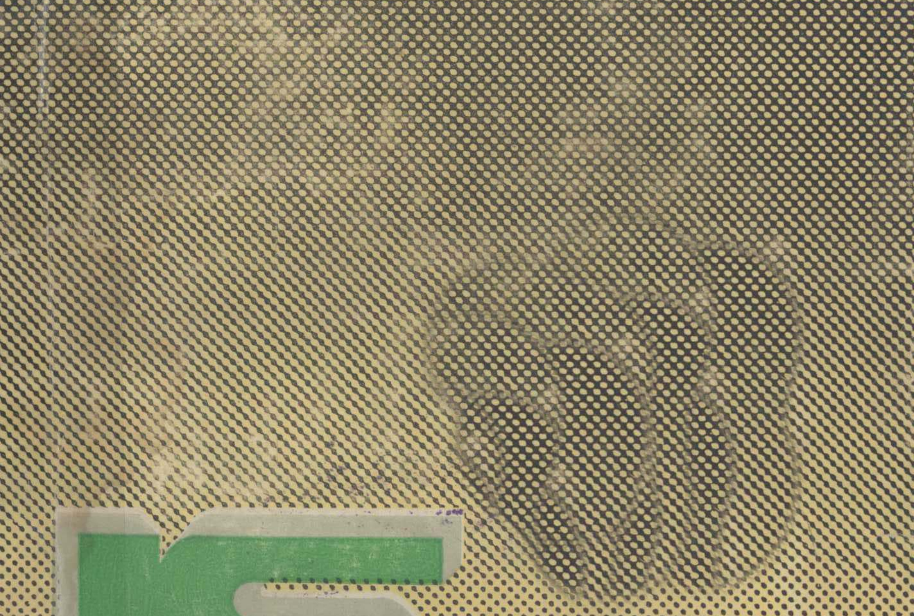
近世代数教程

JINSHIDAISHU JIAOCHENG

钱吉林　伍家德　吴德容
李淑琼　李桃生　袁锦华　编著



华中师范大学出版社

近世代数教程

钱吉林　伍家德
吴德容　李淑琼　编　著
李桃生　凌锦华

华中师范大学出版社

近 世 代 数 教 程

钱吉林　伍家德
吴德容　李淑琼　编 著
李桃生　凌锦华

华中师范大学出版社出版
（武昌桂子山）
新华书店湖北发行所发行
湖南省华容县印刷厂印刷

开本787×1092 1/32 印张：12.25 字数：273.8千字
1988年8月第1版 1988年8月第1次印刷

ISBN7－5622－0246－×/o·27
印数1—3000 定价：2.15元

前　言

本书是为师范院校的本科生和函授生编写的，为了便于自学，我们编入了较多的例题和习题；还溶汇了作者多年的教学经验，在某些定理、定义后面，加了注解。再考虑到教材能适用多种层次，我们还编入了抽象代数中较新的课题——模与范畴，作为选学内容。

参加本书编写的有：吴德容（第一章），李淑琼（第二章），伍家德（第三章），钱吉林（第四章），凌锦华（第五章），李桃生（第六章），最后由钱吉林、伍家德、吴德容三人，在初稿基础上，进行了调整、修改和总编。

在此，我们要感谢华中师范大学成人教育学院李旭初、周西林两位副院长，他们始终关心和支持本书的出版。感谢数学系蔡剑芳副教授，她对本书提出了许多重要的和宝贵的意见。

由于作者水平有限，缺点和问题一定不少，欢迎读者批评指正。

作　者

1988年4月

基 本 符 号 表

符号	意义
Q	有理数域
R	实数域或一般环
Z	整数集
C	复数域
A^*	$A-\{0\}$
$\Longrightarrow$	蕴涵
$\Longleftrightarrow$	等价，当且仅当
$\in$	元素属于某集合
$\overline{\in}$	元素不属于某集合
ϕ	空集
$\subseteq(\supseteq)$	含于(包含)
$\subset(\supset)$	真含于(真包含)
$A\times B$	A,B的卡氏积
$\{A_i \mid i\in I\}$	指标集I上的集合族
$\prod\limits_{i\in I} A_i$	集合族$\{A_i \mid i\in I\}$的卡氏积
$\sigma: A\to B$	从集A到集B的映射σ,
$(A,\cdot)$	A为具有代数运算·的代数系
$(A,\cdot)\sim(B,\circ)$	A与B同态
$H\leqslant G$ 、	H为G的子群
$\langle S\rangle$	由集S生成的子群
$\langle a\rangle$	由元素a生成的循环(子)群

