

8-11-10

3574

葛斯密 平面三角学

目 次

第一章 三角函數

節 數	頁 數
1. 三角學.....	1
2. 變數;常數.....	1
3. 函數.....	1
4. 銳角之三角函數.....	1
5. $45^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ 之函數.....	5
6. 作圖;量角器.....	10
7. 三角函數之數值表.....	10
8. 角之產生.....	13
9. 正角與負角.....	13
10. 任何量之角.....	14
11. 四象限.....	14
12. 平面內一點之直坐標.....	16
13. 任意角三角函數之定義.....	18
14. 三角函數之代數符號.....	20
15. 應用.....	20
16. 以一三角函數表其餘五三角函數.....	28

第二章 基本關係式;減角公式

17. 基本關係式.....	31
18. 任一函數以其他五函數之每個表之.....	33
19. 一數被零所除;無窮數.....	37

20.	$0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$, 及 270° 等角之函數	38
21.	角之量度	41
22.	弧制	41
23.	化三角函數爲銳角之函數	47
24.	餘角之函數	47
25.	第二象限內角之減角公式	48
26.	第三象限內角之減角公式	52
27.	第四象限內角之減角公式	55
28.	負角函數之化法	58
29.	化任意角函數爲銳角函數之總則	59

第三章 線值定義及圖解

30.	三角函數之線值定義	65
31.	變角之函數變值	67
32.	函數之圖形	71
33.	三角函數之圖形	73
34.	三角函數之週期性	76
35.	用單位圓作三角函數之圖形	77

第四章 應 用

36.	本章之目的;近似值之計算	82
37.	根據直角三角形之習題	84
38.	正弦及餘弦之數值表;補插法	92
39.	正切及餘切之數值表	95
40.	三角問題內常用之名詞	96

41. 斜三角形之解法	102
42. 正弦定律	103
43. 已知兩邊及一對角之疑款	106
44. 正切定律	112
45. 餘弦定律	116
46. 以三角形之邊表其半角之三角函數	120
47. 求斜三角形面積之公式	127
48. 結論	130

第五章 對數之理論及應用

49. 對數在三角學上之需要	131.
50. 對數性質之定理	134
51. 常用對數系	137
52. 定常用對數定位部之規則	139
53. 對數表	141
54. 求一已知數之對數法	142
55. 求與一已知對數相當之數	147
56. 對數在計算上之應用	148
57. 餘對數	151
58. 對數底之變換	154
59. 指數方程式	156
60. 三角函數對數表之用法	158
61. 表II之用法,其已知角或所求角皆以度及分表示者	159
62. 以度及分表示一角時,求其函數之對數法	160

63. 已知一角函數之對數求此角之度及分數.....	162
64. 表 III 之用法,其已知角或所求角以度及度之小 數部份表示者.....	167
65. 對數在解直角三角形上之應用.....	172
66. 對數在解斜三角形上之應用.....	180
67. 應用對數求斜三角形之面積.....	199
68. 陸地面積之測量.....	203
69. 平行航海.....	204
70. 平面航海.....	206
71. 中緯航海.....	208

第六章 三角分析

72. 兩角和及差之函數.....	211
73. 兩角和之正弦及餘弦.....	211
74. 兩角差之正弦及餘弦.....	215
75. 兩角和及差之正切及餘切.....	217
76. 以一角之函數表其二倍角之函數.....	221
77. 倍角之函數.....	222
78. 以半角之函數表其一角之函數.....	225
79. 以一角之餘弦表其半角之函數.....	225
80. 函數之和及差.....	226
81. 三角恆等式.....	231
82. 三角方程式.....	236
83. 解三角方程式之通則.....	237
84. 已知一函數,求其角之通式.....	243

85. 反三角函數.....	246
----------------	-----

第七章 近於 0° 或 90° 之銳角

86. 定理.....	252
87. 近於 0° 及 90° 諸正銳角之函數.....	253
88. 求近於 0° 諸銳角函數之規則.....	254
89. 求近於 90° 諸銳角函數之規則.....	255
90. 求近於 0° 及 90° 諸角函數之對數之規則.....	256

