管理博弈论习题解析

QUESTIONS AND ANSWERS OF MANAGERIAL GAME THEORY

李存金　侯光明／编著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

管理博弈论

习题解析

管理博弈论习题解析

QUESTIONS AND ANSWERS OF MANAGERIAL GAME THEORY

李存金　侯光明／编著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书是《管理博弈论》（北京理工大学出版社，2005 年）一书的配套习题及解答。全书共收录 122 道习题，选题类型丰富，解析详尽，内容包括合作博弈论、非合作博弈论、非对称信息博弈论、管理激励与约束机制四大部分。本书可作为管理与经济类博士研究生、硕士研究生学习管理博弈论的习题训练教材，相信它对大家理解管理博弈论的基本原理和方法会具有很好的启迪作用。同时，对学习和研究博弈论、管理博弈论的管理学者和其他读者，也不失为一本有益的参考书籍。

图书在版编目（CIP）数据

管理博弈论习题解析/李存金，侯光明编著. —北京：北京理工大学出版社，2006. 11

ISBN 7 - 5640 - 0885 - 7

Ⅰ. 管… Ⅱ. ①李… ②侯… Ⅲ. 对策论 - 应用 - 管理学 - 高等学校 - 解题 Ⅳ. C931. 1 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 109491 号

出版发行/ 北京理工大学出版社
社 址/ 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮 编/ 100081
电 话/（010）68914775（办公室） 68944990（批销中心） 68911084（读者服务部）
网 址/ http:// www. bitpress. com. cn
经 销/ 全国各地新华书店
印 刷/ 北京地质印刷厂
开 本/ 787 毫米 × 1092 毫米 1/16
印 张/ 11
字 数/ 251 千字
版 次/ 2006 年 11 月第 1 版 2006 年 11 月第 1 次印刷
印 数/ 1 ~ 4000 册 责任校对/ 郑兴玉
定 价/ 26. 00 元 责任印制/ 吴皓云

序　言

博弈思想古来有之，它是人类智慧的结晶。我国古代的哲学思想、军事谋略、经商之道、对抗性游戏中处处充满了博弈的思想。著名军事家孙子的“知己知彼，百战不殆”是家喻户晓的军事名言，其实质就是对军事对抗局势的一种博弈理解。因为只有知道了敌我双方的状况，才能正确运用谋略，才有可能以少胜多，以弱胜强，以奇取胜。

博弈强调决策主体各方策略的相互依存性，即任何一个决策主体必须在考虑其他局中人可能的策略选择基础上来确定自己的最优行动策略。1944年冯·诺依曼（John Von Neumann）和奥斯卡·摩根斯坦（Oskar Morgenstern）合著的《博弈论与经济行为》一书出版，标志着博弈论的正式诞生，而约翰·纳什（John Nash）对非合作博弈问题的开创性研究及一大批博弈论研究先驱们的重要研究成果奠定了博弈论的理论基础。1994年纳什、泽尔腾、海萨尼三人因在非合作博弈论及其经济应用方面的突出贡献而荣获诺贝尔经济学奖，1996年诺贝尔经济学奖则由在博弈论研究方面做出突出贡献的威廉·维克里（Wallima Vicekery）和詹姆斯·莫里斯（James A.Morrees）获得，而2001年，博弈论学者美国教授乔治·阿克尔洛夫（George A. Akerlof）、迈克尔·斯彭斯（Michael Spence）和约瑟夫·斯蒂格利茨（Josaph Stiglitz）因奠定了对充满不对称信息市场进行分析的理论基础荣获诺贝尔经济学奖。令人惊异而又不出所料的是，2005年诺贝尔经济学奖再度授予了博弈论学者——以色列耶路撒冷希伯来大学的罗伯特·奥曼（Robert J. Aumann）和美国马里兰大学的托马斯·谢林（Thomas C. Schelling）。瑞典皇家科学院对两位学者获奖原因的解释是：“通过博弈论分析，促进了人们对冲突和合作的理解。”博弈论就像一棵根深叶茂的参天大树，其研究的深度和应用广度不断扩展，不仅是当代经济学的主流和前沿学科，而且已被广泛应用于社会、经济、政治、军事、工程技术等领域。

在国内，博弈论已成为许多高等院校经济管理类专业研究生的必修课程，众多有识之士正致力于博弈论及其应用的研究工作。管理博弈论作为面向管理实践的理论，是非对称信息博弈论在管理中的应用，对其基本理论与方法的学习理应理论联系实际，但许多人在学习和应用博弈论及管理博弈论的过程中常有困惑之感，迫切需要一些博弈习题解析类书籍帮助其训练思维和巩固知识。

基于这样的现状，几年来，结合管理博弈论的教学工作，我们一直在做着收集、整理、解答管理博弈论有关习题的工作。编写习题集是一项艰苦的工作，而面对博大精深的博弈论，做这样的工作就更为艰辛了。今天，《管理博弈论习题解析》终于可以出版了，欣慰之情真是难于言表，但愿它给读者多一些有益的启迪。

