高等工程数学

上　　册

[美] C. RAY WYLIE　著

西安交通大学数学系《工程数学》翻译组　译

人民教育出版社

高等工程数学
上册
[美] C. RAY WYLIE 著
西安交通大学数学系《工程数学》翻译组 译
*
人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装
*
开本 850×1168 1/32 印张 20.25 字数 480,000
1980 年 7 月第 1 版 1981 年 2 月第 1 次印刷
印数 00,001—16,500
书号 13012·0492 定价 1.75 元

目　录

序言……I

告学生……IV

译者的话……VI

第一章　一阶常微分方程……1

1.1　引言……1

1.2　基本定义……2

1.3　可分离的一阶方程……10

1.4　齐次一阶方程……15

1.5　恰当一阶方程……19

1.6　线性一阶方程……25

1.7　一阶微分方程的应用……29

第二章　常系数线性微分方程……48

2.1　一般线性二阶方程……48

2.2　常系数齐次线性方程……56

2.3　非齐次方程……65

2.4　用参数变更法求特积分……74

2.5　高阶方程……78

2.6　应用……83

2.7　Green 函数……96

第三章　联立线性微分方程……110

3.1　引言……110

3.2　化方程组为单独一个方程……110

3.3　方程组的余函数和特积分……122

第四章　有限差分……129

4.1　函数的差分……129

4.2　插值公式……144

4.3 数值微积分……155
4.4 微分方程的数值解法……166
4.5 差分方程……178
4.6 最小二乘法……192
第五章 机械与电气回路……217
5.1 引言……217
5.2 单自由度系统……217
5.3 平动机械系统……227
5.4 串联电气回路……246
5.5 具有几个自由度的系统……254
第六章 Fourier 级数与积分……269
6.1 引言……269
6.2 Euler 系数……270
6.3 半幅展开式……278
6.4 Fourier 级数的另一些可选用形式……289
6.5 应用……294
6.6 作为 Fourier 级数的极限的 Fourier 积分……303
6.7 从 Fourier 积分到 Laplace 变换……319
第七章 Laplace 变换……324
7.1 理论初步……324
7.2 一般方法……332
7.3 一些特别函数的变换式……338
7.4 更多的一般定理……347
7.5 Heaviside 展开定理……364
7.6 周期函数的变换式……372
7.7 卷积公式与 Duhamel 公式……390
第八章 偏微分方程……406
8.1 引言……406
8.2 方程的导出……406
8.3 波动方程的 d'Alembert 解法……423
8.4 分离变量……433

8.5 正交函数及一般展开问题……446
8.6 进一步的应用……469
8.7 Laplace 变换法……485
第九章 Bessel 函数与 Legendre 多项式……493
9.1 理论初步……493
9.2 Bessel 方程的级数解……501
9.3 修正 Bessel 函数……511
9.4 可用 Bessel 函数求解的方程……519
9.5 Bessel 函数的恒等式……523
9.6 Bessel 函数的正交性……535
9.7 Bessel 函数的应用……542
9.8 Legendre 多项式……562
单数号习题答案……580
索引……625

第一章　一阶常微分方程

1.1　引言

含有某一函数的一个或几个导数的方程称为**微分方程**. 某一微分方程的一个**解**是指因变量与自变量之间一个不含导数的关系式，而且把它代入该给定方程就使其化为恒等式. 研究微分方程的解的存在、性质及确定，不仅对于纯粹数学家，而且对于从事自然现象的数学分析的任何人，都有着基本重要性.

一般说来，一位数学家如果能够证明某一给定微分方程具有一个解并且能够推出那个解的几个较重要性质，就认为这是一大成功. 另一方面，如果未能显示该解的一个明确表达式，往往使一位物理学家或工程师大失所望. 通常的妥协办法是求出一种切实可行的程序，借助于这种程序，所要的解就可能以满意的精确度来逼近.

