葛斯密平面三角学

目　次

第一章　三角函數

第二章　基本關係式;減角公式

第三章　線值定義及圖解

第四章　應　用

第五章　對數之理論及應用

第六章 三角分析

第七章 近於0°或90°之銳角

第八章 公式摘要

[附錄] 四位數值表

表 I

表 II

表 III

表 IV

表 V

第一章　三角函數

1. 三角學. 在三角學中,吾人所研究之數量,常稱之為**三角函數**(trigonometric functions).本章之目的,卽在說明此等函數之定義,及其初步應用之方法.

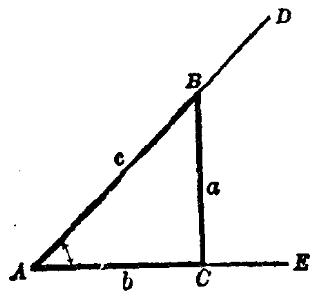
2. 變數;常數. 問題中所含有之數量,非為變數,卽屬常數.吾人對於此二種數量之意義,必須得一明晰之區別.**變數**(variable)者,可視之為無限個多之數量,在問題中可代表任何數值.通常以英文字母之末尾數字,如 x, y, z 等表示之.

常數(constant)之值,在一個問題中,固定不變.**數值常數**或**絕對常數**(numerical or absolute constants),在任何習題中,其所表之值常屬一定,如 2, 5, $\sqrt{7}$, π 等.此等常數,恆以英文之首數字母,如 a, b, c 等表示之.

3. 函數. 變數之**函數**者,其數值恆隨此變數之值而改變.正方形之面積,為其一邊長度之函數;球形之體積,為其直徑之函數.同理,三項式 x^2-7x-6,亦為 x 之函數,因此一三項式之數值,須視 x 之值而定.在三角函數中,其變數卽為角之度量,因此等函數之值,常隨其所設角之大小而定也.目前,吾人暫以度制表示角之大小;以後,再討論角之第二種量度法.

4. 銳角之三角函數. 兩線間交角之概念,諒讀者已熟習之矣;此與初等平面幾何學中所示者,其意義相同.本節吾人卽就銳角而論列之.

設令EAD爲小於90°之角,此即爲一銳角.自此角之一邊上,任取一點B,向其他一邊作一垂線,即成一直角三角形,如ABC.在此三角形中,以英文之大寫字母A, B, C表各角之度量,以小寫字母a, b, c表其相對邊之長度*.吾人在幾何學中,已習知此一三角形之邊與角均有相互之關係.三角學之發軔,即在研究此項邊角關係之準確性,並使用邊之比值以達此目的.此等邊之比值,即稱爲**三角函數**.茲將任一銳角如A之六個三角函數舉之如下:



$\sin A$, 讀作 "A之正弦";

$\cos A$, 讀作 "A之餘弦";

$\tan A$, 讀作 "A之正切";

$\csc A$, 讀作 "A之餘割";

$\sec A$, 讀作 "A之正割";

$\cot A$, 讀作 "A之餘切".

此等三角函數(比值)之定義,可述之如下(參閱上圖):

(1) $\sin A = \dfrac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}\left(=\dfrac{a}{c}\right)$; (4) $\csc A = \dfrac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}\left(=\dfrac{c}{a}\right)$;

(2) $\cos A = \dfrac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}\left(=\dfrac{b}{c}\right)$; (5) $\sec A = \dfrac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}\left(=\dfrac{c}{b}\right)$;

(3) $\tan A = \dfrac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}\left(=\dfrac{a}{b}\right)$; (6) $\cot A = \dfrac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}\left(=\dfrac{b}{a}\right)$.

在上述之定義中,有一顯而易見而又極重要之事項;即上列任一函數之數值,祇視A角之大小而定,與垂線之端點

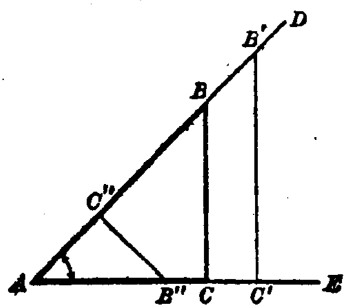
*除特別情形外,普通恆以小寫字母c表直角三角形之斜邊,以大寫字母C表直角.

B 之位置無關.

令 B' 爲 AD 上之其他任一點,而 B'' 爲 AE 上之任一點.作 $B'C'$ 及 $B''C''$ 各垂直於 AE 及 AD.則此三個三角形 $ABC, AB'C', AB''C''$, 因皆含有一直角及一公共角 A, 故均爲互等角三角形而相似,且有相似比

$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}.$$

上列諸比式,均爲"A 之正弦".吾人可由同法證明其他諸函數亦有此相同之性質.由此可知三角函數與直角三角形之大小無關,蓋三角函數之意義,乃各邊相對長度之比值,故各邊之眞實長度,並不視爲重要.



