北京市高等教育精品教材立项项目

北京大学数学教学系列丛书

研究生
数学基础课教材

风险理论

吴岚 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

北京市高等教育精品教材立项项目

北京大学数学教学系列丛书

风险理论

吴 岚 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

风险理论/吴岚编著. —北京：北京大学出版社，2012.10
(北京大学数学教学系列丛书)
ISBN 978-7-301-21392-6

Ⅰ. ①风… Ⅱ. ①吴… Ⅲ. ①风险论—高等学校—教材
Ⅳ. ①O211.67

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 239541 号

书　　　名：风险理论
著作责任者：吴　岚　编著
责 任 编 辑：曾琬婷
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-21392-6/O・0891
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　　址：http://www.pup.cn　电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn
电　　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62767347
出版部 62754962
印　刷　者：北京大学印刷厂
经　销　者：新华书店
880mm×1230mm　A5　8.25 印张　210 千字
2012 年 10 月第 1 版　2012 年 10 月第 1 次印刷
定　　　价：24.00 元

内容简介

本书是高等院校金融数学和精算专业高年级本科生与研究生风险理论课程的教材，它包含了国内外风险理论教材的核心内容，并兼顾理论基础和应用的结合，对现代风险理论的主要理论模型和方法进行了一定的提炼和综合.

本书分为三个主要部分，由 7 章组成. 第一部分介绍损失风险模型，这是古典风险理论最主要的部分. 这部分由第 1,2,3 章组成，其中第 1 章介绍短期风险模型的主要模型和建模方法，第 2 章介绍长期聚合风险模型及基于随机过程基本原理的破产理论初步，第 3 章利用鞅过程方法讨论古典聚合风险模型的破产理论. 第二部分介绍风险与决策问题. 这部分由第 4,5 章组成，其中第 4 章介绍风险排序与风险度量的主要内容和方法，第 5 章介绍效用理论与保险决策问题. 第三部分介绍风险理论的应用. 这部分由第 6,7 章组成，其中第 6 章介绍风险理论在产品定价中的应用，第 7 章介绍风险理论在风险管理中的应用. 本书尽量以简单明确的语言和符号介绍现代风险理论的基本模型和方法，配有相关的练习题，并适当介绍一些较新的问题和研究工作.

本书可作为高等院校金融数学和精算专业及相关专业高年级本科生与研究生风险理论课程的教材，同时也可作为参加精算、风险管理相关的职业考试的辅助学习资料.

序　言

自 1995 年以来，在姜伯驹院士的主持下，北京大学数学科学学院根据国际数学发展的要求和北京大学数学教育的实际，创造性地贯彻教育部“加强基础，淡化专业，因材施教，分流培养”的办学方针，全面发挥我院学科门类齐全和师资力量雄厚的综合优势，在培养模式的转变、教学计划的修订、教学内容与方法的革新，以及教材建设等方面进行了全方位、大力度的改革，取得了显著的成效.2001 年，北京大学数学科学学院的这项改革成果荣获全国教学成果特等奖，在国内外产生很大反响.

在本科教育改革方面，我们按照加强基础、淡化专业的要求，对教学各主要环节进行了调整，使数学科学学院的全体学生在数学分析、高等代数、几何学、计算机等主干基础课程上，接受学时充分、强度足够的严格训练；在对学生分流培养阶段，我们在课程内容上坚决贯彻“少而精”的原则，大力压缩后续课程中多年逐步形成的过窄、过深和过繁的教学内容，为新的培养方向、实践性教学环节，以及为培养学生的创新能力所进行的基础科研训练争取到了必要的学时和空间.这样既使学生打下宽广、坚实的基础，又充分照顾到每个人的不同特长、爱好和发展取向. 与上述改革相适应，积极而慎重地进行教学计划的修订，适当压缩常微、复变、偏微、实变、微分几何、抽象代数、泛函分析等后续课程的周学时，并增加了数学模型和计算机的相关课程，使学生有更大的选课余地.

在研究生教育中，在注重专题课程的同时，我们制定了 30 多门研究生普选基础课程(其中数学系 18 门)，重点拓宽学生的专业基础和加强学生对数学整体发展及最新进展的了解.