M_n	模n的剩余类集
$\sim$	等价关系
$N \lhd G$	N为G的正规子群
$\mathrm{Im}f$	映射 f 的象集
$f^{-1}(B)$	集合B的原象
$\mathrm{Ker}f$	同态 f 的核
$Ha(aH)$	H的右(左)陪集
$[G:H]$	子群H在群G中的指数
$\|H\|$	群H的阶或方阵H的行列式
$\|a\|$	元素a的阶或数a的绝对值
G/N	G对于N的商群
(S)	由集S生成的理想
(a)	由元素a生成的主理想
$(F:K)$	域F作为K上的向量空间的维数
$R[S]$	由R和S生成的子环
$F(S)$	由F和S生成的子域
${}_RA(A_R)$	左R—模(右R—模)
${}_RA_S$	$R-S$双重模
$\mathrm{Hom}(A,B)$	A到B全部态射所成之集

目　　录

第一章 基本概念

本章内容是全书的预备知识，将概括地讨论作为近世代数研究对象的代数系，着重介绍映射、代数运算、等价关系以及同态等基本概念。通过这一章的学习，为研究群、环、模、域打下基础，并对近世代数常用的方法有个初步的了解。

§1 映 射

一、映射

集合是读者熟悉的概念。在近世代数的研究中所遇到的一些集合往往是互相有联系的，映射则是建立这种联系的工具。映射是近代数学的一个最基本的概念。

1. 映射的定义

定义1 设A、B是两个集合．如果有一个法则f，使A中的每一个元素x，在B中有唯一确定的一个元素y与它对应，那么，法则f叫做A到B的一个**映射**，记为

$$f: A\to B.$$

A称为f的**定义域**，B称为f的**值域**。x称为y在映射f下的一个**原象**，y称为x在f下的**象**。记为$y=f(x)$，或者

$$f: x\longmapsto y.$$

例1 设$A=\{1,2,3\}$，$B=\{a,b,c,d\}$。

规定

$$f:\ 1 \longmapsto a, 2 \longmapsto b, 3 \longmapsto b.$$

根据定义1，f是A到B的映射。值得注意的是，在映射f下，c与d都没有原象，2与3的象都是b。这表明映射的值域中的元素不一定都有原象，同时还表明，在映射的定义域中，不同元素可以有相同的象，即可以多对一。

注记：映射的定义不容许一对多。

在以后的讨论中，如果不加其他说明，大写英文字母$A, B, \cdots$都是表示集合。

2．象集与原象集

定义2　设$f: A \to B$，$A_1 \subseteq A$。在映射f下，A_1中所有元素的象构成B的一个子集，记为$f(A_1)$。$f(A_1)$称为A_1在f下的**象集**，或简称为A_1的象。

根据定义2，有

$$f(A_1) = \{f(x) \mid x \in A_1\}.$$

定义3　设$f: A \to B, B_1 \subseteq B$。在映射$f$下，$B_1$的元素的所有原象构成$A$的一个子集，记为$f^{-1}(B_1)$。$f^{-1}(B_1)$称为$B_1$在$f$下的**原象集**，或简称为$B_1$的原象。

根据定义3，有

$$f^{-1}(B_1) = \{x \in A \mid f(x) \in B_1\}.$$

注意，当B_1不是空集时，$f^{-1}(B_1)$有可能是空集。

例2　设Z为整数集，$B = \{1, -1\}$。定义Z到B的映射为：

$$f:\ n \longmapsto (-1)^n,\ \forall n \in Z.$$

则Z的子集$A_1 = \{2, 4, 6\}$在f下的象集是$f(A_1) = \{1\}$。而$f(A_1)$在f下的原象集由全体偶数组成，即

$$f^{-1}(\{1\}) = \{2n \mid n \in Z\}.$$

3．映射的相等

定义4　设f：$A\to B$，g：$A\to B$．如果$\forall x\in A$，都有

$$f(x)=g(x)．$$

那么称映射f与g相等，记为$f=g$．

根据定义4，有相同的定义域和值域的两个映射，才能讨论它们是否相等．

例3　设$A=\{0,1,2\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，规定

$$f:\quad x\longmapsto 2^x,\forall x\in A$$

$$g:\quad x\longmapsto \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1\quad \forall x\in A$$

