

應用偏微分方程式論

犬井鐵郎著

應用偏微分方程式論

犬井鐵郎著

岩波書店

序

本書は筆者が以前に岩波講座物理學の一項目として書いたものを補足擴充したものであつて、物理學及び工學を學ぶ人々を對象としてこれらの分野に用ゐられる偏微分方程式の種々の應用を解説したものである。物理學及び工學の基礎方程式の殆んどすべてが偏微分方程式であるから、偏微分方程式の應用がこの方面の學徒に必要であることは言ふ迄もないが、實際に行はれてゐる取扱を方法論的に眺めると大別して二通りの行き道がある。一つは本書の内容の過半を占めてゐる偏微分方程式そのものの形で取扱ふ方法で、今一つは所謂變數分離の方法により現れる解である特殊超越函數の個々の性質を専ら利用する方法である。本書に於いては特殊超越函數の性質を解説する餘裕は無いので、特別の場合の外は初等函數が現れる問題に限つてこの點を説明した。その代り物理學、工學上の應用面に現れる種々の問題の型については一應漏れ無く觸れてあるから、讀者がこれに超越函數の應用例若干を補つて下されば本書だけで科學者、技術者としての専門書、専門文獻に導く階梯としての役を果し得るものと思ふ。

本書の構成を簡単に述べれば次の通りである。第一篇は所謂重合せの原理の基礎に立ち最も普通に行はれる方法であるが、注意すべきは基礎方程式が線型であることに全く依存してゐることである。第二篇は所謂特有帶の理論に基礎を置くもので直接この制限に縛られてゐない。特有帶の理論による橢圓型、双曲型及び拋物型はそれぞれの型に應ずる取扱が行はれ、これに對し第一篇の方法は直接この型に依存しない代り非線型の困難は宿命である。特有帶が實の意味を有するのは双曲型に於てであつて、これ

を通じて解の不連続性が現れ得る。これは物理的に種々の波面に對應する。第八章及び補遺の壓縮性流体の取扱は特にこの考へ方に依存する所が多い。重合せの原理による解法は直交函數系による展開に基礎を置き直交函數系は線型微分表式の固有値問題から現れる。この意味で固有値問題は數理物理學の全域に渉る基礎問題である。それは積分方程式論に關聯し更に量子力學理論の發展以來 Hilbert 空間の理論として抽象化され躍進的發展を遂げた。第一篇第七章及び第二篇第九章はこれらの概説である。

校正も終了して後筆者は L. Schwartz の近著: *Theorie des distributions* を手にすることができた。基礎概念に於て勿論であるが應用の立場から見てもこの書は大きな波紋を學界に惹き起すものであらう。難解のこの書の解説を取り急いで本書に加へることは非力の筆者の及ばぬ所であるが唯默するにも忍びないので本書に關係ある二三の點に關し末尾に一言した。

終りに臨み、舊稿執筆當時多くの貴重な忠言を賜つた山内恭彦、小谷正雄兩博士と、舊稿の不備、新稿の擴充に對し貴重な注意と第二篇第九章の分擔をして下さつた加藤敏夫學士に心から御禮申上げる。

今度の出版に際しては勝手な筆者の希望を常に入れて種々の變更を許して下さつた岩波書店の諸氏の御協力に深謝する次第である。

1951年2月

東京にて 犬井鐵郎

目 次

準備 變分法, 隨伴微分表式, 物理學の基礎方程式	頁 1
第一章 變分法の概念	1
1. 變分原理, Euler の方程式	1
第二章 隨伴微分表式	9
2. 隨伴微分表式, Green の公式	9
第三章 物理學の基礎方程式	13
3. 變分原理から導かれる方程式. ポテンシャル, 波動の方程式	13
4. 非可逆現象に関する取扱. 熱傳導, 擴散の方程式	17
5. 變數分離によるポテンシャル, 波動, 熱傳導の方程式の特解	22
第一篇 重合せの原理	29
第一章 數理物理學の問題	31
6. 簡単な例題, 境界値問題, 初期値問題	31
第二章 初期値問題	39
7. 一次元空間の波動の問題	39
8. n 次元の熱傳導の式	41
9. 球面波. 三次元空間の波動の問題	46
10. n 次元空間での波動の方程式——積分法	50
11. n 次元空間の波動の方程式——次元低下法, Huygens の原理の問題	54
第三章 境界値問題	60
12. 簡単なポテンシャルの問題	60

13. Stokes の方法	64
14. Duhamel の方法	70
第四章 振動の問題, Sturm-Liouville 型固有値問題	82
15. 絃の振動, 棒の縦振動	82
16. Sturm-Liouville 型固有値問題	85
第五章 基礎 二境界条件の齊次・非齊次, 強制振動の問題	91
17. 齊次・非齊次問題と非齊次・齊次問題の關聯	91
18. 強制振動の取扱(其一). 固有振動の重合せ	93
19. 強制振動の取扱(其二). 瞬間力で起される運動の重合せ	98
第六章 Green 函数と積分方程式, 展開定理	105
20. Green 函数, 物理的考察と數學的構成	105
21. 微分方程式の境界値問題の積分方程式への歸着, 展開定理	118
22. 2箇以上の獨立變數の場合に於ける Green 函数	122
第七章 固有値問題と積分方程式論, 展開定理の證明	130
23. Fredholm の積分方程式, 函数の核積分表示 A -型核	130
24. 對稱核, 固有値存在の定理	134
25. 全部の固有値及び固有函数	139
26. 展開定理の證明	143
第二篇 特有帶論と積分公式の應用	147
第一章 一階偏微分方程式の特有帶と Cauchy の問題	147
27. 偏微分方程式と積分曲面. 一階偏微分方程式の特有帶	147
28. 一階偏微分方程式の Cauchy の問題と特有帶. 一般初期 帶と積分曲面の唯一性, 分岐帶としての特有帶	153
29. 線型偏微分方程式. 完全解との關係, 特有曲線. 多變數の	