教材建设是教学成果的一个重要体现. 与修订的教学计划相配合，我们进行了有组织的教材建设.计划自 1999 年起用 8 年的时间修订、编写和出版 40 余种教材.这就是将陆续呈现在大家面前的

《北京大学数学教学系列丛书》.这套丛书凝聚了我们近十年在人才培养方面的思考,记录了我们教学实践的足迹,体现了我们教学改革的成果,反映了我们对新世纪人才培养的理念,代表了我们新时期的数学教学水平.

经过20世纪的空前发展,数学的基本理论更加深入和完善,而计算机技术的发展使得数学的应用更加直接和广泛,而且活跃于生产第一线,促进着技术和经济的发展,所有这些都正在改变着人们对数学的传统认识.同时也促使数学研究的方式发生巨大变化.作为整个科学技术基础的数学,正突破传统的范围而向人类一切知识领域渗透.作为一种文化,数学科学已成为推动人类文明进化、知识创新的重要因素,将更深刻地改变着客观现实的面貌和人们对世界的认识.数学素质已成为今天培养高层次创新人才的重要基础.数学的理论和应用的巨大发展必然引起数学教育的深刻变革.我们现在的改革还是初步的.教学改革无禁区,但要十分稳重和积极;人才培养无止境,既要遵循基本规律,更要不断创新.我们现在推出这套丛书,目的是向大家学习.让我们大家携起手来,为提高中国数学教育水平和建设世界一流数学强国而共同努力.

张继平

2002年5月18日

于北京大学蓝旗营

前　言

风险是现代金融的一个本质特征. 精算学以保险风险为主要的研究对象,利用概率统计的相关理论和方法解决保险经营中的各种风险计量和风险管理问题.风险理论是保险精算中一个既传统又现代的研究领域,一方面对保险公司整体的静态和动态的损失分布进行研究,另一方面,也越来越关注保险以及金融风险管理中一般性的风险度量问题,同时非常注重理论研究的应用价值. 风险理论的破产理论和风险度量方法在保险公司偿付能力管理和金融机构风险(资本)管理中发挥着越来越重要的作用.

本人在从事金融数学和精算方面的教学与研究工作中对现代金融风险管理的认识也经历了一个发展的过程. 在本书的写作中,本人也努力将古典和传统的风险理论与当前新的问题和研究成果一起展现给读者,以帮助读者理解这些模型和方法的背景和精髓.

从历史看,在 20 世纪初期,欧洲的一些概率学家,例如 R. E. Beard 和 W. Feller,就开始在 Poisson 过程和一般的更新过程等随机过程的研究中将其应用于保险的破产模型,提出了破产时刻、破产概率等一些问题的结果. 直至今日,这些结果仍然具有一定的理论地位和实际价值.本书的第一部分和第二部分就是以这些内容为主,这也是大多数风险理论教材中最主要的内容.在这部分的写作中,本书综合考虑国内外此类教材的优点,结合教学实践的经验,在尽可能保证理论上准确的前提下努力做到通俗易懂. 这部分的写作风格主要受到了瑞士著名精算学者 H. Gerber 的专著《数学风险论导引》的影响. Gerber 这部专著的中英文版我都认真地研读过多次,他的那种独特的对概率理论的感觉和对实务的认识一直使我受益匪浅. 数学的确是一个抽象的科学,但概率论从产生到今天的发展都有其明确、有价值的应用背景和领域. 精算是一个应用性很强的学科,即使像风险理论这种精算中理论性很强的内容,也曾在欧洲

早期的偿付能力管理中发挥了实际作用.

自 20 世纪 90 年代中期以来,在国际清算银行发布的商业银行资本管理协议的推动下,以 J. P. Morgan 在 1995 年开始的风险管理实践为标志,金融风险管理的理论和实践得到了快速的发展. 在理论上,包括抽象的一般风险度量和组合相关性的理论研究以及结合具体风险种类(市场风险、信用风险和操作风险)的研究都取得了很多成果. 在应用中,更是有像银行业的新资本协议和欧盟偿付能力监管第二阶段(Solvency II). 这样的风险管理和资本监管的实践也大大促进了相关风险理论模型的发展.