在本书编写过程中我们参阅了大量的国内外相关文献，多数习题解析的原题来源于国内已出版的博弈论类书籍中的习题，我们对其进行了认真的改编和解析。部分习题解析源于对一些论文的整编和对外文资料的编译。在此，我们对参考了其文献的作者表示衷心的谢意。本习题解析是《管理博弈论》的姊妹篇，读者可在阅读、使用本书时参阅《管理博弈论》一书。由于水平有限，一些习题的解析可能还不完美或存在瑕疵，希望读者提出宝贵的批评意见和建议。

作　者

2006年10月

目录 MULU

CONTENTS

第一章　合作博弈论 / 1

第二章　完全信息静态博弈 / 14

第三章　不完全信息静态博弈 / 39

第四章　完全信息动态博弈 / 57

第五章　不完全信息动态博弈 / 89

第六章　道德风险 / 118

第七章　逆向选择 / 130

第八章　信息传递与信息甄别 / 139

第九章　激励与约束机制 / 155

第一章 合作博弈论

1.1 《三国演义》中有一个著名的桃园三结义的故事，请应用合作博弈理论分析三人的合作行为。

解： 合作博弈允许博弈各方通过谈判与沟通的方式树立合作意识，并建立相互间信任、克制和承诺的机制，以实现帕累托最优。

在桃园结义之前，刘备以织席贩履为生，关羽到处流浪，张飞则以杀猪卖肉为业。关羽、张飞身怀绝技，刘备志向远大，但三人却没有施展抱负的机会。直到三人偶然相识，桃园结义才成就以后的一番伟业。应用合作博弈论的观点，可以对桃园结义的合作行为分析如下：

（1）存有共同利益。三人都希望匡扶汉室，成就一番事业，这是合作的前提条件。

（2）必要的信息交流。三人通过畅谈天下大事，发现彼此志趣相投，提出结义。

（3）自愿、平等和互利。三人抱负远大、义气相投，结义完全出自内心，是自愿平等的。三人举事创业，共享成功的荣华富贵，合作是完全互利的。

（4）强制性契约。这里的协议就是“桃园结义”，在那个年代，背信弃义为社会伦理道德所唾弃，他们立下了“不求同年同月同日生，但求同年同月同日死”的誓言，这个经谈判后缔结的契约是具有很强的约束力的。

（5）合作行为的模型化分析。设 d_{01}、d_{02}、d_{03} 分别为刘备织席贩履、关羽到处流浪、张飞杀猪卖肉的效用，d_{h1}、d_{h2}、d_{h3} 分别为三人合作共创大业的预期效用，d_{-h1}、d_{-h2}、d_{-h3} 分别为三人不合作而选择其他发展途径（如投奔曹操、袁绍、公孙赞等）的预期收益。由于

① $d_{h1}>d_{01}$；$d_{h2}>d_{02}$；$d_{h3}>d_{03}$

每个人的合作比不合作强，符合个体理性的要求。

② $(d_{h1}-d_{01})(d_{h2}-d_{02})(d_{h3}-d_{03}) > (d_{-h1}-d_{01})(d_{-h2}-d_{02})(d_{-h3}-d_{03})$

故三人选择合作，进行“桃园结义”是最优的方案。《三国演义》的结局证明了这一点：刘备称王，关羽和张飞拜将封侯。

1.2 如果参与人达成了某种协议，那么理性意味着他们将会同意从博弈中获得最大可能的总支付，称为σ：

$$\sigma=\max_i\max_j(a_{ij}+b_{ij}) \qquad (1-1)$$

作为支付将被分配给参与双方，换句话说，参与人将共同同意使用某些行 i_0 和列 j_0，使得 $a_{i_0j_0}+b_{i_0j_0}=\sigma$。这个一起选择的（$i_0$，$j_0$），被称为是参与人的合作策略。但是，参与人也必须对某些最终支付向量（x^*，y^*）达成协议，使得 $x^*+y^*=\sigma$，作为适当的总支付的分配。

这样的分配可能需要参与双方的附加支付。如果 $x^* > a_{i_0 j_0}$，那么一号参与人将会获得来自二号参与人的差额附加支出 $x^* - a_{i_0 j_0}$。反之，如果 $x^* < a_{i_0 j_0}$，那么二号参与人将会获得来自一号参与人的差额附加支出 $a_{i_0 j_0} - x^*$。

假设现在参与人已经选择了他们各自的威胁策略，即一号参与人的威胁为 p，二号参与人的威胁为 q。并且此时没有达成任何协议，那么一号参与人将会获得 $p^T Aq$，而二号参与人将会获得 $p^T Bq$。则支付向量的结果为，

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}(p,q) = (p^T Aq, p^T Bq) = (D_1, D_2) \qquad (1-2)$$