第八章 公式摘要

平面三角學中之公式:

直角三角形.....	266
函數間之基本關係式.....	266
正弦定律.....	266
正切定律.....	266
餘弦定律.....	267
以三角形之邊表其半角之函數.....	267
三角形之面積.....	267
兩角和及差之函數.....	267
二倍角之函數.....	268
以半角之函數表其一角之函數.....	268
半角之函數.....	268
函數之和及差.....	269

索引.....	270
---------	-----

[附 錄] 四 位 數 值 表

表 I

自然數之對數.....	頁數 1—5
求近於 0° 及 90° 諸角三角函數之對數之規則.....	6

表 II

三角函數之對數,其角度以度及分數表示者.....	7—16
角量變化表.....	17

表 III

三角函數之對數,其角度以度及度之小數部份表 示者.....	19—37
----------------------------------	-------

表 IV

正弦及餘弦之自然值.....	40—41
----------------	-------

表 V

正切及餘切之自然值.....	42—43
----------------	-------

第一章 三角函數

1. 三角學. 在三角學中,吾人所研究之數量,常稱之爲三角函數(trigonometric functions),本章之目的,即在說明此等函數之定義,及其初步應用之方法.

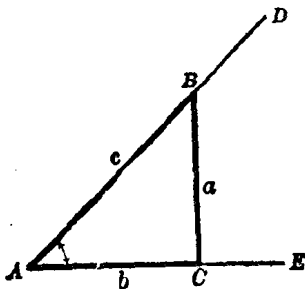
2. 變數;常數. 問題中所含有之數量,非爲變數,即屬常數,吾人對於此二種數量之意義,必須得一明晰之區別,變數(variable)者,可視之爲無限個多之數量,在問題中可代表任何數值,通常以英文字母之末尾數字,如 x, y, z 等表示之.

常數(constant)之值,在一個問題中,固定不變,數值常數或絕對常數(numerical or absolute constants),在任何習題中,其所表之值常屬一定,如 $2, 5, \sqrt{7}, \pi$ 等,此等常數,恆以英文之首數字母,如 a, b, c 等表示之.

3. 函數. 變數之函數者,其數值恆隨此變數之值而改變,正方形之面積,爲其一邊長度之函數;球形之體積,爲其直徑之函數,同理,三項式 $x^2 - 7x - 6$, 亦爲 x 之函數,因此一三項式之數值,須視 x 之值而定,在三角函數中,其變數即爲角之度量,因此等函數之值,常隨其所設角之大小而定也,目前,吾人暫以度制表示角之大小;以後,再討論角之第二種量度法.

4. 銳角之三角函數. 兩線間交角之概念,諒讀者已熟習之矣,此與初等平面幾何學中所示者,其意義相同,本節吾人即就銳角而論列之.

設令 EAD 爲小於 90° 之角,此即爲一銳角,自此角之一邊上,任取一點 B ,向其他一邊作一垂線,即成一直角三角形,如 ABC . 在此三角形中,以英文之大寫字母 A, B, C 表各角之度量,以小寫字母 a, b, c 表其相對邊之長度*. 吾人在幾何學中,已習知此一三角形之邊與角均有相互之關係,三角學之發軔,即在研究此項邊角關係之準確性,並使用邊之比值以達此目的,此等邊之比值,即稱爲三角函數,茲將任一銳角如 A 之六個三角函數舉之如下:



$\sin A$, 讀作 “ A 之正弦”;

$\cos A$, 讀作 “ A 之餘弦”;

$\tan A$, 讀作 “ A 之正切”;

$\csc A$, 讀作 “ A 之餘割”;

$\sec A$, 讀作 “ A 之正割”;