本书的写作基础是作者本人在北京大学数学科学学院十多年的风险理论课程教学. 虽然本书的篇幅不是很大,但是具体的写作堪称是一个漫长的过程. 一方面,古典风险理论是一个较为成熟的领域,有很多非常优秀的中英文教材,本人觉得需要认真、慎重地组织和思考本教材的特点;另一方面,自本世纪开始,全球的金融数学和精算的教育、理论和实践出现了很多变化,北美精算师协会自 2000 年不断进行考试改革,中国精算师协会也从 2010 年开始了新的考试体系,各种风险管理师的职业考试也不断涌现,这些现象使得本人一直在思考金融数学和精算的本科高年级和研究生应该掌握哪些基本的风险理论知识并得到怎样的研究能力的训练.

当然,写作的拖沓也有本人不能推卸的自身的原因. 好在有北京大学出版社的大力推动,特别是曾琬婷编辑长期的支持和帮助,还有学生们多年的支持,看到金融数学和精算的教育与实践在北京大学和中国的发展也是我写作的最大原动力. 在本人的记忆中,对本书的编写提供宝贵意见和建议的老师有: 北京大学的杨静平老师、安徽工程大学的王传玉老师和中央财经大学的周明老师. 曾经参与北京大学风险理论课程教学辅助工作的学生有李佳慧、姜旸、刘庆、陈治津、李禄俊和王佳星等,他们对本书的编写及相关的教学工作都提供了很多具体和细致的帮助,在此一并表示感谢.

本书的编写与出版得到了《北京大学数学教学系列丛书》编委会和北京大学出版社的大力支持和帮助,还得到国家科技部国家重点基础研究发展计划(973 计划)项目“金融风险控制中的定

量分析与计算”的课题“银行与保险业中的风险模型与数据分析”(2007CB814905)的资助,在此表示衷心的感谢.

由于本人的专业水平所限,本书难免出现错误和不妥之处,恳请各位专家同仁和广大读者不吝指出,以不断完善本教材.

吴 岚

2012 年 3 月

目　　录

第 1 章　短期风险模型

在金融机构的经营过程中，大多数情况下，保险公司或其他金融机构的业务或投资都会表现出组合方式的风险. 所谓的**组合方式**，就是将若干风险特征相对差异不大的风险标的通过某种自然的方式汇合在一起. 例如，保险公司某个业务类的同质保单构成的组合，这种组合可以是那些核保特征相近的保单的组合，也可以是同一类业务的保单组合；又比如，商业银行贷款业务中相对同质的贷款的组合，对公业务中同一行业的贷款资产池，个人业务中风险特征相对一致的个人住房消费贷款组成的资产池.

虽然金融机构也会关心每个风险个体标的的损失情况，但是从整体的经营看，金融机构更关心整体组合的损失风险，乃至每个业务类、分支机构、子公司以及整个公司的损失风险.

从概率论建模的角度看，这一类问题意味着随机变量和的分析以及由这种随机变量求和而产生的一系列问题. 这种组合的风险模型常常会表现出与单个风险不同的性质.

从本章开始，"风险"一词均表示支集为非负实数的随机变量(或过程). 本章将讨论在给定的时间期限内组合的风险状况. 也就是说，这里的"短期"意味着不考虑时间因素.

为了分析这种组合的风险，本章介绍以下基本方法：随机变量分析，独立随机变量的和、随机和的分析.

§1.1　个体风险模型

如果将给定时间内每个个体的风险直接求和，就自然得到最基本的个体风险模型.

定义 1-1　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的随机变量，而且具有以下性质：

$$\Pr(X_i = 0) > 0, \tag{1.1.1}$$
$$\Pr(X_i \geqslant 0) = 1. \tag{1.1.2}$$

称满足条件(1.1.1)和(1.1.2)的模型

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \tag{1.1.3}$$

为**个体风险模型**，并称模型(1.1.3)中的 S 为**总损失(量)**，n 为**总风险数**，$X_i(i=1,2,\cdots,n)$为**第 i 个个体的损失(量)**.

