



国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中外物理学精品书系

前沿系列 · 19

数学物理方法专题

——数理方程与特殊函数

吴崇试 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

013031593

0411.1
65



国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中外物理学精品书系

前沿系列 · 19

数学物理方法专题

——数理方程与特殊函数



北航

C1636429

0411.1
65



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

013021283

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法专题：数理方程与特殊函数/吴崇试编著. —北京：北京大学出版社，
2012.12

(中外物理学精品书系·前沿系列)

ISBN 978-7-301-21839-6

I. ①数… II. ①吴… III. ①数学物理方法 IV. ①O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 311165 号

书 名：数学物理方法专题——数理方程与特殊函数

著作责任者：吴崇试 编著

责任编辑：尹照原

标准书号：ISBN 978-7-301-21839-6/O·0907

出版发行：北京大学出版社

地 址：北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址：<http://www.pup.cn> 新浪官方微博：@北京大学出版社

电 话：邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62752021

出版部 62754962

电子邮箱：zpup@pup.pku.edu.cn

印 刷 者：北京中科印刷有限公司

经 销 者：新华书店

730 毫米×980 毫米 16 开本 33 印张 647 千字

2012 年 12 月第 1 版 2012 年 12 月第 1 次印刷

定 价：85.00 元

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有，侵权必究

举报电话：010-62752024 电子信箱：fd@pup.pku.edu.cn

《中外物理学精品书系》

编委会

主任：王恩哥

副主任：夏建白

编委：（按姓氏笔画排序，标*号者为执行编委）

王力军	王孝群	王 牧	王鼎盛	石 兢
田光善	冯世平	邢定钰	朱邦芬	朱 星
向 涛	刘 川*	许宁生	许京军	张 酣*
张富春	陈志坚*	林海青	欧阳钟灿	周月梅*
郑春开*	赵光达	聂玉昕	徐仁新*	郭 卫*
资 剑	龚旗煌	崔 田	阎守胜	谢心澄
解士杰	解思深	潘建伟		

秘 书：陈小红

序 言

物理学是研究物质、能量以及它们之间相互作用的科学。她不仅是化学、生命、材料、信息、能源和环境等相关学科的基础，同时还是许多新兴学科和交叉学科的前沿。在科技发展日新月异和国际竞争日趋激烈的今天，物理学不仅囿于基础科学和技术应用研究的范畴，而且在社会发展与人类进步的历史进程中发挥着越来越关键的作用。

我们欣喜地看到，改革开放三十多年来，随着中国政治、经济、教育、文化等领域各项事业的持续稳定发展，我国物理学取得了跨越式的进步，做出了很多为世界瞩目的研究成果。今日的中国物理正在经历一个历史上少有的黄金时代。

在我国物理学科快速发展的背景下，近年来物理学相关书籍也呈现百花齐放的良好态势，在知识传承、学术交流、人才培养等方面发挥着无可替代的作用。从另一方面看，尽管国内各出版社相继推出了一些质量很高的物理教材和图书，但系统总结物理学各门类知识和发展，深入浅出地介绍其与现代科学技术之间的渊源，并针对不同层次的读者提供有价值的教材和研究参考，仍是我国科学传播与出版界面临的一个极富挑战性的课题。

为有力推动我国物理学研究、加快相关学科的建设与发展，特别是展现近年来中国物理学家的研究水平和成果，北京大学出版社在国家出版基金的支持下推出了《中外物理学精品书系》，试图对以上难题进行大胆的尝试和探索。该书系编委会集结了数十位来自内地和香港顶尖高校及科研院所的知名专家学者。他们都是目前该领域十分活跃的专家，确保了整套丛书的权威性和前瞻性。

这套书系内容丰富，涵盖面广，可读性强，其中既有对我国传统物理学发展的梳理和总结，也有对正在蓬勃发展的物理学前沿的全面展示；既引进和介绍了世界物理学研究的发展动态，也面向国际主流领域传播中国物理的优秀专著。可以说，《中外物理学精品书系》力图完整呈现近现代世界和中国物理

