應用偏微分方程式論

犬井鐵郎著

應用偏微分方程式論

犬井鐵郎著

岩波書店

序

本書は筆者が以前に岩波講座物理學の一項目として書いたものを補足擴充したものであつて，物理學及び工學を學ぶ人々を對象としてこれらの分野に用ゐられる偏微分方程式の種々の應用を解說したものである．物理學及び工學の基礎方程式の殆んどすべてが偏微分方程式であるから，偏微分方程式の應用がこの方面の學徒に必要であることは言ふ迄もないが，實際に行はれてゐる取扱を方法論的に眺めると大別して二通りの行き道がある．一つは本書の內容の過半を占めてゐる偏微分方程式そのものの形で取扱ふ方法で，今一つは所謂變數分離の方法により現れる解である特殊超越函數の個々の性質を專ら利用する方法である．本書に於いては特殊超越函數の性質を解說する餘裕は無いので，特別の場合の外は初等函數が現れる問題に限つてこの點を說明した．その代り物理學，工學上の應用面に現れる種々の問題の型については一應漏れ無く觸れてあるから，讀者がこれに超越函數の應用例若干を補つて下されば本書だけで科學者，技術者としての專門書，專門文獻に導く階梯としての役を果し得るものと思ふ．

本書の構成を簡單に述べれば次の通りである．第一篇は所謂重合せの原理の基礎に立ち最も普通に行はれる方法であるが，注意すべきは基礎方程式が線型であることに全く依存してゐることである．第二篇は所謂特有帶の理論に基礎を置くもので直接この制限に縛られてゐない．特有帶の理論による楕圓型，双曲型及び拋物型はそれぞれの型に應ずる取扱が行はれ，これに對し第一篇の方法は直接この型に依存しない代り非線型の困難は宿命的である．特有帶が實の意味を有するのは双曲型に於てであつて，これ

を通じて解の不連續性が現れ得る．これは物理的に種々の波面に對應する．第八章及び補遺の壓縮性流體の取扱は特にこの考へ方に依存する所が多い．重合せの原理による解法は直交函數系による展開に基礎を置き直交函數系は線型微分表式の固有値問題から現れる．この意味で固有値問題は數理物理學の全域に渉る基礎問題である．それは積分方程式論に關聯し更に量子力學理論の發展以來 Hilbert 空間の理論として抽象化され躍進的發展を遂げた．第一篇第七章及び第二篇第九章はこれらの概説である．

校正も終了して後筆者は L. Schwartz の近著：Theorie des distributions を手にすることができた．基礎概念に於て勿論であるが應用の立場から見てもこの書は大きな波紋を學界に惹き起すものであらう．難解のこの書の解説を取り急いで本書に加へることは非力の筆者の及ばぬ所であるが唯默するにも忍びないので本書に關係ある二三の點に關し末尾に一言した．

終りに臨み，舊稿執筆當時多くの貴重な忠言を賜つた山內恭彥，小谷正雄兩博士と，舊稿の不備，新稿の擴充に對し貴重な注意と第二篇第九章の分擔をして下さつた加藤敏夫學士に心から御禮申上げる．

今度の出版に際しては勝手な筆者の希望を常に入れて種々の變更を許して下さつた岩波書店の諸氏の御協力に深謝する次第である．

1951年2月

東京にて　犬井鐵郎

目　次

準　備

變分法,隨伴微分表式,
物理學の基礎方程式

第一章　變分法の概念

§1. 變分原理 Euler の方程式.

解析學の一分科たる變分法の物理學に於ける應用は多いが,原理的に見て,最重要な點は物理學の基礎法則を記述する微分方程式の多くが所謂**變分原理**(variation principle)から導かれることであらう. 尤も,物理學の基礎方程式そのものは,もつと物理的根柢から說明した方が判り易いが,それは物理學として詳しく論ぜられる可き問題で本書の目的とする所でない. 此處ではそれ等の數學的表式を出來るだけ簡捷に求め且その基礎概念を知るための目的で,變分法の概念と方法とをそのために必要な最小限度に於て述べ,基礎方程式の導入に應用しようと思ふ.

