思路

数列极限的定义可表达为

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\Longleftrightarrow$ 对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,当 $n>N$ 时,就有 $|x_n-A|<\varepsilon$.