经济数学基础(二)

Linear Algebra

刘书田 主编

线性代数

北京工业大学出版社

(京)新登字 212 号

内 容 简 介

本套教材是根据国家教委高教司 1989 年审定的《经济数学基础》教学大纲的要求编写的，全套教材共分三册.《线性代数》分册内容包括：行列式、矩阵、线性方程组、n 维空间向量、矩阵的特征值和特征向量，二次型等. 教材中每节后配有练习，每章后配有习题，书后附有习题答案和提示，以供教师和学生参考.

本书适合于高等院校财经类专业本科生、大专生使用.

经济数学基础(二)

线性代数

主编：刘书田　　副主编：何蕴理

编写者：刘国忠　谢贤衎　赵慧斌

北京工业大学出版社出版发行　社址：北京朝阳区平乐园 100 号

徐水宏远印刷厂印刷　　各地新华书店经销

开本：1/32　787mm×1092mm　印张：11　字数：246 千字

印数：0001～2500 册　1995 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 7-5639-0458-1/O・22　定价：7.70 元

前　言

《经济数学基础》系列教材由三个分册组成：第一分册《微积分》，第二分册《线性代数》，第三分册《概率统计》. 该门课是高等院校财经类专业的核心课程.

这套系列教材是根据国家教委高等教育司 1989 年 10 月审定的《经济数学基础》教学大纲的要求编写的. 在编写教材时，既考虑到数学学科本身的科学性，注意教材内容选择，注意深度和广度，系统地介绍了基本理论和基本方法；又考虑到培养学生的逻辑思维能力，注意问题的引入和分析，注意行文严谨和逻辑严密；还特别注意数学在经济学中的应用，例举了经济应用方面的问题，使学生能初步掌握经济分析中的定量方法. 教材中每节后配有练习，每章后配有习题，习题中还选编了适量的选择题(每题至少有一项备选答案是正确的). 书后附有习题答案和提示，以供教师和学生参考.

教材中凡是超出《经济数学基础》教学大纲要求的内容，均标有“*”号，这可作为选学内容.

这套教材由北京工业大学应用数学系经济数学教研室集体讨论，分头编写，其中第一分册由刘书田、李剑平、丁津执笔；第二分册由刘国忠、谢贤衍、赵慧斌执笔；第三分册由何蕴理、徐国元、李贵彬执笔. 付梓前，承蒙中国人民大学胡富昌教授、胡显佑教授和北京大学范培华教授进行了认真审阅，并提出了宝贵意见. 这套教材的编写和出版，得到了北京工业大学教材建设委员会、应用数学系领导、校出版社和校教材科的支

持和帮助，在此一并致谢.

限于编写者水平和时间仓促，书中不妥之处在所难免，恳请读者指正.

编　者

1994年12月

目　录

第一章 行列式

行列式是线性代数的一个重要内容和基础知识，本书的各章都要用到行列式. 我们在这一章将介绍 n 阶行列式的概念、性质及主要计算方法.

§1-1 n 阶行列式的概念

一、 排列的奇偶性

为了给出 n 阶行列式的概念，需要先介绍排列、排列的逆序数以及排列的奇偶性等预备知识.

定义 1.1

由数码 1,2,…,n 组成的一个有序数组

$$i_1, i_2, \cdots i_n$$

称为一个 n 级排列.

由数码 1,2,…n 所组成的所有不同的 n 级排列共有 $n!$ 个.

例如，由 1、2、3、4 可以组成 4! 个 4 级排列，它们是：

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

定义 1.2 **在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，如果有较大的数码 i_t 排在较小的数码 i_s 的前面，则称 i_t 与 i_s 构成一个逆序，记作 i_ti_s；一个 n 级排列中逆序的总数，称为这个排列的逆序数，记作 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.**

例如，在 4 级排列 3421 中，32、31、42、41、21 各构成一个逆序，所以，排列 3421 的逆序数为 $\tau(3421)=5$. 同样可计算出排列 3412 的逆序数为 $\tau(3412)=4$.