然而，并不是所有的微分方程都困难到必需这样做，有广大而且很重要的几类方程是能够容易地求解的. 例如，一个形如

$$\frac{dy}{dx}=f(x)$$

的方程实在是一个微分方程，而积分

$$y=\int f(x)dx+c$$

就是一个解. 更一般地，方程

$$\frac{d^n y}{dx^n}=g(x)$$

是一个由 n 次逐次积分能够得解的微分方程. 除了名称之外，积分过程实际上就是微分方程一种求解过程的例子.

我们在本章和随后两章中即将考虑的微分方程是难度上仅次于直接积分能求解的. 这些方程仅仅构成所有微分方程全体的一个很小部分，可是有了这些方程的知识，一位科学家就具备条件来处理各种各样的应用了. 以这么少得到这么多确是不平常的.

1.2 基本定义

如果在一个微分方程中所出现的导数是全导数，该方程称为**常微分方程**；如果有偏导数出现，该方程称为**偏微分方程**. 一个微分方程的**阶**是指在该方程中所出现的最高阶导数的阶.

例 1　方程 $x^2y''+xy'+(x^2-4)y=0$ 是一个把因变量 y 与其一、二阶导数及自变量 x 连结起来的二阶常微分方程.

例 2　方程

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0$$

是一个四阶偏微分方程.

目前，我们将专门跟常微分方程打交道.

一个方程，其中因变量与其导数都是线性的，即一次的，称为**线性微分方程**. 由此定义可见，最一般的 n 阶线性(常)微分方程具有形式

(1)　$p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=r(x)$

一个不是线性的，即不能写成形式(1)的微分方程称为**非线性的**. 一般说来，线性方程远比非线性方程更易求解，而大多数基本应用都牵涉到线性方程.

例 3　方程 $y''+4xy'+2y=\cos x$ 是一个二阶线性方程. xy' 与 $\cos x$ 两项的存在并不改变方程是线性的这一事实，因为，根据定义，线性只决定于因变量 y 与其导数怎样在它们之间结合起来.

例 4　方程 $y''+4yy'+2y=\cos x$ 是一个非线性方程，因为有 y 与其导数 y' 的乘积出现．

例 5　方程 $y''+\sin y=0$ 是非线性的，因为存在了 y 的一个非线性函数 $\sin y$．

如简单微分方程

$$\frac{dy}{dx}=e^{-x^2}$$

及其解

$$y=\int e^{-x^2}dx+c$$

所例示的那样，一个微分方程的解可能依赖于不能用初等函数来计值的积分．此例还明示这一事实，微分方程的一个解通常含有一个或几个任意常数．

关于某一微分方程的一个解最多可能含有几个本质任意常数的问题，或者关于什么是本质常数的问题，要详细论述是十分困难的．① 对我们说来，当一个表达式含有 n 个任意常数时，如果通过该表达式的形式上重新整理，并不能由任何较少数目的常数来替换，我们将认为这些常数就是本质的．例如

(2)　　$$a\cos^2x+b\sin^2x+c\cos 2x$$

含三个任意常数．然而，由于

$$\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x$$

表达式(2)可以写成

$$\begin{aligned}&a\cos^2x+b\sin^2x+c(\cos^2x-\sin^2x)\\&=(a+c)\cos^2x+(b-c)\sin^2x\\&=d\cos^2x+e\sin^2x\end{aligned}$$

的形式，其中 $d=a+c$, $e=b-c$．三个任意常数 a,b，及 c 可以由两个常数 d 与 e 来替换这一事实表明前者不全是本质的．另一方

① 例如，参看 R. P. Agnew, "Differential Equations"(微分方程)，第二版，103—105 页，McGraw-Hill, New York, 1960.