$\cot A$, 讀作 “ A 之餘切”。

此等三角函數(比值)之定義,可述之如下(參閱上圖):

$$(1) \sin A = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}} (= \frac{a}{c}); \quad (4) \csc A = \frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}} (= \frac{c}{a});$$

$$(2) \cos A = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}} (= \frac{b}{c}); \quad (5) \sec A = \frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}} (= \frac{c}{b});$$

$$(3) \tan A = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}} (= \frac{a}{b}); \quad (6) \cot A = \frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}} (= \frac{b}{a}).$$

在上述之定義中,有一顯而易見而又極重要之事項,即上列任一函數之數值,祇視 A 角之大小而定,與垂線之端點

*除特別情形外,普通恆以小寫字母 c 表直角三角形之斜邊,以大寫字母 C 表直角。

B 之位置無關。

令 B' 爲 AD 上之其他任一點，而 B'' 爲 AE 上之任一點，作 $B'C'$ 及 $B''C''$ 各垂直於 AE 及 AD ，則此三個三角形 ABC , $AB'C'$, $AB''C''$ ，因皆含有一直角及一公共角 A ，故均爲互等角三角形而相似，且有相似比

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'} = \frac{B''C''}{AB''}.$$

上列諸比式，均爲“ A 之正弦”。吾人可由同法證明其他諸函數亦有此相同之性質，由此可知三角函數與直角三角形之大小無關，蓋三角函數之意義，乃各邊相對長度之比值，故各邊之真實長度，並不視爲重要。

惟讀者所宜注意者，即以上六個比值中之每一數值，均隨 A 角之數量而更變。

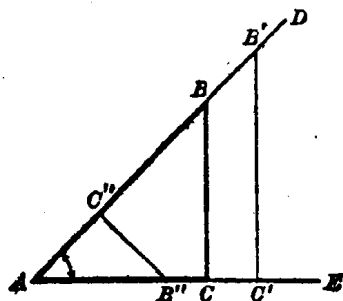
以上所述之六個三角函數（比值），實爲研究三角學之重要基礎，讀者於上述六個函數之定義，若不徹底了解，而欲作進一步之探討，實不可能，然苟能注意第一縱行之三函數各爲第二縱行三函數之逆數，則記憶亦甚簡易，因

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{1}{\csc A}; \quad \csc A = \frac{c}{a} = \frac{1}{\frac{a}{c}} = \frac{1}{\sin A};$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{1}{\frac{c}{b}} = \frac{1}{\sec A}; \quad \sec A = \frac{c}{b} = \frac{1}{\frac{b}{c}} = \frac{1}{\cos A};$$

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{\cot A}; \quad \cot A = \frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{\tan A}.$$

若應用定義(1)至(6)於上圖之銳角 B 上，則對邊 $= AC =$



b , 鄰邊 $= BC = a$. 故

$$\sin B = \frac{b}{c};$$

$$\csc B = \frac{c}{b};$$

$$\cos B = \frac{a}{c};$$

$$\sec B = \frac{c}{a};$$

$$\tan B = \frac{b}{a};$$

$$\cot B = \frac{a}{b}.$$

設與 A 角之諸函數比較之, 可知

$$\sin A = \cos B;$$

$$\csc A = \sec B;$$

$$\cos A = \sin B;$$

$$\sec A = \csc B;$$

$$\tan A = \cot B;$$

$$\cot A = \tan B.$$

因 $A + B = 90^\circ$ (此即 A 與 B 互為餘角), 故上列之結果, 可簡述之如下:

定理. 一銳角之函數等於其餘角之餘函數* (co-function.)

上述定理可錄之如下:

$$\sin A = \cos(90^\circ - A);$$

$$\csc A = \sec(90^\circ - A);$$

$$\cos A = \sin(90^\circ - A);$$

$$\sec A = \csc(90^\circ - A);$$

$$\tan A = \cot(90^\circ - A);$$

$$\cot A = \tan(90^\circ - A).$$

例 1. 一直角三角形 $a=3$, $b=4$; 試計算 A 角之諸函數.