在 NTU（非可转移效用）可行集合中这被称为是争执点或威胁点。一旦确定了争执点，参与人必须对直线 $x+y=\sigma$ 上的点（x，y）达成协议，因为这一点是合作的解决方案。既然在没有达成协议的情况下只可以获得 D_1、D_2，那么一号参与人将接受不少于 D_1，二号参与人将接受不少于 D_2 的结果。但是一旦争执点已经确定，那么博弈就变成对称性的。参与人将讨论在线上点 $(D_1$，$\sigma - D_1)$ 到点 $(D_2$，$\sigma - D_2)$ 区间内的哪点可以作为合作解决方案。此时，对于矩阵 A 和 B，没有其他的点会继续被考虑。所以，区间的中间点可以命名为：

$$\varphi(\varphi_1, \varphi_2) = \left(\frac{\sigma - D_2 + D_1}{2}, \frac{\sigma - D_1 + D_2}{2}\right) \qquad (1-3)$$

这是自然折中的结果。如果协议被打破，那么双方参与人损失相当。从 D 出发画一条斜率为 45° 的直线，此直线与线 $x+y=\sigma$ 的交点就是中间点 φ，如图 1—1 所示。求该可转移效用（TU）问题的解决方案。

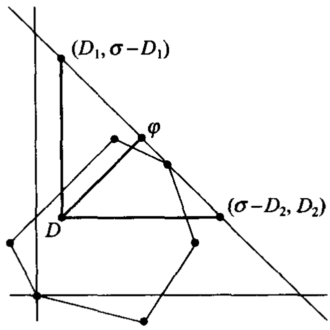


图 1—1

解：依据公式（1—3），我们可以发现参与人应该用于选择威胁点的标准。一号参与人希望取 $D_1 - D_2$ 的最大化值，而二号参与人却希望取 $D_1 - D_2$ 的最小值。事实上，这是一个针对 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 矩阵的二人零和博弈：

$$D_1 - D_2 = p^T \boldsymbol{A} q - p^T \boldsymbol{B} q = p^T(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})q \qquad (1-4)$$

设 p^* 和 q^* 分别表示对于一号和二号参与人在博弈 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 中的最优策略，设 δ 表示差值，则

$$\delta = Val(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) = p^{*T}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})q^* \qquad (1-5)$$

如果一号参与人使用 p^* 作为威胁，那么二号参与人最好使用 q^*，反之亦然。当全部采用这些策略时，争执点就变成为 $D^* = (D^*{}_1, D^*{}_2) = D(p^*, q^*)$。由于 $\delta = p^{*T} \boldsymbol{A} q^* - P^{*T} \boldsymbol{B} q^* = D_1^* - D_2^*$，所以获得的 TU 的解决方案是：

$$\varphi = (\varphi_1^*, \varphi_2^*) = \left(\frac{\sigma + \delta}{2}, \frac{\sigma - \delta}{2}\right) \qquad (1-6)$$

假设参与人决定用（i_0，j_0）作为采用的合作策略，则 $a_{i_0 j_0} + b_{i_0 j_0} = \sigma$。为了获得公式（1—6）中的支付，需要一个从一号参与人到二号参与人的附加支付 $(\sigma + \delta)/2 - a_{i_0 j_0} b_{i_0 j_0}$。如果此数量为负数，则此附加支付是从二号参与人到一号参与人的。

📖 1.3　假设 TU 博弈中的两矩阵差如下所示：

$$\begin{pmatrix} (0,0) & (6,2) & (-1,2) \\ (4,-1) & (3,6) & (5,5) \end{pmatrix}$$

此矩阵来源于图 1—1。但是，我们应该注意到，最优争执点的位置与图中表示的位置略有不同。分析应做出的附加支付决定。

解： $a_{i_0j_0}+b_{i_0j_0}$ 的最大值位于矩阵中第二行第三列的位置上，所以合作策略应该是小于 2 或大于 3，则给出的总支付$\sigma=10$。如果参与人达成了协议，那么一号参与人将会选择第二行，二号参与人将选择第三列，则两个参与人都将获得支付量 5。无论如何，他们都必须对附加支付做出决定。

📖 1.4 考虑二人非零和博弈，其矩阵如下所示：

$$A-B=\begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

分析应做出的附加支付决定。

解： 第一列严格受最后一个数的支配。因此，威胁策略很容易确定为

$$p^*=(0.3,\ 0.7)^T$$
$$q^*=(0,\ 0.3,\ 0.7)^T$$

此博弈的值为 $\delta=Val\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}=19/10$。因此，根据公式（1—6），TU 的值为