面，因为 $\cos^2x$ 和 $\sin^2x$ 是线性无关的[①]（但 $\cos^2x$，$\sin^2x$ 和 $\cos 2x$ 是线性相关的），可见无法再把该给定表达式重新整理，使 d 与 e 合并成为单独一个新的任意常数，并由它来替换．因此，d 与 e 是本质的．

经常发生（尤其关于线性方程）的情况是一个 n 阶微分方程所具有的各个解只含 n 个本质任意常数或参数而没有解含更多常数．然而方程如

$$\left|\frac{dy}{dx}\right|+|y|=0$$

（显然仅有单独一个解 $y=0$）及

$$\left|\frac{dy}{dx}\right|+1=0$$

（根本没有任何解）却没有含任何任意常数的解．此外，也有一些简单微分方程，其所具有的解含多于方程阶数的本质参数．例如，容易验证，把 $y=c_1x^2\,(x\leqslant 0)$ 族（图 1.1a）中对应于任何 c_1 值的弧与 $y=c_2x^2\ (x\geqslant 0)$ 族（图 1.1b）中对应于任何 c_2 值的弧搭配起来可以得出一个函数，对所有 x 值都满足微分方程

(3) $$xy'=2y$$

（图 1.1c）．换言之，对于两个本质常数 c_1 与 c_2 的所有选择，法则

$$y=\begin{cases}c_1x^2 & x\leqslant 0\\ c_2x^2 & x>0\end{cases}$$

确定一个对所有 x 值都连续且可微，并在整个 x 轴上满足方程(3)的函数．一个更加惊人的这类例子出现在习题 44，其中给出一个一阶方程，竟有一个含无穷多个本质参数的解．

正如上文所暗示的那样，要作出对所有微分方程都有效的陈

① 参看 10.5 节定义 1 与 2.

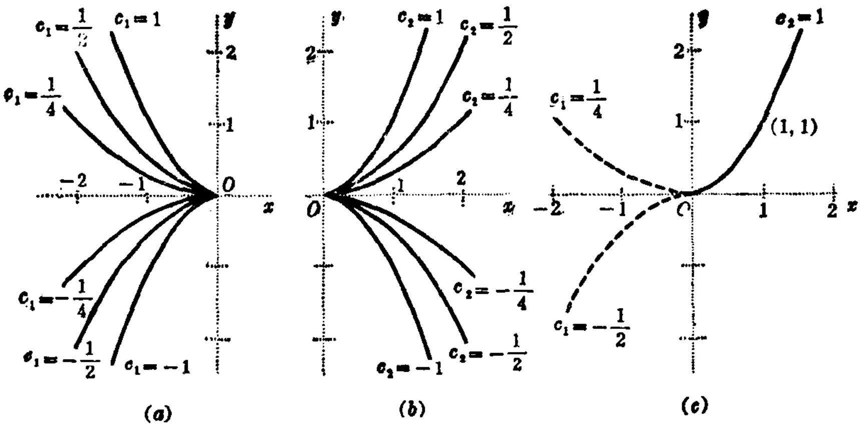

图 1.1

$y=cx^2$ 族的不同抛物线的弧被拼接起来得出微分方程 $xy'=2y$ 的许多解

述即便不是不可能的也是困难的. 微分方程理论实质上是一整套的定理, 涉及由诸如方程的阶和线性以及其系数的连续性和有界性等事项来规定的各特定类型方程. 足以代表这些定理的是下列结果,①这对我们将在本章中考虑的那些方程, 即一阶方程的理论具有基本重要性.

定理 1 设 (x_0, y_0) 是 xy 平面的一点, R 是由不等式 $|x-x_0|\leqslant a$, $|y-y_0|\leqslant b$ 所规定的矩形区域, $f(x,y)$ 与 $f_y(x,y)\equiv\partial f(x,y)/\partial y$ 在 R 的所有点单值而且连续, M 是一个常数, 使得在 R 的所有点有 $|f(x,y)|<M$; 并且设 h 是 a 与 b/M 两数中较小的一个. 那末, 在区间 $|x-x_0|<h$ 上, 就有一个唯一的连续函数 y, 满足方程 $y'=f(x,y)$, 并且当 $x=x_0$ 时取值 y_0.