则f与g都是A到B的映射．因为

$$f(0)=1=g(0),f(1)=2=g(1),f(2)=4=g(2),$$

即$\forall x\in A$，都有

$$f(x)=g(x),$$

所以，根据定义4，有$f=g$．

二、单射、满射、双射

定义5　设f：$A\to B$．如果$\forall x_1,x_2\in A$，当$x_1\neq x_2$时，有

$$f(x_1)\neq f(x_2),$$

那么，称映射f为A到B的一个**单射**．

由命题的等价性可得：

设f：$A\to B$．那么f是单射的充分必要条件为$\forall x_1,x_2\in A$，若

$$f(x_1)=f(x_2),$$

则

$$x_1 = x_2.$$

定义6 设f：$A \to B$。如果$\forall y \in B$，存在$x \in A$，使得

$$f(x) = y,$$

那么，称映射f为A到B的一个**满射**。

满射意味着值域中每个元素都有原象。根据定义6，若f：$A \to B$，则f是满射的充分必要条件是

$$f(A) = B.$$

例2中的 f 是满射而不是单射，例1中的 f_1 既不是满射也不是单射。

定义7 设f：$A \to B$。若 f 既是单射又是满射，则称映射 f 是A到B的一个**双射**（或A到B的**一一映射**）。

三、变换

定义8 集合A到它自身的映射，即 f：$A \to A$，称为A的一个**变换**。当映射 f 分别是单射、满射、双射时， 相应地分别称 f 为A的**单变换、满变换、双变换**。

例4 设A是一个非空集合。规定

$$f: x \longmapsto x \qquad \forall x \in A$$

则 f 是A的一个双变换，这个双变换称为A的**恒等变换**或**单位变换**，记为I_A。

四、映射的合成、交换图、逆映射

定义9 设A、B、C是三个集合。f：$A \to B$，g：$B \to C$。规定

$$h: x \longmapsto g(f(x)) \qquad \forall x \in A$$

则h是A到C的映射。这个映射称为f与g的**合成**，记为gf。即

$$h(x) = gf(x) = g(f(x)) \qquad \forall x \in A$$

映射的合成有时也称为映射的**乘法运算**。

设f：$A \to B$。由映射的合成与映射相等的定义可以得到：

$$fI_A = f, \ I_B f = f. \tag{1}$$

例5　设Q是有理数集。规定

$$f: \quad x \longmapsto x+2 \qquad \forall x \in Q,$$
$$g: \quad x \longmapsto x^2+1 \qquad \forall x \in Q.$$

则f与g都是Q的变换。求fg与gf。

解　令$h_1 = fg$，$h_2 = gf$，则有

$h_1(x) = f(g(x)) = f(x^2+1) = (x^2+1)+2 = x^2+3$，

$h_2(x) = g(f(x)) = g(x+2) = (x+2)^2+1 = x^2+4x+5$，

即

$$fg: \quad x \longmapsto x^2+3 \qquad \forall x \in Q;$$
$$gf: \quad x \longmapsto x^2+4x+5 \qquad \forall x \in Q.$$

例5表明，给定映射f, g，即使fg与gf都有意义，fg与gf也不一定相等。

定理1　设f：$A \to B$，g：$B \to C$，h：$C \to D$，则

$$h(gf) = (hg)f. \tag{2}$$

证　令$u = gf$，$v = hg$。由映射合成的定义可知，u是A到C的映射，hu是A到D的映射，而v是B到D的映射，vf是A到D的映射。$\forall x \in A$，有

$hu(x) = h(u(x)) = h(g(f(x)))$.

$$\nu f(x)=\nu(f(x))=hg(f(x))=h(g(f(x)))。$$

$$\therefore \qquad hu=\nu f。$$

即 $$h(gf)=(hg)f。$$

我们常常用一张图来直观地表示几个映射之间的某种关系。

在平面上，我们用一个点表示一个集合，不同的集合用不同点的来表示。必要时，不同的点可以代表同一个集合。设 f：$A\to B$，g：$B\to C$。我们用以A为始点，以B为终点的箭头表示映射f：$A\to B$，用图1.1表示映射gf。如果 h：$A\to C$，且$h=gf$，则h与gf之间的相等关系用图 1.2来表示，这张图称为交换图。又如，