$$\varphi^*=[(10-0.9)/2,(10+0.9)/2]=(4.55,\ 5.45)$$

为了根据获准的支付向量（5，5）获得上述的支付，需要有一个从一号参与人到二号参与人的 0.45 的附加支付。

我们还可以利用公式 $D^*=(D^*_1,\ D^*_2)$ 计算出争执点的值。

$$D_1^*=p^{*T}Aq^*=0.3(6\times0.3-0.7)+0.7(3\times0.3+5\times0.7)=3.41$$

$$D_2^*=p^{*T}Aq^*=0.3(2\times0.3+2\times0.7)+0.7(6\times0.3+5\times0.7)=4.31$$

由于 $D_2^*-D_1^*=\varphi_2^*-\varphi_1^*=0.9$，所以我们很容易判定从 D^*到φ^*的直线斜率为 45°。

📖 1.5 具有不可转移效用的合作博弈。

可通过**纳什讨价还价模型**寻找解决不可转移效用（NTU）博弈的方法。此模型的基础是两个基本要素，假设这两个要素用于博弈的参与人。一个要素是在平面上的一个紧密的（也就是说，有边界的、闭合的）凸起集合 S。我们可以把集合 S 看成是参与人可以获得的支付向量的集合，看成是与**不可转移效用（NTU）可行集合对等的集合**，虽然它更像一个较为通用的集合,因为该集合并不必须是一个多面集合。例如，集合可以是一个圆或椭圆。我们把这里所指的集合 S 看成是 **NTU 可行集合**。

纳什讨价还价模型中的另一个要素则是一个点，$(u^*,v^*)\in S$，称为是**威胁点或现状点**。纳什把讨价还价模型看作是两个参与人之间的博弈，且参与人在市场中对商品进行讨价还价。对纳什均衡而言，参与人可以选择不加入任何商务协议，并且他可以很自然地把 $(u^*,v^*)=(0,0)\in S$ 作为现状点。后续的理论定义点（u^*，v^*）应该是集合 S 中的任意一点。

对于给定的一个 NTU 可行集合 S，以及一个威胁点 $(u^*,v^*)\in S$，问题可以被定义为：这个博弈确定一个可行的结果向量，且此向量会在一定程度上反映出对每个参与人博弈的价值。换句话说，我们需要找到一个点，$(\bar{u},\bar{v})=f(S,u^*,v^*)$，此点可以被看作是一个“公平且合理的结果”，或者看作是对于某个任意紧密的凸起集合 S 和点 $(u^*,v^*)\in S$ 的博弈的一个“解决方案”。

设三个顶点（0，0）、（0，1）和（3，0）构成的三角形为 S，威胁点为（0，0），帕累托最优分界线是斜率为 1/3，且经过（0，1）和（3，0）两点的直线。求该 NTU 问题的解决方案。

解：由 $u\cdot v=c$ 构成的曲线与此直线接触的点的斜率必定也为 1/3。所以，经过（0，0）和（$\bar{u},\bar{v}$）两点的直线斜率必定也是 1/3。此直线与帕累托分界线的焦点在中间点（3/2，1/2）上。这也就是 NTU 的解决方案。

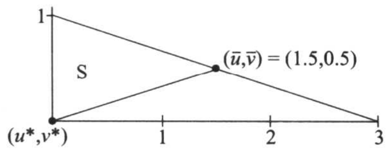


图 1—2

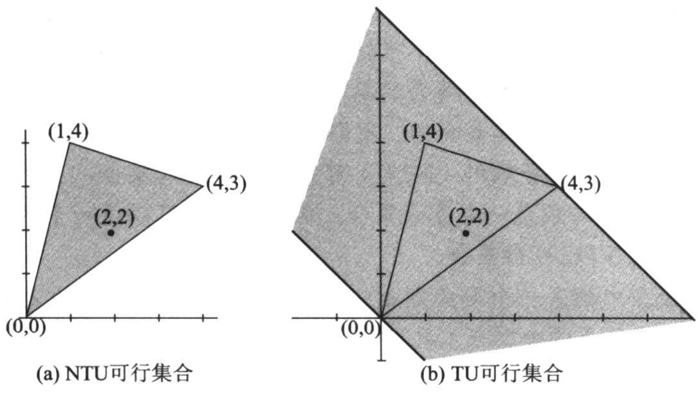
📖 1.6 假设 NTU 可行性集合是一个椭圆形，即 $S=\{(x,y):(x-2)^2+4(y-1)^2\leqslant 8\}$，威胁点为 $(u^*,v^*)=(2,1)$。求该 NTU 问题的解决方案。

解：点（x，y）属于集合 S，作为（x−2）（y−1）乘积的最大值，点（x，y）是 NTU 的解决方案。点（x，y）必定是在帕累托最优边界线上，此分界线是椭圆上从点 $(2, 1+\sqrt{2})$ 到点 $(2+2\sqrt{2}, 1)$ 构成的弧。在弧 $y-1=\sqrt{2}-(x-2)^2/4$ 上，我们在区间 $(2, 2+\sqrt{2})$ 上寻找一个 x，此 x 可以使 $(x-2)(y-1)=(x-2)\sqrt{2-(x-2)^2/4}$ 得到最大值。由此可以引申出表达式 $\sqrt{2-(x-2)^2/4}-(x-2)^2/4\sqrt{2-(x-2)^2/4}$。设此表达式等于 0，则最终化简得到 $(x–2)^2=4$，并求得两个根为 2 ± 2。由于 x 属于区间 $(2, 2+2\sqrt{2})$，所以我们必须满足 $x=4$ 和 $y=2$。因此，博弈的 NTU 的解决方案就是 $(\bar{u},\bar{v})=(4,2)$。