科学发展的全貌，是一部目前国内为数不多的兼具学术价值和阅读乐趣的经典物理丛书。

《中外物理学精品书系》另一个突出特点是，在把西方物理的精华要义“请进来”的同时，也将我国近现代物理的优秀成果“送出去”。物理学科在世界范围内的重要性不言而喻，引进和翻译世界物理的经典著作和前沿动态，可以满足当前国内物理教学和科研工作的迫切需求。另一方面，改革开放几十年来，我国的物理学研究取得了长足发展，一大批具有较高学术价值的著作相继问世。这套丛书首次将一些中国物理学者的优秀论著以英文版的形式直接推向国际相关研究的主流领域，使世界对中国物理学的过去和现状有更多的深入了解，不仅充分展示出中国物理学研究和积累的“硬实力”，也向世界主动传播我国科技文化领域不断创新的“软实力”，对全面提升中国科学、教育和文化领域的国际形象起到重要的促进作用。

值得一提的是，《中外物理学精品书系》还对中国近现代物理学科的经典著作进行了全面收录。20世纪以来，中国物理界诞生了很多经典作品，但当时大都分散出版，如今很多代表性的作品已经淹没在浩瀚的图书海洋中，读者们对这些论著也都是“只闻其声，未见其真”。该书系的编者们在这方面下了很大工夫，对中国物理学科不同时期、不同分支的经典著作进行了系统的整理和收录。这项工作具有非常重要的学术意义和社会价值，不仅可以很好地保护和传承我国物理学的经典文献，充分发挥其应有的传世育人的作用，更能使广大物理学人和青年学子亲身体会我国物理学研究的发展脉络和优良传统，真正领悟到老一辈科学家严谨求实、追求卓越、博大精深的治学之美。

温家宝总理在2006年中国科学技术大会上指出，“加强基础研究是提升国家创新能力、积累智力资本的重要途径，是我国跻身世界科技强国的必要条件”。中国的发展在于创新，而基础研究正是一切创新的根本和源泉。我相信，这套《中外物理学精品书系》的出版，不仅可以使所有热爱和研究物理学的人们从中获取思维的启迪、智力的挑战和阅读的乐趣，也将进一步推动其他相关基础科学更好更快地发展，为我国今后的科技创新和社会进步做出应有的贡献。

《中外物理学精品书系》编委会 主任
中国科学院院士，北京大学教授
王恩哥

2010年5月于燕园

内 容 简 介

本书前八章属于数理方程,包括数理方程与特殊函数的一些概念性问题和特殊技巧,某些特殊形式的偏微分方程定解问题,以及有关数理方程的理论问题,包括函数空间、线性算符和广义函数,并且在广义函数的基础上讨论了常微分方程和偏微分方程的 Green 函数问题.

后七章属于特殊函数.主要内容有:一、球函数和柱函数(包括虚宗量柱函数)的 Wronski 行列式,并结合递推关系而导出的恒等式;二、涉及球函数和柱函数的级数,包括 Legendre 多项式零点和 Bessel 函数零点的级数;三、球函数与柱函数的积分,包括柱函数的 Fourier 变换和 Laplace 变换,以及柱函数与虚宗量柱函数的不定积分;四、球函数和柱函数的 Christoffel 和式,以及超几何函数和合流超几何函数的 Christoffel 和式;五、Legendre 方程的本征值问题;六、有关电磁学或电动力学的球函数问题.

本书不是数学物理方法的教材,而是笔者对于传统教材内容的解读与发挥.书中还汇集了笔者自己的许多计算,例如,有超过 200 个积分及近 900 个和式(有限和或无穷级数)的计算结果.

前 言

(一)

五十余年前,笔者就读于北京大学物理系,得到诸位前辈大师的教诲.毕业之后,更在王竹溪与郭敦仁二位先生的指导下,从事数学物理方法课程的教学,迄今已届五十载.笔者得到了二位先生生前的诸多教益.在教学实践中,面对学生的各种诘问,促进了对于相关问题的深入思考;在与校内外同行的交流切磋中,更获益良多.退休以后,笔者将这些收获与记录,汇集为《数学物理方法专题——复变函数与积分变换》及《数学物理方法专题——数理方程与特殊函数》二书,以此奉献给中国近代物理教育 100 年.

需要说明,这两本书都不是数学物理方法的教材,而是笔者备课与教学过程中笔记与练习的汇集.从某种意义上说,这两本书所涉及的内容,恰恰是在传统教材之外,包括笔者对于教材中标准表述之外的解读与发挥.笔者以一孔之见,希望能就教于国内从事数学物理方法课程教学的同行,希望能对于此门课程的教学有所裨益.需要特别申明,这两本书均不以数学物理方法的初学者为对象.当然,对于已经学习并掌握了数学物理方法课程基本内容的青年学子来说,这两本书或许也能成为他们进一步学习与思考的辅助读物.他们将会发现,从已有的知识出发,只要再往前迈一小步,展现在面前的将是一片绚丽多彩的新天地.