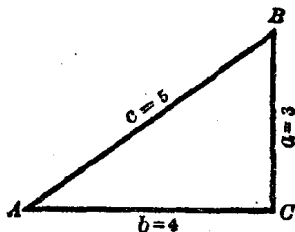
解. $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$

應用公式 (1) 至 (6),

$$\sin A = \frac{3}{5}; \quad \csc A = \frac{5}{3};$$

$$\cos A = \frac{4}{5}; \quad \sec A = \frac{5}{4};$$

$$\tan A = \frac{3}{4}; \quad \cot A = \frac{4}{3}.$$



*正弦與餘弦謂之互為餘函數. 同理, 正切與餘切以及正割與餘割, 亦均互為餘函數.

試再求 B 角之諸函數,並比較其結果.

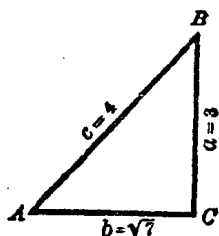
例 2. 一直角三角形 $a=3$, $c=4$; 試計算 B 角之諸函數.

解. $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$.

$$\sin B = \frac{\sqrt{7}}{4} = 0.66; \quad \csc B = \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7} = 1.51;$$

$$\cos B = \frac{3}{4} = 0.75; \quad \sec B = \frac{4}{3} = 1.33;$$

$$\tan B = \frac{\sqrt{7}}{3} = 0.88; \quad \cot B = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7} = 1.14.$$



試再求 A 角之諸函數,並比較其結果.

例 3. 一直角三角形中, $a=2mn$, $b=m^2-n^2$; 試計算 A 角之諸函數.

解. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

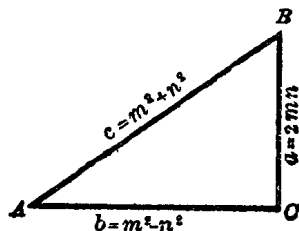
$$= \sqrt{4m^2n^2 + m^4 - 2m^2n^2 + n^4}$$

$$= \sqrt{m^4 + 2m^2n^2 + n^4} = m^2 + n^2.$$

$$\sin A = \frac{2mn}{m^2 + n^2}; \quad \csc A = \frac{m^2 + n^2}{2mn};$$

$$\cos A = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}; \quad \sec A = \frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2};$$

$$\tan A = \frac{2mn}{m^2 - n^2}; \quad \cot A = \frac{m^2 - n^2}{2mn}.$$



例 4. 設一直角三角形中, $\sin A = \frac{4}{5}$, $a=80$; 試求 c .

解. 由公式 (1) 知

$$\sin A = \frac{a}{c}.$$

以 $\sin A$ 及 a 之值代入, 則得

$$\frac{4}{5} = \frac{80}{c};$$

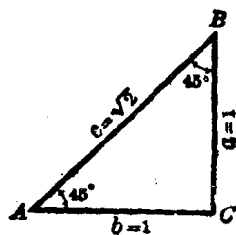
解之, $c=100$. (答).

5. $45^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ 之函數. 用三角法解習題時, $45^\circ, 30^\circ$, 及 60° 之角為最常遇到, 故必須求得此等角度之三角函數值而熟

記之。

a. 求 45° 角之諸函數。作一等腰直角三角形，如 ABC ，則

$$\angle A = \angle B = 45^\circ,$$



吾人已知三角函數為三角形中各邊相對長度之比值，對於各邊之真實長度並不重要，故可以任何長度假設此等腰直角三角形之各邊，愈簡愈妙。

設令其短邊之長度為單位長，即令 $a=1, b=1$ 。

則 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$ ，因此

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \csc 45^\circ = \sqrt{2};$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sec 45^\circ = \sqrt{2};$$