根据定理 1 来重新考察方程(3)是有益的. 对于这个方程, 我

① 例如, 参看 M. Golomb 与 M. E. Shanks, “Elements of ordinary Differential Equations”(常微分方程初步), 第二版, 63—78 页, McGraw-Hill, New York, 1965.

们有 $f(x,y)=2y/x$, 并且显然当 $x=0$ 时 f 与 f_y 都不存在. 因此, 由定理 1 可见, 在包含 $x=0$ 的区间上, 方程(3)的解的存在性与唯一性都得不到保证. 实际上, 正如我们前面讨论所指出的那样, 方程(3)有对一切 x 值都有效的解. 然而, 如图 1.1c 所示, 在包含 $x=0$ 的任何区间上, 通过一个给定点(x_0,y_0)、例如$(1,1)$的解曲线并不是唯一的. 另一方面, 按照定理 1, 在任何包含 x_0 但不包含 $x=0$ 的区间上, 通过一个给定点(x_0,y_0)的解曲线是唯一的.

在微分方程应用中所涉及到的方程几乎都具有至少含一个任意常数的解, 对于这样一些方程适宜于引入下列各项定义. 至少含有一个任意常数的解称为一个**通解**. 以特别值指定给通解中所出现的各任意常数从而得到的解称为一个**特解**. 不能由任何通解以特殊值指定给其中各任意常数来得到的解称为**奇解**. 一个通解如果具有这样的性质, 以适当值指定给其中各任意常数可以得到该微分方程的每一个解, 称为一个**全解**. 这样, 一个通解可以看作是该给定方程的某一族特解的描摹, 而一个全解可以看作是所有解的集合的描摹.

务须注意, 我们说到某一微分方程的一个通解及一个全解, 而不说方程的通解及全解.① 一个方程如果有一个通解或一个全解, 就有许多这样的解, 而且这些解可能在形式上差别很大. 此外, 在涉及微分方程的特定问题中, 选择哪个全解来使用往往对于问题之能否轻易地解决有重要关系.

例 6 验证对于常数 a 与 b 的一切值 $y=ae^{-x}+be^{2x}$ 是方程 $y''-y'-2y=0$ 的解.

对 y 求导数, 如所指出的那样代入微分方程, 然后合并 a 与 b 的项, 我们就对于 a 与 b 的一切值得到

① 此处原文是 *the* general solution and *the* complete solution. 这个定冠词"*the*"含有"唯一"的意义, 但无法用中文表出. ——译者注.

$$(ae^{-x}+4be^{2x})-(-ae^{-x}+2be^{2x})-2(ae^{-x}+be^{2x})$$
$$=(e^{-x}+e^{-x}-2e^{-x})a+(4e^{2x}-2e^{2x}-2e^{2x})b$$
$$=0a+0b=0$$

这样，$y=ae^{-x}+be^{2x}$ 是 $y''-y'-2y=0$ 的一个通解．事实上，我们将在 2.2 节中看到，它是该方程的一个全解．

饶有趣味的是虽然 $y_1=ae^{-x}$ 与 $y_2=be^{2x}$ 也都满足方程 $yy''-(y')^2=0$，但和式 $y=y_1+y_2=ae^{-x}+be^{2x}$ 却不是 $yy''-(y')^2=0$ 的解．事实上，求导数，代入并化简，我们有

$$(ae^{-x}+be^{2x})(ae^{-x}+4be^{2x})-(-ae^{-x}+2be^{2x})^2\equiv 9abe^{x}$$

而此式不可能恒等于零，除非 a 或 b 是零，即，除非和式 y 恰由两个各别解中的一个或另一个所组成．粗略地说，这个性能上差异的原因在于方程 $y''-y'-2y=0$ 是线性的，而方程 $yy''-(y')^2=0$ 是非线性的．更确切地说，我们将在 2.1 节定理 1 中看到，对于 y 或其导数之一在每一项中出现的线性方程，两个解之和也是一个解，而一般说来，一个非线性方程的两个解之和并不是那个方程的解．