正因为不是教材,所以这两本书的内容不受教学大纲的约束,与数学物理方法传统教材基本上不相重复,既不追求与数学物理方法教材的完全对应与覆盖,也不刻意追求理论的系统性与完整性.书中有些内容可能是教材的补充与提高,但也有不少内容是现在教学中所不涉猎的.

正因为不是教材,所以这两本书可能存在内容前后倒置的情形.尽管在整理书稿时,尽量希望理顺各章节乃至具体内容的前后次序,但也不排除有前面的内容需要用到后面的知识.

或许值得提到,这两本书中汇集了笔者自己的许多计算.例如,这两本书中提供了超过 1200 个积分及超过 1200 个和式(有限和或无穷级数)的计算,这些结果,绝大多数都未出现在 I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik 的千页巨著 *Table of Integrals, Series, and Products* (7th ed., Elsevier (Singapore) Pte Ltd., 2007) 中.

或许这些就是这两本书的特点.

(二)

本书名为《数学物理方法专题 —— 数理方程与特殊函数》，共十五章，大体上可分为两部分，前八章属于数理方程，后七章属于特殊函数。

第一章与第二章的内容，可以看成是数学物理方法课程的补充。第一章涉及数理方程与特殊函数的一些概念性问题和特殊技巧。第二章来源于笔者有关分离变量法的几篇论文，涉及某些特殊形式的偏微分方程定解问题。讨论这些问题，有助于深化对于分离变量法的理解，然而它们通常又都不在教学内容之列。特殊的是 §2.5，讨论了端面有阻尼的弹性杆振动问题，笔者虽然设法给出了这个问题的解，但是却给我们提出了许多有待回答的问题。

第三章至第八章涉及数理方程的理论问题，包括函数空间、线性算符和广义函数，并且在广义函数的基础上讨论了常微分方程和偏微分方程的 Green 函数问题。严格说来，这部分应该算是读书笔记，虽有笔者的整理与发挥，并尽可能或多或少地补充了一些例题，但其中的基本概念、基本观点和理论框架，都可以在相关文献中找到。笔者之所以收入这些内容，原因是它们的重要性。对于从事数学物理方法课程教学的老师，或是已经掌握了此课程基本内容的读者，这些都是提高自身的理论修养所必需的基础，也是进一步学习的入门。

关于特殊函数的部分，即书中的第九章至第十五章，基本上是笔者教学研究的记录。第九章中计算了 Legendre 函数的 Wronski 行列式 $W[P_\nu(x), P_\nu(-x)]$ ， $W[P_\nu(x), Q_\nu(x)]$ 及连带 Legendre 函数的 Wronski 行列式 $W[P_\nu^\mu(x), Q_\nu^\mu(x)]$ ，并由此出发，结合 Legendre 函数与连带 Legendre 函数的递推关系，导出了有关这些函数的 70 余个恒等式。这些恒等式，除了极个别的几个外，绝大多数在现有的主要工具书中都未能检出。第九章中还讨论了 Legendre 方程的本征值问题及含有 Legendre 多项式或连带 Legendre 函数的积分。第十章集中讨论了涉及 Legendre 多项式或连带 Legendre 函数的级数展开。在这些级数中，笔者给出的新结果超过 100 个。第十一章中讨论了电磁学或电动力学的问题，澄清了计算中易犯的一些错误。它们都要用到球函数。这些内容都源自笔者已发表的论文。

对于第十三章中有关柱函数的讨论，都可以在他处发现类似的内容。§13.1 中给出了有关柱函数的恒等式。从柱函数的 Wronski 行列式出发，结合递推关系，就能导出这些恒等式，这一做法和球函数 (§9.2) 十分类似。书中列出的有关柱函数的恒等式，有百余个，它们绝大多数在现有的主要工具书中也不能检出。§13.2 讨论了一些涉及柱函数的级数展开，使用的方法与《数学物理方法专题 —— 复变函数与积分变换》一书的第四章亦有相似之处，不同的是，那里是找到待展开函数所满足的常微分方程，进而通过求解常微分方程得到该函数的幂级数展开式，而在本书的

§13.2 中, 则是找到待展开函数满足的偏微分方程, 进而得到该函数的展开式. 这里需要用到有关展开式的唯一性, 既有按本征函数展开或 Fourier 展开的唯一性, 也用到按 Bessel 函数展开的唯一性, 本质上仍然是 Taylor 展开的唯一性, 但并非它的原始形式. 至于 §13.3 有关 Bessel 函数零点的级数, 第九章中也有类似的内容.