$$\tan 45^\circ = 1; \quad \cot 45^\circ = 1.$$

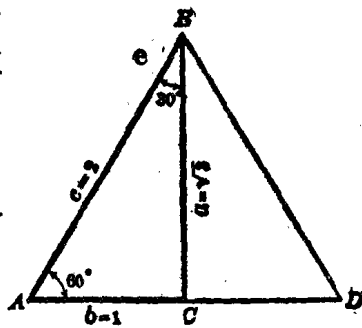
b. 求 30° 及 60° 角之諸函數。作一等邊三角形 ABD ，自 B 作 BC 垂直 AD ，則在三角形 ABC 中，

$$\angle A = 60^\circ, \quad \angle ABC = 30^\circ.$$

仍令其最短邊為單位長，即令

$$b=1. \quad \text{則 } c=AB=AD=2AC=2b=2,$$

$$\text{又 } a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}.$$



$$\text{故 } \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}; \quad \sec 60^\circ = 2;$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}; \quad \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

同理，在同三角形中，

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\csc 30^\circ = 2;$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \cot 30^\circ = \sqrt{3}.$$

茲將此等結果列表如下：*

角	$\sin$	$\cos$	$\tan$	$\cot$	$\sec$	$\csc$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

讀者須熟習此 45° 直角三角形及 30° , 60° 直角三角形之諸函數。但此等函數亦毋須強記，吾人可於直角三角形之圖形中直接求得之。

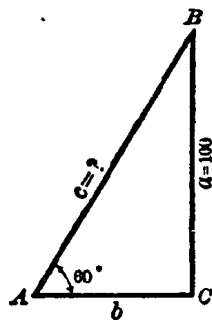
例。設一直角三角形之 $A=60^\circ$, $a=100$; 試求 c 。

解。因 A 角為已知，故 A 之任一函數亦為已知。 A 角之餘割中，含有一已知之 a ，及一所求之 c ，吾人即可應用此餘割之公式而求得 c 之值。

$$\csc A = \frac{c}{a}$$

第 2 頁公式 (4)

以 $a=100$ ，及上表中之 $\csc A = \csc 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$



*為便於記憶起見，可視第一縱行(或 $\sin$ 縱行)之各數 $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ，各為 2 所除。

第二縱行(或 $\cos$ 縱行)之各數與第一縱行各數之順序適相反。

第三縱行(或 $\tan$ 縱行)之各數，可視為以第二縱行各數除第一縱行各數而得。

代入,則得

$$c = \frac{200\sqrt{3}}{3} = 115.5. \quad (\text{答}).$$

B 角之值爲何?試依照上例之方法解之,得知 $b=57.7$.

習 題

下列各習題,均限爲直角三角形,所給之答案概以正弦,餘弦,及正切爲序.

1. 已知 $a=8$, $b=15$; 試求 A 角之諸函數.

答. $\sin A = \frac{8}{17}$, $\cos A = \frac{15}{17}$, $\tan A = \frac{8}{15}$, 等.

2. 已知 $b=5$, $c=13$; 試求 B 角之諸函數.

3. 已知 $a=0.6$, $b=0.8$, 試求 B 角之諸函數.

答. $\sin B=0.8$, $\cos B=0.6$, $\tan B=1.3$, 等.

4. 已知 $b=2$, $c=\sqrt{11}$; 試求 A 角之諸函數.

5. 已知 $a=5$, $c=7$; 試求 B 角之諸函數.

答. $\frac{2\sqrt{6}}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{2\sqrt{6}}{5}$, 等.

6. 已知 $a=p$, $b=q$; 試求 A 角之諸函數.

7. 已知 $a=\sqrt{m^2+mn}$, $c=m+n$; 試求 A 角之諸函數:

答. $\frac{\sqrt{m^2+mn}}{m+n}$, $\frac{\sqrt{mn+n^2}}{m+n}$, $\frac{1}{n}\sqrt{mn}$, 等.

8. 已知 $\sin A = \frac{3}{5}$, $c=200.5$; 求 a .

9. 已知 $\cos A=0.44$, $c=30.5$, 求 b .

答. 13.42.

10. 已知 $\tan A = \frac{11}{3}$, $b = \frac{27}{11}$; 求 c .