关于模型(1.1.3)的背景可解释为：模型(1.1.3)中的 S 表示在给定的周期(一年、半年、季度)内某给定的 n 个业务组合的总损失量，其中的 X_i 表示第 i 个风险个体的损失量(个体风险变量). 性质(1.1.1)表明，每个风险个体的确存在损失不发生的概率；性质(1.1.2)表明，这里只考虑风险个体的损失，不考虑损失为负值(赢利)的情况.

本章的核心问题是讨论总损失量 S 的概率分布性质及相关的计算.

1.1.1　个体风险变量的分析

根据 X_i 的性质(1.1.1)和(1.1.2)，可以将 X_i 分解为

$$X_i = I_i B_i, \tag{1.1.4}$$

其中

(1) $I_i=1$ 或 0，表示第 i 个风险个体是否发生损失. 当 $I_i=1$ 时，表示发生损失；当 $I_i=0$ 时，表示不发生损失. 所以，I_i 为示性变量或称 Bernoulli 变量，也称两点分布变量，满足：

$$\Pr(I_i = 1) = 1 - \Pr(I_i = 0). \tag{1.1.5}$$

通常记 $q_i=\Pr(I_i=1)$. 在保险情形中，一般情况下 q_i 都非常小.

(2) B_i 表示当第 i 个风险个体发生损失时，其最终的损失金额. 所以，B_i 满足：

$$\Pr(B_i = 0) = 0. \tag{1.1.6}$$

这也意味着 X_i 的概率分布函数 $F_{X_i}(x)$ 可以表示为混合函数的形式：

$$F_{X_i}(x) = (1 - q_i) + q_i F_{B_i}(x), \quad x \geqslant 0, \tag{1.1.7}$$
$$F_{B_i}(0) = 0,$$

其中 $F_{B_i}(x)$是 B_i 的分布函数.

一般记

$$\mu_i = \mathrm{E}(B_i), \quad \sigma_i^2 = \mathrm{Var}(B_i),$$

且假设 I_i 与 B_i 独立,则由条件随机变量的矩计算公式有

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu_i q_i, \quad \mathrm{Var}(X_i) = \mu_i^2 q_i(1-q_i) + \sigma_i^2 q_i. \quad (1.1.8)$$

例 1-1 已知某保险公司某一年定期寿险的身故保险责任如下：一般的身故赔偿为 5 万元;若“意外身故”,则额外赔偿 5 万元.经过对历史数据的分析,已知一年内“意外身故”的概率为 0.5‰,非“意外身故”的概率为 2‰.试分析该保险每份保单损失量的分布、均值和方差.

解 根据已知条件,可以直接得到每份保单损失量 X_i 的分布为(损失金额以万元为单位)：

$$\Pr(X_i = 10) = 0.0005, \quad \Pr(X_i = 5) = 0.0020,$$
$$\Pr(X_i = 0) = 0.9975.$$

据此,可以很方便地计算 X_i 的均值和方差：

$$\mathrm{E}(X_i) = 0.0005 \times 10 + 0.0020 \times 5 = 0.015,$$
$$\mathrm{Var}(X_i) = \mathrm{E}(X_i^2) - \mathrm{E}^2(X_i) = 0.099775.$$

另外,也可以对 X_i 按照 I_i 与 B_i 进行分解,则有

$$\Pr(I_i = 1, B_i = 10) = 0.0005,$$
$$\Pr(I_i = 1, B_i = 5) = 0.0020,$$
$$\Pr(I_i = 1, B_i = b) = 0 \quad (b \neq 10, 5).$$

而 I_i 与 B_i 独立,所以有

$$q_i = \Pr(I_i = 1) = 0.0025,$$

$$\Pr(B_i = 10) = \Pr(X_i = 10 | I_i = 1) = \frac{0.0005}{0.0025} = 0.2,$$

$$\Pr(B_i = 5) = \Pr(X_i = 5 | I_i = 1) = \frac{0.0020}{0.0025} = 0.8,$$

进而有

$$\mu_i = \mathrm{E}(B_i) = 0.2 \times 10 + 0.8 \times 5 = 6,$$
$$\sigma_i^2 = \mathrm{Var}(B_i) = 0.2 \times (10-6)^2 + 0.8 \times (5-6)^2 = 4.$$