📖 1.7 现有两矩阵博弈如下所示：

$$\begin{pmatrix}(4,3) & (0,0)\\(2,2) & (1,4)\end{pmatrix}\tag{1—7}$$

博弈中有两个策略均衡点，分别是图中左上位和右下位。此博弈的 NTU 可行集合和 TU 可行集合如图 1—3 所示。求该 NTU 问题的解决方案。



(a) NTU可行集合　　(b) TU可行集合

图 1—3

解：那么哪一点可以作为威胁点呢？如果我们采用纳什的观点，两个参与人都可能拒绝加入协议，因此把参与人留在现状点（0，0）上，那么我们就应该把这个非合作策略加入到参与人的纯策略集合中。那么此博弈两矩阵最终的结果如下所示：

$$\begin{pmatrix} (4,3) & (0,0) & (0,0) \\ (2,2) & (1,4) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix} \tag{1-8}$$

此两矩阵具有同样的 NTU 可行集合，如图 1－3（a）所示。我们可以把威胁点定为 $(u^*,v^*)=(0,0)$。帕累托最优分界线是点（1，4）和点（4，3）之间的直线段，且此线段斜率为$-1/3$。然而，从原点出来斜率为 1/3 的直线与此直线段延伸部分的交点在点（4，3）的右侧。这就意味着，$x \cdot y$ 作为点（x，y）在（1，4）和（4，3）两点间的线段上移动。因此，点（4，3）就是 NTU 的解决方案。

1.8 考虑一个三人博弈，参与人为 I、II 和 III，每个参与人有两个纯战略选择及以下的支付向量：

表 1—1 如果 I 选择 1

	III	
II	(0,3,1)	(2,1,1)
	(4,2,3)	(1,0,0)

表 1—2 如果 I 选择 2

	III	
II	(1,0,0)	(1,1,1)
	(0,0,1)	(0,1,1)

写出该博弈的联盟式表述。

解：可以通过计算特征函数 v 来给出该博弈的联盟式表述。我们自然地认为 $v(\phi)=0$，计算 $v(N)$也是比较容易的，找到八个单元格支付和的最大值即可，显然在（2，1）单元格可以计算得到最大支付函数 $v(N)=9$。下面我们来计算 $v(\{1\})$，首先计算 I 和 II、III 对抗情况下的支付矩阵：

第二和第三列是被优超的，所以 $v(\{1\})=Val\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=1/2$。

表 1—3 I 和 II、III 对抗情况下的支付矩阵

		（II，III）			
		（1，1）	（1，2）	（2，1）	（2，2）
I	1	0	2	4	1
	2	1	1	0	0

为了计算 $v(\{2\})$和 $v(\{3\})$，我们通过建立类似的支付矩阵可以计算，比如分别建立 II 和（I，III）对抗的支付矩阵、III 和（I，II）对抗的支付矩阵，可以发现在 II 的支付矩阵里 II 选策略 2，（I，III）选策略（2，1）时是一个鞍点。此时，$v(\{2\})=0$，类似得到 $v(\{3\})=3/4$。

为了计算 $v(\{1，3\})$，我们首先要建立（I，III）对抗 II 的支付矩阵如表 1—4。

表 1—4 I 和 II、III 对抗情况下的支付矩阵

		II	
		1	2
(I，III)	(1，1)	1	7
	(1，2)	3	1
	(2，1)	1	1
	(2，2)	2	1

下面的两行被第 2 行优超，所以 $v(\{1,3\})=Val\begin{pmatrix}1 & 7\\3 & 1\end{pmatrix}=5/2$。类似地，我们可以计算出（I，II）和 III 对抗的支付矩阵，（II，III）和 I 对抗的支付矩阵，这两个矩阵都有鞍点，可以得到 $v(\{1,2\})=3$ 和 $v(\{2,3\})=2$。至此，我们已经完成了为特征函数赋值的工作。

📖 1.9 考虑一个博弈，其特征函数 V 为：

$$v(\phi)=0, v(\{1\})=1, v(\{2\})=0, v(\{3\})=1$$
$$v(\{1,2\})=4, v(\{1,3\})=3, v(\{2,3\})=5, v(\{1,2,3\})=8$$

则归属是由满足下面条件的点集（x_1，x_2，x_3）构成：$x_1+x_2+x_3=8$，且 $x_1\geqslant1$，$x_2\geqslant0$，$x_3\geqslant1$，这个集合是个三角形区域，三个顶点为（7，0，1），（1，6，1）和（1，0，7）。分析该博弈的稳定集。

解：把这个三角形通过**重心坐标**画出来是很有用的。通过画出 $x_1+x_2+x_3=8$ 几何平面图来实现，这个图域的点的坐标和为 8，可以很方便地画出线 $x_1=1$、$x_1+x_2=3$（和 $x_2=5$ 是同一条线）等。这样就可以清楚地看出这个归属的集合是个等边三角形。