惟讀者所宜注意者,即以上六個比值中之每一數值,均隨 A 角之數量而更變.

以上所述之六個三角函數 (比值), 實爲研究三角學之重要基礎.讀者於上述六個函數之定義,若不徹底了解,而欲作進一步之探討,實不可能.然苟能注意第一縱行之三函數各爲第二縱行三函數之逆數,則記憶亦甚簡易.因

$$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{1}{\dfrac{c}{a}}=\frac{1}{\csc A};\qquad \csc A=\frac{c}{a}=\frac{1}{\dfrac{a}{c}}=\frac{1}{\sin A};$$

$$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{1}{\dfrac{c}{b}}=\frac{1}{\sec A};\qquad \sec A=\frac{c}{b}=\frac{1}{\dfrac{b}{c}}=\frac{1}{\cos A};$$

$$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{1}{\dfrac{b}{a}}=\frac{1}{\cot A};\qquad \cot A=\frac{b}{a}=\frac{1}{\dfrac{a}{b}}=\frac{1}{\tan A}.$$

若應用定義(1)至(6)於上圖之銳角 B 上,則對邊 $=AC=$

b, 鄰邊 $=BC=a$. 故

$$\sin B=\frac{b}{c};\qquad \csc B=\frac{c}{b};$$

$$\cos B=\frac{a}{c};\qquad \sec B=\frac{c}{a};$$

$$\tan B=\frac{b}{a};\qquad \cot B=\frac{a}{b}.$$

設與 A 角之諸函數比較之,可知

$$\sin A=\cos B;\qquad \csc A=\sec B;$$

$$\cos A=\sin B;\qquad \sec A=\csc B;$$

$$\tan A=\cot B;\qquad \cot A=\tan B.$$

因 $A+B=90°$ (此卽 A 與 B 互爲餘角), 故上列之結果,可簡述之如下:

定理. 一銳角之函數等於其餘角之餘函數* (co-function.)

上述定理可錄之如下:

$$\sin A=\cos(90°-A);\qquad \csc A=\sec(90°-A);$$

$$\cos A=\sin(90°-A);\qquad \sec A=\csc(90°-A);$$

$$\tan A=\cot(90°-A);\qquad \cot A=\tan(90°-A).$$

例 1. 一直角三角形 $a=3$, $b=4$; 試計算 A 角之諸函數.

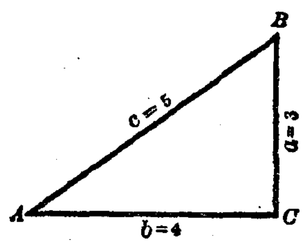
解. $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$

應用公式 (1) 至 (6),

$$\sin A=\frac{3}{5};\qquad \csc A=\frac{5}{3};$$

$$\cos A=\frac{4}{5};\qquad \sec A=\frac{5}{4};$$

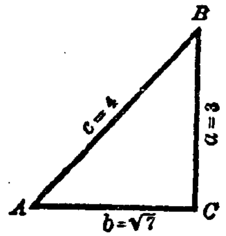
$$\tan A=\frac{3}{4};\qquad \cot A=\frac{4}{3}.$$



*正弦與餘弦謂之互爲餘函數.同理,正切與餘切以及正割與餘割,亦均互爲餘函數.

試再求 B 角之諸函數,並比較其結果.

例 2.　一直角三角形 $a=3$, $c=4$; 試計算 B 角之諸函數.



解. $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$.

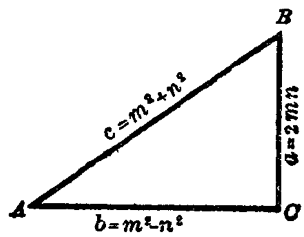
$\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}=0.66$;　$\csc B=\frac{4}{\sqrt{7}}=\frac{4\sqrt{7}}{7}=1.51$;

$\cos B=\frac{3}{4}=0.75$;　$\sec B=\frac{4}{3}=1.33$;

$\tan B=\frac{\sqrt{7}}{3}=0.88$;　$\cot B=\frac{3}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{7}=1.14$.

試再求 A 角之諸函數,並比較其結果.

例 3.　一直角三角形中, $a=2mn$, $b=m^2-n^2$; 試計算 A 角之諸函數.



解.　$c=\sqrt{a^2+b^2}$

$=\sqrt{4m^2n^2+m^4-2m^2n^2+n^4}$

$=\sqrt{m^4+2m^2n^2+n^4}=m^2+n^2$.

$\sin A=\frac{2mn}{m^2+n^2}$;　$\csc A=\frac{m^2+n^2}{2mn}$;

$\cos A=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$;　$\sec A=\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$;

$\tan A=\frac{2mn}{m^2-n^2}$;　$\cot A=\frac{m^2-n^2}{2mn}$.