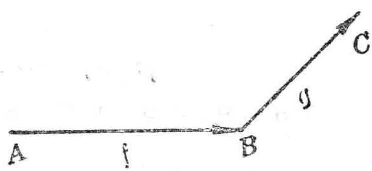


图1.1

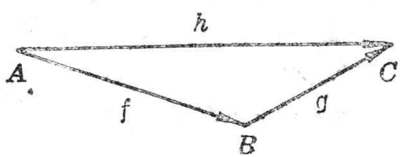


图1.2

$$f_1: P\to A, f_2: A\to B, f_3: B\to Q;$$
$$g_1: P\to C, g_2: C\to Q; \ h: P\to Q,$$

且满足

$$h=f_3(f_2f_1), h=g_2g_1 \qquad (3)$$

则等式$h=g_2g_1=f_3(f_2f_1)$可用交换图1.3来表示。

一般地，在一张表示几个映射之间的关系的图中，如果从同一个始点，沿着图中的箭头方向到达同一个终点时，每一条路线所代表的映射都是相等的，那么，这张图就是一个

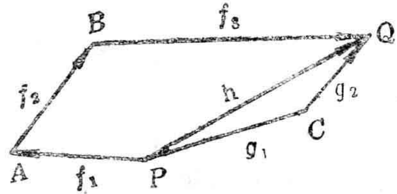


图1.3

交换图。由此看出，交换图事实上直观地表达了一些等式，如图1.3就表达了(3)的两个等式。

定理2　设f: $A\to B$, g: $B\to C$。那么

(1)　f与g都是单射$\Longrightarrow gf$是单射；

(2)　f与g都是满射$\Longrightarrow gf$是满射；

(3)　gf是单射$\Longrightarrow f$是单射；

(4)　gf是满射$\Longrightarrow g$是满射。

证　(1) $\forall x_1, x_2\in A, x_1\neq x_2$。因为$f$是单射，所以$f(x_1)\neq f(x_2)$。又因为$g$也是单射，所以又有

$$g(f(x_1))\neq g(f(x_2))\quad 即\quad gf(x_1)\neq gf(x_2),$$

故gf是单射。

(2)　$\forall z\in C$，因为g是满射，所以，存在$y\in B$，使得

$$z=g(y)。$$

又因为f也是满射，所以，存在$x\in A$，使得

$$y=f(x)。$$

从而有

$$z=g(f(x))。$$

这表明，$\forall z\in C$，存在$x\in A$，使得

$$gf(x)=z,$$

故gf是满射。

(3)与(4)的证明留给读者。

推论1　若f是A到B的双射，g是B到C的双射，则gf是A到C的双射。

定义10　设f：$A\to B$。如果存在g：$B\to A$，使得

$$gf=I_A, fg=I_B,$$

则称f**可逆**。g叫做f的**逆映射**，记为f^{-1}。

若映射f可逆，将f的逆映射记为f^{-1}是合理的，因为由定义10易知，f的逆映射是唯一的。事实上，假定还有h：$B\to A$，使得

$$hf=I_A, fh=I_B,$$

那么

$$h=I_Ah=(gf)h=g(fh)=gI_B=g$$

由定义10还可以看出，若映射f可逆，则f^{-1}也可逆，且$(f^{-1})^{-1}=f$。因此，f与f^{-1}是互为逆映射的，且有

$$ff^{-1}=I_B, f^{-1}f=I_A.$$

应该注意，在这里，f^{-1}表示映射f的逆映射。而在第一部分中，记号$f^{-1}(B)$作为一个整体，表示B在映射f下的原象集，并不意味着f是可逆的。

定理3　设$A\neq\phi$，f：$A\to B$，则

(1)　f为单射$\Longleftrightarrow$存在g：$B\to A$，使得$gf=I_A$；

(2)　f为满射$\Longleftrightarrow$存在h：$B\to A$，使得$fh=I_B$；

(3)　f为双射$\Longleftrightarrow f$可逆。

证　(1)假定存在g：$B\to A$，使得$gf=I_A$，那么，由于$gf=I_A$是恒等变换，所以gf是单射，从而由定理2之(3)可知f是单射。

反之，如果f是单射，那么，取一个固定的$x_0\in A$，