我们来考察哪些归属是不稳定的。联盟{2，3}可以保证其获得的支付为 $v(\{2,3\})=5$，所以满足 $x_2+x_3<5$ 的所有点集（x_1，x_2，x_3）都是通过（2，3）不稳定的，在图 1—4 中即为线 $x_2+x_3=5$ 下面的区域。联盟{1，2}可以保证其支付为 $v(\{1,2\})=4$，所有在线 $x_1+x_2=4$ 右下方的区域都是不稳定的。最后联盟{1，3}使得在线 $x_1+x_3=3$ 左下方区域的点集也是不稳定的。这样剩下的区域就是稳定的了，即核，图中的五边形（含边界线）刻画了这一集合。

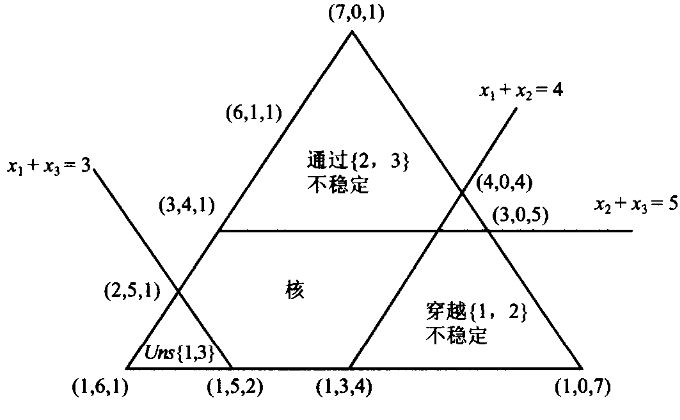


图 1—4 在几何平面区域中 $x_1+x_2+x_3=8$

📖 1.10　一个艺术品对 $i=1,2,3$ 三个人来说价值 a_i 美元，我们假设 $a_1<a_2<a_3$，则这个艺术品对参与人 3 来说价值最大。但现在是参与人 1 拥有这个艺术品，$v(\{1\})=1$，第 2 个人和第 3 个人无可奈何，因此 $v(\{2\})=0$，$v(\{3\})=0$，$v(\{2,3\})=0$。如果参与人 1 和 2 结成联盟，联合价值为 a_2，即 $v(\{1,2\})=a_2$。类似地，$v(\{1,3\})=a_3$，如果三人结盟，$v(N)=3$。现在找出这个博弈的核。

解：这个核由满足下面条件的向量（x_1，x_2，x_3）构成：

$$\begin{cases} x_1 \geqslant a_1, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0 \\ x_1 + x_2 \geqslant a_2 \\ x_1 + x_3 \geqslant a_3 \\ x_2 + x_3 \geqslant 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = a_3 \end{cases}$$

从中我们可以得出 $x_2 = a_3 - x_1 - x_3 \leqslant 0$，且 $x_2 \geqslant 0$，因此 $x_2 = 0$。

进而得到 $x_1 \geqslant a_2$，$x_3 = a_3 - x_1$，这样就得到核 $C=\{(x,0,a_3-x):a_2 \leqslant x \leqslant a_3\}$。

这显示出这件艺术品会被参与人 3 以一个介于 a_2 和 a_3 间的价格购买，参与人 1 获得 x 的支付，而参与人 3 获得这个艺术品减去 x 的支付，参与人 2 在这里没有积极的作用，但没有 2 的参与，参与人 3 就会期望以低于 a_2 的价格购买这件艺术品。

📖 1.11　破产博弈。一个小公司因为欠三个债主的钱而即将破产。该公司欠 A 债主 10 000 美元，欠 B 债主 20 000 美元，欠 C 债主 30 000 美元。如果公司只有 36 000 美元用来偿还债务，那么这笔钱应该如何在债权人之间分配呢？如果按债务比例分配，则 A、B、C 将分别得到 6 000 美元、12 000 美元和 18 000 美元，即归因向量 x =（6，12，18），单位为千元。将这一分配方式和夏普利值以及核仁的分配进行比较。

解：首先，我们必须确定一个特征函数来代表这个博弈。根据特征函数定义，$v(\phi)=0$，$v(ABC)=36$，单位为千元。就单个而言，A 可能什么都得不到，因为另两人的债权足以要求获得所有的钱，因此，我们取 $v(A)=0$。同理，我们取 $v(B)=0$。债主 C 至少可以得到 6 000 美元，因为即便 A、B 要求得到它们所有的欠款，即 30 000 美元，依然会剩余 36 000–30 000 = 6 000 美元给 C。因此，我们取 $v(C)=6$。