定义 1.3 **如果排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 是奇数，则称此排列为奇排列；是偶数则称此排列为偶排列.**

排列 3421 是奇排列；排列 3412 是偶排列. 自然排列 $123\cdots n$ 的逆序数是 0，即 $\tau(123\cdots n)=0$，于是排列 $123\cdots n$ 是偶排列.

定义 1.4 **在一个 n 级排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，如果其中某两个数 i_s 与 i_t 对调位置，其余各数位置不变，就得到另一个 n 级排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，这样的变换称为一个对换，记作 (i_s,i_t).**

定理 1.1 **任意一个排列经过一次对换，改变其奇偶性.**

例如，排列 25341 是一个偶排列，经过对换 $(5,4)$，得到的排列 24351 便是一个奇排列.

定理 1.2 **在所有的 n 级排列中 $(n\geqslant 2)$，奇排列与偶排列的个数相等，各为 $\frac{n!}{2}$ 个.**

证 假设在 $n!$ 个 n 级排列中，有 p 个奇排列，q 个偶排列，我们来证 $p=q$.

对这 p 个奇排列施以同一个对换 (i_s,i_t)，则由定理 1.1 可知，这 p 个奇排列全部都变为偶排列. 由于偶排列一共只有 q 个，所以 $p\leqslant q$；同理，如果将全部的偶排列也都施以同一个对换 (i_s,i_t)，则 q 个偶排列全部都变为奇排列，于是又有 $q\leqslant p$.

由 $q\leqslant p$ 及 $q\leqslant p$ 得到 $p=q$，即奇排列与偶排列的个数相

等.

又由于 n 级排列共有 $n!$ 个,则 $p+q=n!$,所以 $p=q=\frac{n!}{2}$.

二、 n 阶行列式的定义

我们首先分析一下三阶行列式的特点.

三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

可见,三阶行列式是所有位于不同行、不同列的三个元素乘积的代数和,其中每一乘积都可写成形式

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \tag{1.1}$$

再冠以"+"号或"-"号. 当这一乘积的行标成自然序排列时,其列标构成三级排列 $j_1j_2j_3$. 当 $(j_1j_2j_3)$ 为偶排列时,乘积(1.1)前冠以"+"号. 当 $(j_1j_2j_3)$ 为奇排列时,乘积(1.1)前冠以"-"号. 因此,乘积(1.1)前的符号是:$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$.

乘积再冠以应有的符号,就是行列式的项,这样的项的个数,恰好是所有三级排列的个数 3!.

例如,展开式中,项 $-a_{12}a_{21}a_{33}=(-1)^{\tau(213)}a_{12}a_{21}a_{33}$.

所以三阶行列式也可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2j_3)}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中"$\sum\limits_{(j_1j_2j_3)}$"表示 $(j_1j_2j_3)$ 取遍所有的三级排列(3! 个)时,对形

如$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$的项求和.

二阶行列式也有同样的规律.下面我们将遵循这个规律去定义 n 阶行列式.

定义 1.5 **由 n^2 个数 $a_{ij}(i、j=1、2、\cdots n)$ 组成 n 行 n 列的式子**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.2}$$

它所表示的数值是所有取自不同行、不同列 n 个数的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 再冠以符号$(-1^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$的项

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.3}$$

的和.其中$(j_1j_2\cdots j_n)$是乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中当行标按自然序排列时,列标所形成的 n 级排列.则式子(1.2)称为 n 阶行列式.即 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.4}$$

其中“$\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}$”表示对所有的 n 级排列求和.

(1.4)式称为 n 阶行列式按行自然序排列的展开式.(1.3)式是它的一般项.