今,x の函數 $y(x)$ があり,導函數 $y'(x)$ が存在するものとし,別にそれ等で定まる與へられた表式 $F(x, y, y')$ の區間 (x_0, x_1) についてとつた積分:

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1} F(x;\, y(x),\, y'(x))dx \tag{1·1}$$

に着目しよう. この値は明かに $y(x)$ によるから積分 $J[y]$ と書いた. 與へられた $F(x, y, y')$ につき,兩端での $y(x)$ の値 $y(x_0)$, $y(x_1)$ は不變の値ときめて,この積分の値を極小にするためにはどんな函數 $y(x)$ を選んだらよい

か[1]. この種の問題から所謂變分法と呼ばれる分科が生じた. 要するに一つの極大極小に關する問題だが, 普通微分學で取扱ふ問題の如く函數 $f(x)$ が與へられたとき $f(x)$ の極値となる點を決定するのと違つて, 函數 $y(x)$ そのものを決定するところにより高級な問題であることが理解されるであらう. 上述の積分 $J[y]$ を極小とする y を求める問題に立歸り, 特に函數 F はその引數 x, y, y' のどれに關しても二回連續微分可能[2]で, 又 $y(x)$ はその變數 x に關してこれ亦二回連續微分可能であると假定しよう. これだけの假定を置くと直ぐ次に說明する樣に, 求むる函數 y は Euler の方程式と呼ばれて居る次の微分方程式を滿足せねばならぬことが判る (必要條件):

$$\frac{d}{dx}F_{y'}-F_y=0. \tag{1·2}$$

[證明]. y を求める函數とし, $J[y]$ と他の函數 $\bar{y}$ をとつたときの J の値とを比較しよう. 假定により y は二回連續微分可能としたから比較函數 $\bar{y}$ も同種のものとし, 之が $\bar{y}(x)=y(x)+\varepsilon\eta(x)$ と書けるものとしよう. $\eta(x)$ は二回連續微分可能の任意の函數で, ε は一つのパラメーターである. すると, 積分 $J[\bar{y}]$ は ε の函數 $\Phi(\varepsilon)$ と考へれば, $\varepsilon=0$ のとき極値となるのだから $\Phi'(0)=0$ でなければならぬ. 然るに, ε が十分小さいとき, 上述の假定で $\Phi(\varepsilon)$ は ε につき Taylor の級數に展開して考へればすぐ判る樣に,

$$\Phi(\varepsilon)=\Phi(0)+\varepsilon\int_{x_0}^{x_1}(F_y\eta+F_{y'}\eta')dx+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{x_0}^{x_1}\{\tilde{F}_{yy}\eta^2+2\tilde{F}_{yy'}\eta\eta'+\tilde{F}_{y'y'}\eta'^2\}dx,$$

但し $\tilde{F}_{yy}$ 等は F_{yy} 等の變數 $y(x), y'(x)$ の代りに夫々 $y(x)+\varepsilon\theta\eta(x), y'(x)+\varepsilon\theta\eta'(x)$ $(0<\theta<1)$ としたものを意味する. 從つて,

---

(1) 例へば, $F\equiv\sqrt{1+y'^2}$ の場合には二點 (x_0, y_0), (x_1, y_1) を結ぶ曲線の中で長さの最短なものを求める問題となる.

(2) (Zweimal stetig differenzierbar) 即ち結局, 連續な第二階微分係數が存在する意味.

$$\Phi'(0)=\int_{x_0}^{x_1}(F_y\eta+F_{y'}\eta')dx^{(1)}=0.$$

第二項に部分積分法を適用して變形すれば,

$$\Phi'(0)=\Big[F_{y'}\eta(x)\Big]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\eta(x)dx.$$

兩端に於て y の値は不變である事を考慮すれば第一項は消失するから,

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\eta(x)dx=0. \tag{1·3}$$

η は上の條件を滿す範圍で全く勝手だから, 今特に次の樣にとつて見る:

$$\eta(x)=\begin{cases}(x-\alpha)^3(\beta-x)^3 & (\alpha<x<\beta),\\ 0 & (x_0\leqq x\leqq\alpha,\ \text{及び}\ \beta\leqq x\leqq x_1).\end{cases}$$

として, $F_y-\dfrac{d}{dx}F_{y'}$ が恆等的に 0 でないと假定しよう. 上の假定からこれは連續函數であることが判るから η が 0 でない區間を十分小さく選べば必ず定符號(例へば正號)となり, η も同じ區間で正だから (1·3) は 0 とはなり得ない(矛盾). 從つて, $F_y-\dfrac{d}{dx}F_{y'}$ は恆等的に 0 でなければならぬ(歸謬法). 即ち (1·2) の必要なることが證明された.

(注意). 上の證明法では $F_y-\dfrac{d}{dx}F_{y'}$ の連續なること, 從つて $\dfrac{d}{dx}F_{y'}$ を實際書けば, $y''(x)$ が現れるために, $y(x)$ の二回連續微分可能性の假定が必要であつた. 我々の y にはこの制限の外に比較函數 $\bar{y}$ として $y+\varepsilon\eta$ なる特殊の型をとることの制限が附纏ふ. 之等の假定は數理物理學の問題の範圍で十分妥當な假定であるが, 出來るだけ一般性を求める純數學の立場からは不滿に値しよう. 實際これ等 $y(x)$ に關する制限を弛めて, $y(x)$ が區分的

---

(1) ε の一次の項の係數であるこの項を第一階變分係數と呼び, 又 ε 迄含めたものを第一階變分と呼び δJ なる記號で表はす. 即ち $\Phi(\varepsilon)\equiv J[\bar{y}]$ が $\varepsilon=0$ に對して停留値なるためには第一變分が 0 なることを要する: $\delta J=0$.