为了找到这个博弈的核仁，令 $x=(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 是一个有效的分配（即，让 $x_1+x_2+x_3=36$），然后得出表 1－5 中的超额值。略去了空集以及超额总是为 0 的主要联盟。为了理解此过程，首先考虑按（6，12，18）比例分配的情况。如表 1－5，则超额向量是 e=（–6，–12，–12，–12，–8，–4）。其中最大值为联盟 BC 的对应值–4。它表示任一其他的联盟将比该联盟更有效。于是尝试通过使得 x_2+x_3 更大，来改进这一联盟，或者让 x_1 更小（因为 $x_1=36-x_2-x_3$）。但是随着减少联盟 BC 的剩余，A 的剩余将以同样的比率增长，那么这些剩余将最终在–5 处相遇，此时 x_1=5。明显地，这种情况下没有其他的 x 能使得剩余极值比–5 更小，否则联盟 A 和 BC 中至少会有一个的剩余会超过–5。因此，x_1=5 是核仁的第一个组元。

尽管 x_1 是固定的，我们依然可以在限制条件 $x_2+x_3=36-5=31$ 下变化 x_2，x_3，并试图选择它们适当的值使得下一个超额值更小。如果选择分配 x=(5,12,19)，可以看到–5 之后的下一个超额值是联盟 AC 对应的–8。为了使其更小，必须增加 x_3（减少 x_2）。在此过程中，联盟 B

表 1—5 夏普利值计算

S	$v(S)$	$e(x,S)$	(6,12,18)	(5,12,19)	(5,10.5,20.5)	(6,11,19)
A	0	$-x_1$	−6	−5	−5	−6
B	0	$-x_2$	−12	−12	−10.5	−11
C	6	$6-x_1$	−12	−13	−14.5	−13
AB	6	$6-x_1-x_2$	−12	−11	−9.5	−11
AC	16	$16-x_1-x_3$	−8	−8	−9.5	−9
BC	26	$26-x_2-x_3$	−4	−5	−5	−4

和 AB 的超额将以同样的比率增长。因为联盟 AB 的超额值比较接近−8，最终我们寻找适当的 x_2 和 x_3 使得 $e(x,AB)=e(x,AC)$，这一平衡在 $x_2=10.5$ 和 $x_3=20.5$ 时发生。因此，核仁应该是（5,10.5,20.5）。

把这一方法与夏普利值相比是一件有趣的事。我们可以依据任一计算夏普利值的方法来计算。利用公式，我们得到

$$\phi_A=(1/3)(0)+(1/6)(6)+(1/6)(10)+(1/3)(10)=6$$

$$\phi_B=(1/3)(0)+(1/6)(6)+(1/6)(20)+(1/3)(20)=11$$

$$\phi_C=(1/3)(6)+(1/6)(16)+(1/6)(26)+(1/3)(30)=19$$

表格 1－5 中的最后一列显示了夏普利值计算出来的超额值。

随着公司总剩余资产在 0～60 000 美元之间变化，即随着 $v(N)$ 在 0～60 之间变化，我们会发现核仁与夏普利值的有趣变化。先考虑核仁。如果 $v(N)$ 介于 0～15，核仁将把总额在参与人之间等额分配；在 $v(N)$ 介于 15～25 时，核仁将在 B、C 之间等分 15 以上的超额；而当 $v(N)$ 在 25～35 时，所有超过 25 的超额都归属 C；当 $v(N)$ 在 35～45 时，超过 35 的超额在 B、C 之间瓜分；$v(N)$ 在 45～60 时，45 以上的超额将在三者之间等分。

核仁 $v(N)$ 值介于	0～15	等分
	15～25	B、C 分享
	25～35	C 得到所有
	35～45	B、C 分享
	45～60	等分
夏普利值 $v(N)$ 值介于	0～10	等分
	10～20	B、C 分享
	20～40	C 得 2/3，A、B 各得 1/6
	40～50	B、C 分享
	50～60	等分

注意，当 $v(N)=30$ 时，核仁和夏普利值都正好和按比例分配的方式吻合。与按比例分配方式相比，夏普利值和核仁有个共性，即在 $v(N)$ 较小时，利于较弱的参与人；在 $v(N)$ 较大

时，利于较强的参与人。夏普利值的这一特性甚至更强。

当 $n=3$ 时，问题不难解决，但现实问题往往比破产公司的例子要困难得多。这里解决另外一个问题也许会很有用处。假设：

$$v(\phi)=0 \qquad \begin{array}{lll} v(\{A\})=-1 & v(\{AB\})=3 & \\ v(\{B\})=0 & v(\{AC\})=4 & v(\{ABC\})=5 \\ v(\{C\})=1 & v(\{BC\})=2 & \end{array}$$