例 4.　設一直角三角形中, $\sin A=\frac{4}{5}$, $a=80$; 試求 c.

解.　由公式 (1) 知

$$\sin A=\frac{a}{c}.$$

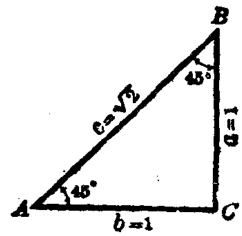
以 $\sin A$ 及 a 之值代入,則得

$$\frac{4}{5}=\frac{80}{c};$$

解之,　　$c=100$.　(答).

5. 45°, 30°, 60° 之函數.　用三角法解習題時, 45°, 30°, 及 60° 之角爲最常遇到,故必須求得此等角度之三角函數值而熟

記之.



a. **求45°角之諸函數.** 作一等腰直角三角形,如 ABC.則

$$\angle A=\angle B=45^\circ.$$

吾人已知三角函數爲三角形中各邊相對長度之比值,對於各邊之眞實長度並不重要.故可以任何長度假設此等腰直角三角形之各邊,愈簡愈妙.

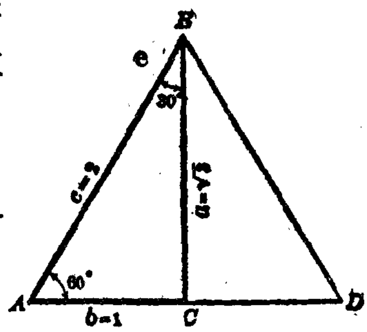
設令其短邊之長度爲單位長,即令 $a=1,\ b=1$.

則　$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$, 因此

$$\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};\qquad \csc 45^\circ=\sqrt{2};$$

$$\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};\qquad \sec 45^\circ=\sqrt{2};$$

$$\tan 45^\circ=1;\qquad \cot 45^\circ=1.$$



b. **求30°及60°角之諸函數.** 作一等邊三角形 ABD.自 B 作 BC 垂直 AD,則在三角形 ABC 中,

$$\angle A=60^\circ,\qquad \angle ABC=30^\circ.$$

仍令其最短邊爲單位長,即令 $b=1$. 則 $c=AB=AD=2AC=2b=2$,

又　$a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$.

故

$$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2};\qquad \csc 60^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$\cos 60^\circ=\frac{1}{2};\qquad \sec 60^\circ=2;$$

$$\tan 60^\circ=\sqrt{3};\qquad \cot 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

同理,在同三角形中,

$$\sin 30^\circ=\frac{1}{2};\qquad \csc 30^\circ=2;$$

$$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2};\qquad \sec 30^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3};\qquad \cot 30^\circ=\sqrt{3}.$$

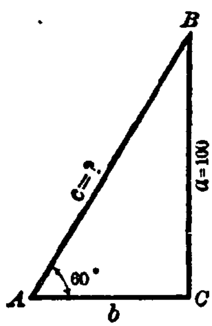
茲將此等結果列表如下:*

角	sin	cos	tan	cot	sec	csc
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

讀者須熟習此45°直角三角形及30°, 60°直角三角形之諸函數. 但此等函數亦毋須強記,吾人可於直角三角形之圖形中直接求得之.

例. 設一直角三角形之 $A=60^\circ$, $a=100$; 試求 c.

解. 因 A 角爲已知,故 A 之任一函數亦爲已知. A 角之餘割中,含有一已知之 a, 及一所求之 c, 吾人即可應用此餘割之公式而求得 c 之值.



$\csc A=\frac{c}{a}$. 第2頁公式(4)

以 $a=100$, 及上表中之 $\csc A=\csc 60^\circ=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

*爲便於記憶起見,可視第一縱行(或 sin 縱行)之各數 $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 各爲2所除.

第二縱行(或 cos 縱行)之各數與第一縱行各數之順序適相反.

第三縱行(或 tan 縱行)之各數,可視爲以第二縱行各數除第一縱行各數而得.

代入,則得

$$c=\frac{200\sqrt{3}}{3}=115.5. \quad (答).$$

B 角之值爲何?試依照上例之方法解之,得知 $b=57.7$.

習 題

下列各習題,均限爲直角三角形.所給之答案概以正弦,餘弦,及正切爲序.

1. 已知 $a=8$, $b=15$; 試求 A 角之諸函數.

答. $\sin A=\frac{8}{17}$, $\cos A=\frac{15}{17}$, $\tan A=\frac{8}{15}$, 等.

2. 已知 $b=5$, $c=13$; 試求 B 角之諸函數.

3. 已知 $a=0.6$, $b=0.8$, 試求 B 角之諸函數.