(斷片的)に連續な微分係數を有するものとさへすれば,求むる函數はやはり Euler の方程式を滿さねばならぬことが知られてゐる (du Bois Raymond). 且 $F_{y'y'} \neq 0$ なる限り, $y(x)$ は二回連續微分可能なることが證明される. 實際數理物理學の問題では,この最後の條件の成立する所謂正則問題と呼ばれる場合を論ずれば足りるのである.

上の議論は,變分法の問題の解が Euler の方程式を滿足することが必要であることを示したのみで,十分條件には觸れてゐない. 微分學の極大極小論の類似が完全に行くとすれば, $\Phi(\varepsilon)$ を ε の羃級數に展開して ε^2 の項の係數(第二階變分係數)の符號で極大極小の判定が出來さうに見えるが,實際はさう簡單に行かない (Weierstrass). 十分條件の嚴格な判定には,所謂 Weierstrass の E 函數なるものを使はねばならなくなり,之等を論ずることは本書の範圍を脫することになる. 然るに幸にして以下の目的には,別に極小(又は極大)と限る必要がなく唯增減が一時止つて**停留値** (stationary value) となることが要求されるのみで,從つて Euler の方程式を滿足することが同時に十分條件となる: 即ち, (1·1) の積分が停留値たるために必要且十分な條件は, $y(x)$ が Euler の方程式を滿足することである.

慣用的記號. 通例,變分法では上の如くパラメーター ε を一々書かず, $\varepsilon\eta \equiv \delta y$ と書き,之を y の變分と呼び,隨時使用してゐる. これには, $\delta y' = \dfrac{d}{dx}(\delta y)$ なる關係があることは明かである. この書き方で上の Euler の式の導き方を書けば,

$$\delta J \equiv \delta \int_{x_0}^{x_1} F(x;\, y, y')dx = \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y')dx$$

$$= \Big[F_{y'}\delta y\Big]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}\left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y\, dx = \int_{x_0}^{x_1}\left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\varepsilon\eta\, dx. \quad (1·3')$$

$\delta J=0$ より上述の意味で Euler の方程式が得られる.

高階微分係數を有する場合への擴張.

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x;\, y, y', y'', \cdots\cdots, y^{(n)})dx$$

を停留値たらしめる y を定めることは, 上の方法を一般化して容易に

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}\{F_y\delta y+F_{y'}\delta y'+F_{y''}\delta y''+\cdots\cdots+F_{y^{(n)}}\delta y^{(n)}\}dx$$

$$=\Big[\Big\{F_{y'}-\frac{d}{dx}F_{y''}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}F_{y^{(n)}}\Big\}\delta y$$

$$+\cdots\cdots+\Big\{F_{y^{(n-1)}}-\frac{d}{dx}F_{y^{(n)}}\Big\}\delta y^{(n-2)}+F_{y^{(n)}}\delta y^{(n-1)}\Big]_{x_0}^{x_1}$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\Big\{F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}\Big\}\delta y dx$$

を得る.

兩端の條件: $(\delta y)_0=(\delta y)_1=(\delta y')_0=(\delta y')_1=\cdots\cdots=(\delta y^{(n-1)})_0=(\delta y^{(n-1)})_1=0$

より $\Big[\quad\Big]_{x_0}^{x_1}$ の項は消え, 上の方法と同樣に議論を進めれば, $2n$ 階微分方程式:

$$\underline{F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0} \qquad (1\cdot4)$$

に到達する. この際, 當然 F は各引數 $x, y, y', \cdots\cdots, y^{(n)}$ につき $n+1$ 回連續微分可能, $y(x)$ もやはり x につき $2n$ 回連續微分可能を假定してゐる.

多くの未知函數を含む場合.

$$J[u, v, \cdots\cdots]=\int_{x_0}^{x_1}F(x;\, u, v, \cdots\cdots, u', v', \cdots\cdots)dx.$$

上からの一般化は極めて容易である:

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}(F_u\delta u+F_{u'}\delta u'+F_v\delta v+F_{v'}\delta v'+\cdots\cdot)dx$$

$$=\Big[F_{u'}\delta u\Big]_{x_0}^{x_1}+\Big[F_{v'}\delta v\Big]_{x_0}^{x_1}+\cdots\cdot$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\left(F_u-\frac{d}{dx}F_{u'}\right)\delta u dx+\int_{x_0}^{x_1}\left(F_v-\frac{d}{dx}F_{v'}\right)\delta v dx+\cdots\cdot.$$