偶而也有必要来确定一个 n 阶微分方程以含有 n 个任意常数的给定函数作为一个通解．这是（至少在理论上）可以通过对给定表达式求导 n 次然后由原方程及这些导出方程的代数运算消去各任意常数来做到的．

例 7　如果 a 与 b 是任意常数，求出一个以

(4)　$$y=ae^{x}+b\cos x$$

作为一个通解的二阶方程．

对给定表达式求导数，得

(5)　$$y'=ae^{x}-b\sin x$$

(6)　$$y''=ae^{x}-b\cos x$$

然后，把方程(4)与(6)相加并相减，我们得到

$$a=\frac{y+y''}{2e^{x}},\quad b=\frac{y-y''}{2\cos x}$$

把这些结果代入(5)给出

$$y'=\frac{y+y''}{2e^{x}}e^{x}-\frac{y-y''}{2\cos x}\sin x$$

而最后有

$$(1+\tan x)y''-2y'+(1-\tan x)y=0 \tag{7}$$

尽管(7)，除了它明显的倍数之外，是以(4)作为其一个通解的唯一二阶微分方程，但它决不是以(4)为一个通解的唯一方程．例如，对(6)再求导数两次，得

$$y^{\text{iv}}=ae^x+b\cos x$$

而与(4)比较，我们看到给定函数也满足很简单方程

$$y^{\text{iv}}=y \tag{8}$$

方程(8)因为是四阶的，可以推想它具有一般含四个任意常数的通解，并且容易验证

$$y=ae^x+b\cos x+ce^{-x}+d\sin x$$

事实上，的确对 a, b, c 及 d 的所有值都满足方程(8)．

习　题

叙述下列方程的阶，并辨别它是常的还是偏的，以及是线性的还是非线性的：

1　$y''+3y'+2y=x^4$　　2　$y''+(a+b\cos 2x)y=0$

3　$y'''+6y''+11y'+6y=e^x$　　4　$y^{\text{iv}}+xy''+y^2=0$

5　$\dfrac{d(xy')}{dx}+xy=0$　　6　$(x+y)dy=(x-y)dx$

7　$a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$　　8　$\dfrac{\partial^2(x^2\partial^2 u/\partial x^2)}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

9　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=u\dfrac{\partial u}{\partial t}$　　10　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\varphi(x,y,z)$

证明在下列表达式中出现的常数并非都是本质的，并且在所有情况下把各式重新整理使得所有留下的常数都是本质的：

11　Ae^{x+k}　　12　$a+\ln bx$

13　$a\ln x^b$　　14　$\dfrac{ax+b}{cx+d}$

15　$A\sin(x+b)+C\sin(x+d)$　　16　$A[\cos(x+a)+\cos(x-a)]$

17　$a\cosh^2\theta+b\sinh^2\theta+c\cosh^2\theta$　　18　$a\sin^2 x+b\sin x+c\sin^3 x$

19　$\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{x^2+3x+2}$　　20　$a(x-6y-7)+b(3x+4y+5)+c(5x+3y+4)$

验证下列方程对常数 a 与 b 的一切值有所指出的解.

21	$y''+4y=0$	$y=a\cos 2x+b\sin 2x$
22	$y''-4y=0$	$y=ae^{2x}+be^{-2x}$
23	$y''+3y'+2y=12e^{2x}$	$y=ae^{-x}+be^{-2x}+e^{2x}$
24	$y''-6y'+9y=0$	$y=ae^{3x}+bxe^{3x}$
25	$(\cos 2x)y'+(2\sin 2x)y=2$	$y=a\cos 2x+\sin 2x$
26	$2xydy=(y^2-x)dx$	$y^2=ax-x\ln x$
27	$y''+(y')^2+1=0$	$y=\ln\cos(x-a)+b$
28	$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial u}{\partial t}$	$u=ae^{-9t}\cos(3x+b)$
29	$4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$	$u=af(x+2t)+bg(x-2t)$

如果 a 与 b 是任意常数，求出下列表达式作为一个通解的最小阶微分方程.