第十四章是关于柱函数的积分. 此处讨论了柱函数的 Fourier 变换和 Laplace 变换, 柱函数的 Mellin 变换已在《数学物理方法专题——复变函数与积分变换》一书中给出, 该书中还由此计算了大量含柱函数的积分, 本书不再重复. 在第十四章中还讨论了柱函数及虚宗量柱函数的不定积分. 这是一个饶有兴趣的问题. 笔者也得到了近 200 个不定积分.

最后要提到第十二章和第十五章. 现有文献中可以搜索到两个关于 Legendre 多项式的 Christoffel 和式, 分别称为第一和式与第二和式. 本着同样的思路, 笔者导出了更多的和式, 包括连带 Legendre 函数及超几何函数的 Christoffel 和式. 这些结果都收录在第十二章中. 将这一做法加以推广, 还可以得到柱函数及虚宗量柱函数的 Christoffel 和式, 也能写出合流超几何函数的 Christoffel 和式. 这些结果见第十五章. 在这两章中, 列出的 Christoffel 和式, 总数超过 600 个. 事实上, 读者不难写出更多的和式. 这一做法, 也还可以进一步应用于其他特殊函数.

(三)

需要声明, 本书成书于现在, 但资料积累跨越数十年. 尽管书中的计算均为笔者所为, 但也不乏某些内容, 或是直接采自某书籍资料, 或是受其启发而就, 现在由于笔者记录不全, 原始资料也难以寻觅, 以致无法一一列出文献出处. 有些计算结果, 或许可能已经见诸文献, 但笔者孤陋寡闻, 还误以为是新结果, 因此文字表述亦有不实之嫌. 笔者深致歉意之余, 亦请知情者指出, 本书再版时, 自当补正.

最后, 在此书付梓之际, 笔者感谢《中外物理学精品书系》编委会诸位对于本书的支持. 在本书出版过程中, 北京大学出版社提供了方便, 陈小红和尹照原编辑为此付出了辛勤劳动, 笔者一并致谢.

吴崇试

2012 年于蓝旗营

本书常用符号

数 学 符 号

\forall	任何; 凡	\mathbb{N}	非负整数 (自然数)
\exists	有; 存在	\mathbb{Z}	整数
$\exists!$	存在唯一的	\mathbb{R}	实数
\nexists	不存在	\mathbb{R}^+	正数
\wedge	并且; 与	\mathbb{R}^-	负数
\vee	或	\mathbb{C}	复数; 复平面
		$\overline{\mathbb{C}}$	复数 (包括 ∞) 扩充的复平面
$a \in A$	(元素) a 属于 (集合) A	\mathcal{R}_n	n 维实空间
$a \notin A$	a 不属于 A	\mathcal{C}_n	n 维复空间
\cup	并集	\mathcal{E}_n	n 维 Euclid 空间
\cap	交集	\mathcal{C}	连续函数空间
\supset	包含	\mathcal{C}^n	\mathcal{C}^n 类函数空间 (n 阶 连续可微函数的集合)
\subset	子集	\mathcal{H}	Hilbert 空间
$A \setminus B$	$\{a : a \in A, a \notin B\}$	\mathcal{D}	分段连续且只有有限个 第一类间断点的函数类
$\overline{\lim}$	上极限	\mathcal{L}_1	绝对可积函数类
$\underline{\lim}$	下极限	\mathcal{L}_2	平方可积函数类
$\ \quad \ $	范数	$\mathcal{F}^{-1}\{f\}$	f 的 Fourier 逆变换
$(\alpha)_n$	$\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$	$\mathcal{M}^{-1}\{f\}$	f 的 Mellin 逆变换
$\mathcal{F}\{f\}$	f 的 Fourier 变换	$\mathcal{L}^{-1}\{f\}$	f 的 Laplace 逆变换
$\mathcal{M}\{f\}$	f 的 Mellin 变换	$f(t) \doteq F(p)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$
$\mathcal{L}\{f\}$	f 的 Laplace 变换		
$F(p) \doteq f(t)$	$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$		