A 单独地处于最差的地位，但是在形成联盟的过程中，它将更有价值。夏普利值是 $\phi=(10/6,7/6,13/6)$，下面让我们寻找核仁。

先来试试向量（1,1,3）。在表 1－6 中，我们看到超额极值发生于联盟 AB 处，为了改进它，我们必须降低 x_3。又因为下一个极值在联盟 AC 处，我们保持 x_2 不变（增加 x_1），并选择 $x_3=2$，使得 AB 的极值与 AC 的极值相等。这样将引出分配向量（2,1,2），它的超额极值是 0，发生在联盟 AB 和 AC 的情形下。为了使这个值更小，必须同时降低 x_2 和 x_3，包括增加 x_1，并会增加 BC 的极值。我们将发现，最好的分配发生在当 AB、AC 和 BC 的极值都相等时。解下面的三个方程：

$$x_3-2=x_2-1=x_1-3,\ 且\ x_1+x_2+x_3=5$$

我们得到 $x_3=x_2+1$ 和 $x_1=x_2+2$，使得解为 $x=(8/3,2/3,5/3)$。这就是核仁。

表 1－6　核仁的计算

S	$v(S)$	$e(x,S)$	(1,1,3)	(2,1,2)	(8/3,2/3,5/3)
A	−1	$-1-x_1$	−2	−3	−11/3
B	0	$-x_2$	−1	−1	−2/3
C	1	$1-x_3$	−2	−1	−2/3
AB	3	$3-x_1-x_2=x_3-2$	1	0	−1/3
AC	4	$4-x_1-x_3=x_2-1$	0	0	−1/3
BC	2	$2-x_2-x_3=x_1-3$	−2	−1	−1/3

与夏普利值相比，核仁对参与人 1 更有利。夏普利值给了参与人 1 的 $v(N)$ 的三分之一，而核仁给参与人 1 的 $v(N)$ 的一半多。

1.12　根据 1.9 题的特征函数，求解 S 值。根据夏普利原理形成的一个计算方法是：对于特定的、容易计算的常量 c_s，$v=\sum_{S\subset N}c_s w_s$。如果此函数存在，则有：

$$\phi_i(v)=\sum_{\substack{S\subset N\\ i\in S}}\frac{c_s}{|S|}$$

解：根据 1.9 题的特征函数，有

$v(\{1\})=1$，$v(\{1,2\})=4$；

$v(\phi)=0$，$v(\{2\})=0$，$v(\{1,3\})=3$，$v(\{1,2,3\})=8$；

$v(\{3\})=1$，$v(\{2,3\})=5$。

求得：$c_{\{1\}}=v(\{1\})=1$，$c_{\{2\}}=0$，$c_{\{3\}}=1$。那么，$c_{\{1,2\}}=v(\{1,2\})-c_{\{1\}}-c_{\{2\}}=4-1-0=3$，$c_{\{1,3\}}=3-1-1=1$，$c_{\{2,3\}}=5-0-1=4$。

最后，$c_N = v(N)-c_{\{1,2\}}-c_{\{1,3\}}=-c_{\{2,3\}}-c_{\{1\}}-c_{\{2\}}-c_{\{3\}}= 8-3-1-4-0-1=-2$。$c_{\{1,2\}}=v(\{1,2\})-c_{\{1\}}-c_{\{2\}}=4-1-0=3$。

因此，可以将 v 写成：

$$v=w_{\{1\}}+w_{\{3\}}+3w_{\{1,2\}}+w_{\{1,3\}}+4w_{\{2,3\}}-2w_{\{1,2,3\}}$$

求得

$$\phi_1(v)=1+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=2+\frac{1}{3}$$

$$\phi_2(v)=\frac{4}{2}+\frac{3}{2}-\frac{2}{3}=2+\frac{5}{6}$$

$$\phi_3(v)=1+\frac{4}{2}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=2+\frac{5}{6}$$

S 值是 $\phi=$（14/6，17/6，17/6），这点在核仁处。

📖 1.13　根据夏普利值计算公式 $\phi_i(v)=\sum\limits_{\substack{S\subset N\\ i\subset S}}\frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}[v(S)-v(S-\{i\})]$，重新计算1.12题的 S 值。

解：参与人 1 首先进入的概率是 1/3，支付是 $v(\{1\})=1$；参与人 1 第二次进入并发现参与人 2 已经进入的概率是 1/6，支付值是 $v(\{1,2\})-v(\{2,3\})=4$；参与人 1 第二次进入并发现参与人 3 已经进入的概率是 1/6，支付值是 $v(\{1,3\})-v(\{3\})=3-1=2$；参与人 1 最后进入的概率是 1/6，支付值是 $v(\{1,2,3\})-v(\{2,3\})=8-5=3$；参与人平均支付因此就是 $\phi_1(v)=1\times1/3+4\times1/6+2\times1/6+3\times1/3=14/6$，和我们前面计算的结果相符合。

表 1—7 展示了对于 3 个参与人的一个计算结果，列出了 6 种不同进入顺序和每个参与者的支付。在第一行进入顺序是 1,2,3。参与人 1 得到支付 1，参与人 2 得到 $v(1,2)-v(1)=4-1=3$；最后参与人 3 得到 $v(N)-v(1,2)=8-4=4$。6 行中每一个都是平等计算的，概率为 1/6。S 值是每一列中 6 个数值的平均值。

表 1—7　S 值的计算

进入顺序 \ 参与人	1	2	3	总和
1 2 3	1	3	4	8
1 3 2	1	5	2	8
2 1 3	4	0	4	8
2 3 1	3	0	5	8
3 1 2	2	5	1	8
3 2 1	3	4	1	8
平均值	14/6	17/6	17/6	8