30 $y=ae^{-2x}+be^{x}$

31 $y=ae^{-2t}+bte^{-2t}$

32 $y=ae^{-t}+be^{t}+ce^{2t}$

33 $y=2ax+bx^2$

34 $y=a\cosh 2x+b\sinh 2x$

35 $y=\sin(ax+b)$

36 已知一个表达式确定所有与 x 轴相切且有垂直对称轴的抛物线族，求以此式作为一个通解的微分方程.

37 已知一个表达式确定所有与抛物线 $2y=x^2$ 相切的直线族，求以此式作为通解的微分方程. 验证该给定抛物线的方程所确定的函数正是所求微分方程的奇解.

38 验证对于 m 的一切值，函数 $y=mx+f(m)$ 是微分方程 $y=xy'+f(y')$ 的解. [这微分方程称为 **Clairaut 方程**，取名于法国数学家 A. C. Clairaut (1713—1765).]

39 验证对于任意常数 a 与 b 的一切值，$y_1=a$ 及 $y_2=bx^2$ 满足下列微分方程

$$xy''=y' \qquad 及 \qquad 2yy''=(y')^2$$

但是 $y=a+bx^2$ 仅满足第一个方程. 试解释.

40 验证对于任意常数 a 与 b 的一切值，$y_1=a$ 及 $y_2=b\sqrt{x}$ 满足下列微分方程

$$2xy''+y'=0 \qquad 及 \qquad 8x^3(y'')^2-yy'=0$$

但是 $y=a+b\sqrt{x}$ 仅满足第一个方程．试解释．

41　验证对于任意常数 a 与 b 的一切值，$y_1=a(x-1)^2$ 及 $y_2=b(x+1)^2$ 满足下列微分方程

$$(x^2-1)y''-2xy'+2y=0 \qquad 及 \qquad 2yy''-(y')^2=0$$

但是 $y=a(x-1)^2+b(x+1)^2$ 仅满足第一个方程．试解释．

42　验证对于任意常数 c_1 与 c_2 的一切值，函数

$$y=\begin{cases} c_1x^2-x & x\leqslant 0 \\ c_2x^2-x & x>0 \end{cases}$$

满足微分方程 $xy'=2y+x$．试解释．

43　验证对于任意常数 c_1, c_2 及 c_3 的一切值，函数

$$y=\begin{cases} c_1(x^2-1)^2 & x<-1 \\ c_2(x^2-1)^2 & -1\leqslant x\leqslant 1 \\ c_3(x^2-1)^2 & x>1 \end{cases}$$

满足微分方程 $(x^2-1)y'=4xy$，试解释．

44　验证对于任意常数 $\{c_n\}$ $(n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots)$ 的一切值，函数

$$y=c_n(1-\cos x) \qquad 2n\pi\leqslant x<2(n+1)\pi$$

满足微分方程 $(1-\cos x)y'=(\sin x)y$．试解释．

1.3　可分离的一阶方程

在许多情况下可以把一个一阶微分方程由代数运算化成

$$f(x)dx=g(y)dy \tag{1}$$

的形式．这样一个方程称为**可分离的**，因为可以把变量 x 与 y 彼此分离使得 x 仅在 dx 的系数中而 y 仅在 dy 的系数中出现．这类方程可以通过积分立即解出，并且我们有通解

$$\int f(x)dx=\int g(y)dy+c \tag{2}$$

其中 c 是一个任意积分常数．然而，必须记住，出现在(2)中的积分可能无法用初等函数来计值，并且可能需要数值或图解积分法然后才可以把这个解付诸实际应用．

应当认为是可分离的其他形式是

(3) $$f(x)G(y)dx=F(x)g(y)dy$$

(4) $$\frac{dy}{dx}=M(x)N(y)$$

求方程(3)的一个通解，可以先两端除以乘积 $F(x)G(y)$，使变量分离,然后积分,得出:

$$\int\frac{f(x)}{F(x)}dx=\int\frac{g(y)}{G(y)}dy+c$$

类似地,求方程(4)的一个通解,可以先两端乘以 dx 并除以 $N(y)$,然后积分,得出:

$$\int\frac{dy}{N(y)}=\int M(x)dx+c$$

显然，求解一个可分离方程的过程通常牵涉到除以一个或几个表达式的运算. 在这种情况下，运算结果在除式不等于零的各处是有效的,但对于除式为零的一些变量值,就可能或不可能有意义. 那样一些值需要特殊的考察,而我们在下一个例中将看到,可能导致奇解.

例 1 求解微分方程 $dx+xydy=y^2dx+ydy$.

此方程可分离变量并不是立即能看出来的. 然而,无论如何在求这类方程时,最好第一步是把 dx 及 dy 各项合并起来. 这就给出

$$(1-y^2)dx=y(1-x)dy$$

上式属于形式(3). 因此,除以乘积 $(1-x)(1-y^2)$ 将使变量分离并把方程化为标准形式(1):

$$\frac{dx}{1-x}=\frac{ydy}{1-y^2}$$

现在,乘以 -2 并积分,我们得到确定 y 为 x 的一个隐函数的下列方程:

$$2\ln|1-x|=\ln|1-y^2|+c$$

在本例中,正如在许多这类问题中一样，先合并各对数项，然后取反对数,就有可能把解写成更方便的形式:

$$\ln\frac{|1-x|^2}{|1-y^2|}=c \qquad \frac{|1-x|^2}{|1-y^2|}=e^c=k^2$$

其中 $k^2=e^c$ 必然是正的．最后，去掉分母与绝对值，我们有

$$(1-x)^2=\pm k^2(1-y^2) \qquad k\neq 0$$

这里的两种可能性当然可以合而为一，写成

$$(1-x)^2=\lambda(1-y^2)$$

其中 λ 现在可取除 0 以外的任何正或负的实数值．这样，本微分方程的解确定了圆锥曲线族

$$\frac{(x-1)^2}{\lambda}+y^2=1 \qquad \lambda\neq 0 \tag{5}$$

其中一些代表性曲线在图 1.2 中示出．如果 $\lambda>0$，解曲线全是椭圆；如果 $\lambda<0$，解曲线全是双曲线．

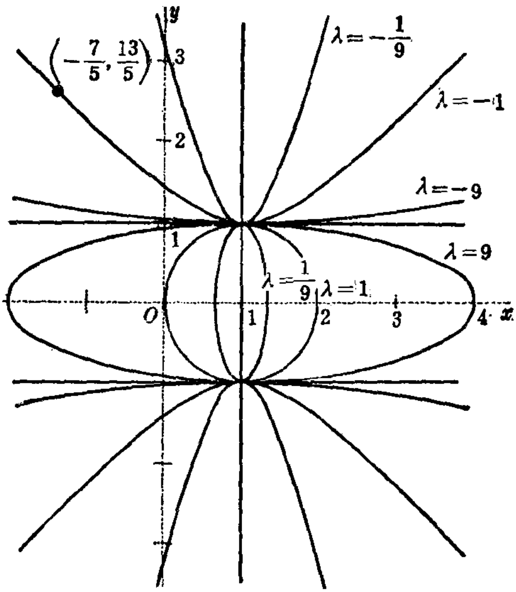

图 1.2

微分方程 $(1-y^2)dx=y(1-x)dy$ 的解族 $[(x-1)^2/\lambda]+y^2=1$ 中的一些代表性解

在大多数实际问题中，微分方程的通解需要满足一些使其任意常数唯一地确定的特殊条件．例如，在本问题中，我们可以寻找通过点$\left(-\frac{7}{5},\frac{13}{5}\right)$的特解曲线．把 x 与 y 的这些值代入，我们就有