由于数的乘法满足交换律,所以 n 阶行列式一般项中的列标也可以取自然序排列,该项符号则由行标排列的奇偶性决定.此时的一般项为

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} \tag{1.5}$$

而 n 阶行列式的展开式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n)} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \tag{1.6}$$

n 阶行列式中位于第 i 行第 j 列的数 a_{ij}(i、$j=1$、2、$\cdots n$)称为 n 阶行列式的元素.

n 阶行列式(1.2)可简记作$|a_{ij}|$.

例 1 下列各式都是五阶行列式中的元素的乘积. 试问它们是否是五阶行列式展开式中的项?

(1) $a_{12}a_{23}a_{34}a_{25}a_{51}$;

(2) $a_{31}a_{52}a_{43}a_{14}a_{25}$;

(3) $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{53}$.

解

(1) 式不是行列式中的项,因为含有两个第二行的元素 a_{23}、a_{25}(缺少第四行的元素).

(2) 式不是行列式中的项,但添加符号$(-1)^{\tau(35421)}$后,即

$$(-1)^{\tau(35421)}a_{31}a_{52}a_{43}a_{14}a_{25} = -a_{31}a_{52}a_{43}a_{14}a_{25}$$

才是五阶行列式中的一项.

(3) 式不是行列式中的项,因为含有两个第三列的元素 a_{23}、a_{53}(缺少第五列的元素).

例 2 根据定义,计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

解　因为行列式中元素 $a_{12}=7, a_{24}=1, a_{31}=2, a_{43}=3$, $a_{13}=5$,其余各元素皆为 0.

所有不同行、不同列元素的乘积为非零的仅有一项

$$(-1)^{\tau(2413)}a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}=(-1)^{3}7\times1\times2\times3=-42$$

其余 23 项都因含有 0 元素而得 0,所以 $D=-42$.

例 3　计算 n 阶下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 $a_{ii}\neq0(i=1、2、\cdots n)$.

解　根据 n 阶行列式的定义,n 阶行列式 D 应有 $n!$ 项,因含零元素的项都等于零,因此只要找出那些不等于零的项进行计算即可.

行列式 D 的一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.5}$$

一般项中第一个元素 a_{1j_1}取自第一行,而第一行中只有 $a_{11}\neq0$,因而 $j_1=1$,即行列式 D 中只有含 a_{11}的那些项才可能不为零;一般项中第二个元素 a_{2j_2}取自第二行,第二行中虽有两个元素不为零,即 $a_{21}\neq0, a_{22}\neq0$,但因第一个元素 a_{11}已取自第一列,所以第二个元素不能再取第一列的,即不能取 a_{21},只能取 a_{22},从而 $j_2=2$,即行列式 D 中只有含 $a_{11}a_{22}$的那些项才可能不为零;这样推下去,可得 $j_3=3, j_4=4, \cdots j_n=n$. 因此,行列式 D 中只含有积 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$的这一项不为零. 因此

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\tau(123\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{1.7}$$

同理可得上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{1.8}$$

其中 $a_{ii}\neq 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

上三角形行列式与下三角形行列式在行列式计算中，将起到重要作用. 它们的值均等于主对角线（从左上角到右下角）上所有元素的乘积.

主对角线以外的元素均为零的行列式，称为对角形行列式. 对角形行列式是特殊的上（下）三角形行列式，根据例 3 直接有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例 4　计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2\,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1\,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

其中 $a_{i\,n-i+1}\neq 0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$.

解 显然 D 的展开式中仅有积

$$a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n-1\,2}a_{n1}\neq 0$$

它的列标逆序数为

$$\begin{aligned}\tau(n\ n-1\cdots 2\ 1) &= (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1 \\ &= \frac{n(n-1)}{2}\end{aligned}$$

故 $$D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n-1\,2}a_{n1}$$

n 阶行列式展开式中的一般项的表达形式还可归结为下面的形式.

定理 1.3 n 阶行列式的一般项也可以写成

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{1.9}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n, j_1j_2\cdots j_n$ 均为 n 级排列.

证 由于 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 n 级排列,因此,(1.9)式中的 n 个元素是取自行列式 D 的不同的行与不同的列.