答. $\sin B=0.8$, $\cos B=0.6$, $\tan B=1.3$, 等.

4. 已知 $b=2$, $c=\sqrt{11}$; 試求 A 角之諸函數.

5. 已知 $a=5$, $c=7$; 試求 B 角之諸函數.

答. $\frac{2\sqrt{6}}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{2\sqrt{6}}{5}$, 等.

6. 已知 $a=p$, $b=q$; 試求 A 角之諸函數.

7. 已知 $a=\sqrt{m^2+mn}$, $c=m+n$; 試求 A 角之諸函數:

答. $\frac{\sqrt{m^2+mn}}{m+n}$, $\frac{\sqrt{mn+n^2}}{m+n}$, $\frac{1}{n}\sqrt{mn}$, 等.

8. 已知 $\sin A=\frac{3}{5}$, $c=200.5$; 求 a.

9. 已知 $\cos A=0.44$, $c=30.5$, 求 b. 答. 13.42.

10. 已知 $\tan A=\frac{11}{3}$, $b=\frac{27}{11}$; 求 c.

11. 已知 $\tan B=k$, $a=r$; 求 c. 答. $r\sqrt{k^2+1}$.

12. 設 $b=2a$, 求 A 角之諸函數.何以答案中不見 a 及 b?

13. 設一直角三角形斜邊之長爲一腰之三倍,試求對此腰之角之諸函數.何以答案與此腰之眞實長度無關?

答. $\frac{1}{3}$, $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\frac{\sqrt{2}}{4}$, 等.

14. 若直角三角形之一腰爲16,其對角之餘切爲$\frac{3}{4}$,試求他腰之長.

15. 已知 $A=30°$, $a=25$; 試求 c, B, 及 b.

答. $c=50$, $B=60°$, $b=25\sqrt{3}$.

16. 已知 $B=30°$, $c=48$; 試求 b, A, 及 a.

17. 已知 $B=45°$, $b=20$; 試求 c, A, 及 a.

答. $c=20\sqrt{2}$, $A=45°$, $a=20$.

18. 若直角三角形之一腰爲他腰之 $\sqrt{3}$ 倍;其二銳角當爲若干度?

19. 在一直角三角形中,其斜邊之長,爲其一腰之 $\sqrt{2}$ 倍;此三角形中之二銳角當爲若干度?　答. $45°$, $45°$.

20. 若 $\sec B=\frac{2}{3}\sqrt{3}$, $c=480$; 試求 B, A, a, 及 b.

21. 試求 $\sin^2 A+\cos^2 A$ 之值,若令角 $A=30°$; $45°$; $60°$.　答. 1.

22. 試證: $\cos 60°=2\cos^2 30°-1$.

23. 試證: $\tan 30°=\frac{\sec 60°}{(\sec 60°+1)\csc 60°}$.

24. 下列各函數,試以其餘角之函數表之:

a. $\tan 30°$.　**d.** $\sin 33°33'$.

b. $\cos 20°$.　**e.** $\csc 72°17.4'$.

c. $\sec 81°$.

25. 試證:

a. $\sin 32°-\cos 58°=0$.

b. $\csc 12°+\sec 78°=2\csc 12°=2\sec 78°$.

26. 在直角三角形中,若已知 $\sin 2A=\cos 3A$,試求銳角 A 及 B.

27. 設欲使 $\tan(30°-x)$ 與 $\cot(30°+3x)$ 相等,則銳角 x 之値當爲幾何?

6. 作圖;量角器. 初習三角學者,於解習題時,宜作一適合問題而精確之圖形.此不但能使所解之問題更爲清晰,亦足使三角函數之意義更爲明瞭;並藉此可略測所得結果之是否準確.作圖之儀器,僅需一刻度尺及一量角器已足.量角器之用途,即在量度角之大小與測繪一定大小之角度.讀者可購置一明角製之量角器.此量角器最好與刻有英吋及公分之直線尺相連,則使用時較爲便利.

7. 三角函數之數值表. 前於第 5 節中,吾人已求得30°, 45°, 及 60° 角之諸函數.今將更進一步而計算任意銳角之函數.

茲先將第11頁上表 A 之用法解釋於次:表 A 中所載者,爲自 0° 至 90°各角之三角函數値,其有效數字或爲四位,或爲五位.此等數値,爲欲與**三角函數之對數**作明晰之區別,故特稱之爲**三角函數之自然値** (natural values).

欲檢 0° 與 45°間任一角之函數,當先在最左之縱行中檢其角度,所欲求之函數,即與此角度在同一橫列,可於該表之頂上(首列)標有該函數名稱之縱行中求得之.如,

$$\sin 15°=0.2588;$$

$$\cot 41°=1.1504, \text{等.}$$

同法,設欲求 45°與 90°間任一角之函數,則當在最右之縱