特殊函数与常数符号一览表

符 号	名 称
$A_n(z; a)$	Abel 多项式
$Ai(z)$	Airy 函数
$B(p, q)$	Beta 函数
$B_\alpha(p, q)$	不完全 Beta 函数
$bei_\nu(z)$	Kelvin 函数
$ber_\nu(z)$	Kelvin 函数
$Bi(z)$	Airy 函数
$B_k^{(n)}$	广义 Bernoulli 数
$B_k^{(n)}(x)$	广义 Bernoulli 多项式
B_n	Bernoulli 数
$B_n(x)$	Bernoulli 多项式
$C(z)$	Fresnel 积分
$C_\alpha^\lambda(z)$	Gegenbauer 函数
$C_n^\lambda(z)$	Gegenbauer 多项式
$D_\nu(z)$	抛物线柱函数 (Weber 函数)
$Ei(z)$	指数积分
E_n	Euler 数
$E_n(x)$	Euler 多项式
$\mathbb{E}_\nu(z)$	Weber 函数
$\operatorname{erf}(z)$	误差函数
$\operatorname{erfc}(z)$	余误差函数
$F(\alpha, \beta; \gamma; z)$	超几何函数
$F(\alpha; \gamma; z)$	合流超几何函数 (Kummer 函数)
${}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q; z)$	广义超几何级数
$G_n(\zeta; \alpha, \beta)$	Gould 多项式

(续表)

符 号	名 称
γ	Euler 常数
$\gamma(\nu, z), \Gamma(\nu, z)$	不完全 Gamma 函数
$\Gamma(z)$	Gamma 函数
$H_n(x)$	Hermite 多项式
$\mathbb{H}_\nu(z)$	Struve 函数
$h_\nu^{(1)}(z), h_\nu^{(2)}(z)$	球 Hankel 函数
$H_\nu^{(1)}(z), H_\nu^{(1)}(z)$	第三类柱函数 (Hankel 函数)
$I_\nu(z)$	虚宗量 Bessel 函数
$J_\nu(z)$	第一类柱函数 (Bessel 函数)
$\mathbb{J}_\nu(z)$	Anger 函数
$j_\nu(z)$	球 Bessel 函数
$K_\nu(z)$	虚宗量 Bessel 函数
$\text{li}(z)$	对数积分
$L_n(x)$	Laguerre 多项式
$L_n^{(\alpha)}(x)$	广义 Laguerre 多项式
$L_n^{(n+\alpha)}(x)$	赝 Laguerre 多项式
$M_{k,\mu}(z)$	Whittaker 函数
$M_n(z)$	Mittag-Leffler 多项式
$n_\nu(z)$	球 Neumann 函数
$N_\nu(z)$	第二类柱函数 (Neumann 函数)
$O_n(t)$	Neumann 多项式
$P_l^m(x)$	m 阶 l 次第一类连带 Legendre 函数
$P_n(z)$	Legendre 多项式
$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	Jacobi 多项式
$P_n^\lambda(x; a, b)$	Pollaczek 多项式
$P_n^\lambda(x, \phi)$	Pollaczek 多项式
$P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \eta)$	圆环函数

(续表)

符 号	名 称
$P_\nu(z)$	第一类 Legendre 函数
$P_\nu^\mu(z)$	第一类连带 Legendre 函数
$P_{\nu-\mu}^{(\mu,\mu)}(z)$	超球函数
$P_{-\frac{1}{2}+ip}^\mu(\cos\theta)$	圆锥函数
$\psi(z)$	Psi 函数
$Q_l^m(x)$	m 阶 l 次第二类连带 Legendre 函数
$Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh\eta)$	圆环函数
$Q_\nu(z)$	第二类 Legendre 函数
$Q_\nu^\mu(z)$	第二类连带 Legendre 函数
$Q_{-\frac{1}{2}+ip}^\mu(\cos\theta)$	圆锥函数
$Q_{\nu-\mu}^{(\mu,\mu)}(z)$	超球函数
$R_{m,\nu}(z)$	Lommel 多项式
$S(z)$	Fresnel 积分
$Si(z), si(z)$	正弦积分
$s_{\mu,\nu}(z)$	Lommel 函数
$S_{\mu,\nu}(z)$	Lommel 函数
$S_n(t)$	Schläfli 多项式
$T_n(x)$	第一类 Chebyshev 多项式
$U(\alpha; \gamma; z)$	合流型超几何函数 (Kummer 函数)
$U_n(x)$	第二类 Chebyshev 多项式
$W_{k,\mu}(z)$	Whittaker 函数
$Y_\nu(z)$	第二类 Bessel 函数 (Neumann 函数)
$Z_\nu(z)$	柱函数
$\zeta(s)$	Reimann ζ 函数
$\zeta(s, a)$	广义 ζ 函数