如果互换(1.9)式的两个元素 $a_{i_sj_s}$ 与 $a_{i_tj_t}$,则其行标排列由 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 变为 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$,由定理 1.1 可知其逆序数的奇偶性改变;列标由 $j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n$ 变为 $j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n$,其逆序数的奇偶性也改变.但互换后两标排列的逆序数之和的奇偶性则不改变,即有:

$$\begin{aligned}&(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n)+\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)} \\ &=(-1)^{\tau(i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n)+\tau(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)}\end{aligned}$$

所以互换(1.9)式中的两个元素的位置，其符号不改变．这样，我们总可以经过有限次互换(1.9)式中元素的位置，使其行标 $i_1i_2\cdots i_n$ 变为自然序排列，设此时列标排列变为 $j_1'j_2'\cdots j_n'$，则(1.9)式变为：

$$(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')}a_{1j'_1}a_{2j'_2}\cdots a_{nj'_n}$$
$$=(-1)^{\tau(j'_1j'_2\cdots j'_n)}a_{1j'_1}a_{2j'_2}\cdots a_{nj'_n}$$

故知(1.9)式确为 n 阶行列式 D 的一般项，即 n 阶行列式 D 的一般项也可写成(1.9)式的形式.

例 5 若 $(-1)^{\tau(41i53)+\tau(24j1k)}a_{42}a_{14}a_{ij}a_{51}a_{3k}$ 是五阶行列式 D 展开式中的一项，那么 i、j、k 应为何值？并确定这项的符号.

解 根据行列式定义，展开式中每一项中的元素是取自不同的行、不同的列，即没有相同的行标，也没有相同的列标．故有 $i=2$；j、k 在 3、5 中选择.

当 $i=2,j=3,k=5$ 时，则 $\tau(41253)+\tau(24315)=8$，于是：

$$(-1)^{\tau(41253)+\tau(24315)}a_{42}a_{14}a_{23}a_{51}a_{35}=+a_{42}a_{14}a_{23}a_{51}a_{35}$$

当 $i=2,j=5,k=3$ 时，则 $\tau(41253)+\tau(24513)=9$，于是：

$$(-1)^{\tau(41253)+\tau(24513)}a_{42}a_{14}a_{25}a_{51}a_{33}=-a_{42}a_{14}a_{25}a_{51}a_{33}$$

例 6 根据 n 阶行列式定义，计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 \\ 0 & 0 & n-2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

解 D的n个非0元素恰在不同的行、不同的列，所以D的展开式只有一项，其绝对值为$n!$

若将这些非零元素按行标的自然序排列，形式为：

$$a_{14}a_{25}a_{36}\cdots a_{n-3n}\,a_{n-2\,3}\,a_{n-1\,2}\,a_{n1}$$

列标排列为

$$456\cdots n321$$

列标逆序数为 $\tau(456\cdots n321)=3(n-3)+2+1=3n-6$

$$D=(-1)^{3n-6}n!$$

当$n\geqslant4$的偶数时，$D=n!$

当$n>4$的奇数时，$D=-n!$

练习 1-1

1. 求以下各排列的逆序数，并确定其奇偶性：

(1) 325641　　　　(2) 543612

(3) 4352716　　　　(4) $n(n-1)(n-2)\cdots21$

2. 在5级排列$i_1i_2i_3i_4i_5$中，若$i_2=4,i_4=1$，试写出满足此条件的所有奇排列，并指出其逆序数.

3. 确定数码i、j，使：

(1) $2i68j4319$为奇排列；

(2) $86i392j57$为偶排列.

4. 已知$-a_{52}a_{2j}a_{4k}a_{64}a_{16}a_{31}$是6阶行列式展开式中的项，求$j$、$k$.

5. 写出4阶行列式展开式中所有带负号且含元素a_{32}的项.

6. 根据行列式的定义，计算：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & \cdots & 0 \\ & \cdots & & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n-1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & n-3 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n-1 & 0 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$