11. 已知 $\tan B=k$, $a=r$; 求 c .

答. $r\sqrt{k^2+1}$.

12. 設 $b=2a$, 求 A 角之諸函數.何以答案中不見 a 及 b ?

13. 設一直角三角形斜邊之長爲一腰之三倍,試求對此腰之角之諸函數.何以答案與此腰之真實長度無關?

答. $\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{4}$, 等.

14. 若直角三角形之一腰爲16,其對角之餘切爲 $\frac{3}{4}$,試求他腰之長.

15. 已知 $A=30^\circ, a=25$; 試求 c, B , 及 b .

答. $c=50, B=60^\circ, b=25\sqrt{3}$.

16. 已知 $B=30^\circ, c=48$; 試求 b, A , 及 a .

17. 已知 $B=45^\circ, b=20$; 試求 c, A , 及 a .

答. $c=20\sqrt{2}, A=45^\circ, a=20$.

18. 若直角三角形之一腰爲他腰之 $\sqrt{3}$ 倍;其二銳角當爲若干度?

19. 在一直角三角形中,其斜邊之長,爲其一腰之 $\sqrt{2}$ 倍;此三角形中之二銳角當爲若干度?

答. $45^\circ, 45^\circ$.

20. 若 $\sec B = \frac{2}{3}\sqrt{3}, c=480$; 試求 B, A, a , 及 b .

21. 試求 $\sin^2 A + \cos^2 A$ 之值,若令角 $A=30^\circ; 45^\circ; 60^\circ$. 答. 1.

22. 試證: $\cos 60^\circ = 2 \cos^2 30^\circ - 1$.

23. 試證: $\tan 30^\circ = \frac{\sec 60^\circ}{(\sec 60^\circ + 1) \csc 60^\circ}$.

24. 下列各函數,試以其餘角之函數表之:

a. $\tan 30^\circ$.

d. $\sin 33^\circ 33'$.

b. $\cos 20^\circ$.

e. $\csc 72^\circ 17.4'$.

c. $\sec 81^\circ$.

25. 試證:

$$a. \sin 32^\circ - \cos 58^\circ = 0.$$

$$b. \csc 12^\circ + \sec 78^\circ = 2 \csc 12^\circ = 2 \sec 78^\circ.$$

26. 在直角三角形中,若已知 $\sin 2A = \cos 3A$, 試求銳角 A 及 B .

27. 設欲使 $\tan(30^\circ - x)$ 與 $\cot(30^\circ + 3x)$ 相等,則銳角 x 之值當爲幾何?

6. 作圖;量角器. 初習三角學者,於解習題時,宜作一適合問題而精確之圖形,此不但能使所解之問題更爲清晰,亦足使三角函數之意義更爲明瞭;並藉此可略測所得結果之是否準確.作圖之儀器,僅需一刻度尺及一量角器已足.量角器之用途,即在量度角之大小與測繪一定大小之角度.讀者可購置一明角製之量角器,此量角器最好與刻有英吋及公分之直線尺相連,則使用時較爲便利.

7. 三角函數之數值表. 前於第 5 節中,吾人已求得 30° , 45° , 及 60° 角之諸函數,今將更進一步而計算任意銳角之函數.

茲先將第 11 頁上表 A 之用法解釋於次:表 A 中所載者,爲自 0° 至 90° 各角之三角函數值,其有效數字或爲四位,或爲五位,此等數值,爲欲與三角函數之對數作明晰之區別,故特稱之爲三角函數之自然值 (natural values).

欲檢 0° 與 45° 間任一角之函數,當先在最左之縱行中檢其角度,所欲求之函數,即與此角度在同一橫列,可於該表之頂上(首列)標有該函數名稱之縱行中求得之.如,

$$\sin 15^\circ = 0.2588;$$

$$\cot 41^\circ = 1.1504, \text{ 等.}$$

同法,設欲求 45° 與 90° 間任一角之函數,則當在最右之縱