兩端の條件： $(\delta u)_{x_0}=(\delta u)_{x_1}=(\delta v)_{x_0}=(\delta v)_{x_1}=\cdots\cdot=0$ から第一項は消失する．從つて，F が引數 x; $u, v, \cdots\cdot, u', v', \cdots\cdot$ の各につき二階連續微分可能で，$u(x), v(x), \cdots\cdot$ が夫々 x につき二回連續微分可能といふ條件の下に，上述と同樣の議論により，聯立方程式：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dx}F_{u'}-F_u=0,\\&\frac{d}{dx}F_{v'}-F_v=0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\tag{1·5}$$

を得る．

多くの獨立變數の場合．簡單のため二獨立變數の場合に限る．

$$J[u]=\iint_D F(x, y; u, u_x, u_y)dxdy,$$

$$\delta J=\iint_D(F_u\delta u+F_{u_x}\delta u_x+F_{u_y}\delta u_y)dxdy,$$

[Gauss の定理を用ゐて((4·6)參照)],

$$=\int_C\delta u(F_{u_x}dy-F_{u_y}dx)+\iint_D\left\{F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right\}\delta u dxdy.$$

周圍 C 上では，u は一定値を取るとして $\delta u=0$, 從つて第一項は消失する．依つて同上の方法で今度は偏微分方程式：

$$\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}+\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}-F_u=0\tag{1·6}$$

に到達する。

境界條件 (Randbedingung) **と附加條件** (Nebenbedingung). 以上の種々の場合を通じて,積分の兩端では求むる未知函數の値を變へないものとした. 境界に於て,求むる函數に全然斯様な條件を課さない場合とか,又は別に指定された條件が課される場合でも,兎も角積分が停留値をとるためには,求むる函數は Euler の方程式を滿足しなければならない. 何んとなれば,比較函數を特に境界で不變の値を指定したもののみに限ればその必要なことは明かだからである. 從つて我々は Euler の方程式の解の中から指定の條件を滿すものを選べばよい. 今もし,境界値に何等の指定がないときには,例へば最初の問題では (1·3′) から直ぐ判るやうに同時に $\left[F_{y'}\delta y\right]_{x_0}^{x_1}=0$ が滿されねばならぬから

$$F_{y'}(x_0)=F_{y'}(x_1)=0 \tag{1·7}$$

なる條件が自然について來ることになる. (1·7) の種類の條件を**自然な條件** (natürliche Bedingung) と呼ぶ[1].

又附加條件のついた問題は,この條件を使つて消去を行ひ,條件の附かないものに直して直接解くことも出來るが,微分學に於ける條件附極大極小問題の Lagrange の乘因子と同様に取扱ふのが一番簡單である. 例へば $G(x,y,z)=0$ の條件の下に

$$\delta\int_{x_0}^{x_1}F(x,y(x),y'(x),z(x),z'(x))dx=0$$

の解を求める様な問題,即ち幾何學的に言へば,與へられた曲面上である停

---

(1) 積分の上下端が,指定された曲線又は曲面上にあるやうに與へられた境界條件では,所謂横斷條件 (Transversalitätsbedingung) が之に代る. Courant-Hilbert: Methoden der mathematischen Physik. Bd. I. (2te Aufl.) IV, §5 を見よ. 寺澤寛一氏: '數學概論', §9·9–9·10 にもこの取扱ひが述べられてある.

留曲線を定める場合には,F の代りに

$$F^{*}=F(x,y,y',z,z')+\lambda G(x,y,z) \tag{1·8}$$

なる函數 F^{*} につき,通例の場合のやうに取扱つて

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F^{*}}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F^{*}}{\partial y}=0,\\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F^{*}}{\partial z'}\right)-\frac{\partial F^{*}}{\partial z}=0\end{aligned}\right\} \tag{1·9}$$

を得,之と上の條件 $G(x,y,z)=0$ から,求むる函數 $y(x)$, $z(x)$ と乘因子 λ を決定することが出來るのである.但し.この場合に,次に述べる重要な特殊の場合即ち所謂等周問題を除いては,一般には λ は常數ではないことに注意を要する.

條件附問題中,**等周問題** (isoperimetric problem) なる名稱で呼ばれてゐる問題は變分問題:

$$\delta\int_{x_0}^{x_1}F(x,y(x),y'(x))dx=0$$

に對し

$$\int_{x_0}^{x_1}G(x,y(x),y'(x))dx=\text{與へられた常數}$$

の形の附加條件が附されてゐる場合である.例へば,與へられた長さを有する曲線中で,これによつて圍まれる面積を最大ならしむるものはどんな曲線であらうかと言ふ幾何學的問題の形で,最初に變分法の對象となつたものがそれである.この問題では λ は常數なる可きこと論を待たない.この一例として,重力の場に於ける(質量を有する)絲又は鎖の釣合の問題がある.