目 录

第一章 数学物理方程定解问题	(1)
§1.1 关于数理方程的若干问答	(1)
§1.2 特殊区域的分离变量法	(17)
§1.3 特殊的复变函数技巧 —— Wiener-Hopf 方法	(27)
第二章 分离变量法例题补遗	(33)
§2.1 异质杆的固有频率	(33)
§2.2 集中载荷问题	(38)
§2.3 圆柱的扭转振动	(54)
§2.4 端点有集中载荷的弹性体振动问题	(58)
§2.5 端面受到空气阻力的弹性杆振动问题	(67)
第三章 函数空间理论概要	(81)
§3.1 度量空间与赋范线性空间	(81)
§3.2 函数空间	(84)
§3.3 Hilbert 空间	(89)
第四章 线性算符理论初步	(94)
§4.1 线性算符	(94)
§4.2 \mathcal{N}_n 中的线性算符	(97)
§4.3 Hilbert 空间中的线性算符	(102)
§4.4 非 Hermite 算符	(104)
第五章 线性微分算符的本征值问题	(112)
§5.1 线性微分算符	(112)
§5.2 二阶常微分方程解的零点	(119)
§5.3 Sturm-Liouville 型方程的本征值问题	(127)
§5.4 奇异的本征值问题	(135)
第六章 广义函数	(145)
§6.1 线性泛函	(145)
§6.2 广义函数	(148)

§ 6.3	广义函数的基本运算	(152)
§ 6.4	奇异广义函数 δ	(156)
§ 6.5	δ 型函数族与 δ 型函数序列	(158)
§ 6.6	广义函数序列的收敛性	(161)
§ 6.7	奇异广义函数 $1/x$	(164)
第七章	常微分方程的 Green 函数	(170)
§ 7.1	广义函数中的微分方程	(170)
§ 7.2	常微分方程初值问题的 Green 函数	(176)
§ 7.3	常微分方程边值问题的 Green 函数	(180)
§ 7.4	Green 函数的本征函数展开	(185)
第八章	偏微分方程的 Green 函数	(192)
§ 8.1	稳定问题的 Green 函数	(192)
§ 8.2	热传导问题的 Green 函数	(205)
§ 8.3	用 Fourier 变换方法计算 Green 函数	(213)
第九章	球函数	(221)
§ 9.1	Legendre 函数的 Wronski 行列式	(221)
§ 9.2	由 Wronski 行列式导出的恒等式	(227)
§ 9.3	Legendre 方程的本征值问题	(235)
§ 9.4	含 Legendre 多项式的积分	(243)
第十章	涉及球函数的级数展开	(253)
§ 10.1	函数按 Legendre 多项式展开	(253)
§ 10.2	Legendre 多项式的 Fourier 展开	(260)
§ 10.3	Legendre 多项式积分表示的应用	(262)
§ 10.4	连带 Legendre 函数加法公式的应用	(271)
§ 10.5	有关 Legendre 多项式零点的级数	(279)
第十一章	球函数与电磁场问题	(281)
§ 11.1	均匀带电圆盘的静电势问题	(281)
§ 11.2	轴对称荷电圆盘的静电势	(287)
§ 11.3	圆形面偶极层的静电势	(292)
§ 11.4	有关电磁场的几个例题	(301)
第十二章	球函数的 Christoffel 型求和公式	(309)
§ 12.1	Legendre 多项式的求和公式	(309)
§ 12.2	连带 Legendre 函数的求和公式	(321)

§ 12.3	超几何函数的求和公式	(336)
第十三章	柱函数	(340)
§ 13.1	柱函数的 Wronski 行列式及其推论	(340)
§ 13.2	一些函数的级数展开	(348)
§ 13.3	有关 Bessel 函数零点的级数	(362)
第十四章	柱函数的积分	(366)
§ 14.1	柱函数的 Fourier 变换	(366)
§ 14.2	柱函数的 Laplace 变换	(371)
§ 14.3	柱函数的不定积分	(374)
§ 14.4	虚宗量柱函数的不定积分	(391)
§ 14.5	Bessel 函数的某些间断积分	(404)
第十五章	柱函数的 Christoffel 型求和公式	(409)
§ 15.1	柱函数的求和公式	(409)
§ 15.2	柱函数的四次型求和公式	(425)
§ 15.3	虚宗量柱函数的求和公式	(449)
§ 15.4	柱函数与虚宗量柱函数的混合求和公式	(473)
§ 15.5	合流超几何函数的求和公式	(495)
参考文献	(501)
索引	(503)