場合への擴張. 例題	153
第二章 二階線型偏微分方程式の特有帯と Cauchy の問題	166
30. 二獨立變數の場合の特有帯	166
31. 特有帯による偏微分方程式の分類 (双曲型, 楕圓型, 拋物型). 多變數の場合への擴張	170
第三章 隨伴偏微分表式, 廣義の Green の公式	182
32. 隨伴偏微分表式, 廣義の Green の積分公式, 餘法線. 次元の擴張	182
第四章 双曲型偏微分方程式の Cauchy の問題と Green の積分公式	188
33. 獨立變數が 2 箇の場合の双曲型方程式に関する Riemann の積分法	193
34. 獨立變數が 2 箇以上の双曲型方程式に関する Volterra の積分法	194
第五章 楕圓型偏微分方程式の境界値問題と Green 函數	203
35. 楕圓型微分方程式の解の一般的性質. 二獨立變數の場合. 多變數の場合への擴張	203
36. 二獨立變數の楕圓型方程式の境界値問題. 唯一性. 主要解と Green 函數	206
第六章 Laplace, Poisson 及び Helmholtz の方程式の境界値問題	212
37. 調和函數, 鏡像, 主要解と Green の公式	212
38. 境界値問題の解. 第一種-第二種-第三種境界値問題. 内部問題と外部問題との關聯	219

第七章 拋物型偏微分方程式	233
39. 拋物型方程式の解の一般的性質. 第一種境界値問題と唯一性	233
40. 拋物型方程式と Green の公式. 熱傳導の方程式の主要解と Green 函數	236
第八章 不連續帶としての特有帶, 不連續帶の傳播の物理現象	242
41. 不連續帶と波動の傳播	242
42. 彈性波の傳播速度, 結晶光學への應用, 可壓縮性流体と特有帶としての不連續帶	247
43. 双曲型方程式に関する Hadamard の方法の概要	258
44. 偏微分方程式の解により定義される函數の解析的性質と物理現象	270
第九章 變分法に基づく固有値問題の解法	273
45. 線型變換と二次形式	273
46. Hilbert 空間	283
47. 線型演算子	288
48. 固有値問題, 境界値問題, 自己共軛演算子	293
49. 變分的方法, 二次形式	297
50. スペクトルの性質, 固有値の近似計算	307
補 遺	320
A6. 簡単な解の物理的意味	320
A26. 特異性に對する注意	322
A31. ホドグラフ變換及び Legendre の變換	323
A38. 鏡像と Green 函數	328
A40. 熱湧源と鏡像	329
A41. 聯立偏微分方程式に於ける特有帶の理論	330
A42. 壓縮性流体の問題	336

L. Schwartz の Theorie des distributions について	362
参考書	371
索引	373

準備

變分法随伴微分表式, 物理學の基礎方程式

第一章 變分法の概念

§1. 變分原理 Euler の方程式.

解析學の一分科たる變分法の物理學に於ける應用は多いが、原理的に見て、最重要な點は物理學の基礎法則を記述する微分方程式の多くが所謂變分原理 (variation principle) から導かれることであらう。尤も、物理學の基礎方程式そのものは、もつと物理的根柢から説明した方が判り易いが、それは物理學として 詳しく論ぜられる可き問題で本書の目的とする所でない。此處ではそれ等の數學的表式を出来るだけ簡捷に求め且その基礎概念を知るための目的で、變分法の概念と方法とをそのために必要な最小限度に於て述べ、基礎方程式の導入に應用しようと思ふ。

今、 x の函數 $y(x)$ があり、導函數 $y'(x)$ が存在するものとし、別にそれ等で定まる與へられた表式 $F(x, y, y')$ の區間 (x_0, x_1) についてとつた積分：

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x; y(x), y'(x)) dx \quad (1.1)$$

に着目しよう。この値は明かに $y(x)$ によるから積分 $J[y]$ と書いた。與へられた $F(x, y, y')$ につき、兩端での $y(x)$ の値 $y(x_0), y(x_1)$ は不變の値ときめて、この積分の値を極小にするためにはどんな函數 $y(x)$ を選んだらよい

か⁽¹⁾. この種の問題から所謂變分法と呼ばれる分科が生じた. 要するに一つの極大極小に関する問題だが, 普通微分學で取扱ふ問題の如く函数 $f(x)$ が與へられたとき $f(x)$ の極値となる點を決定するのと違つて, 函数 $y(x)$ そのものを決定するところにより高級な問題であることが理解されるであらう. 上述の積分 $J[y]$ を極小とする y を求める問題に立歸り, 特に函数 F はその引數 x, y, y' のどれに關しても二回連續微分可能⁽²⁾で, 又 $y(x)$ はその變數 x に關してこれ亦二回連續微分可能であると假定しよう. これだけの假定を置くと直ぐ次に説明する様に, 求むる函数 y は Euler の方程式と呼ばれて居る次の微分方程式を満足せねばならぬことが判る (必要條件):

$$\frac{d}{dx} F_{y'} - F_y = 0. \quad (1.2)$$

[證明]. y を求める函数とし, $J[y]$ と他の函数 $\bar{y}$ をとつたときの J の値とを比較しよう. 假定により y は二回連續微分可能としたから比較函数 $\bar{y}$ も同種のものとし, 之が $\bar{y}(x) = y(x) + \varepsilon \eta(x)$ と書けるものとしよう. $\eta(x)$ は二回連續微分可能の任意の函数で, ε は一つのパラメーターである. すると, 積分 $J[\bar{y}]$ は ε の函数 $\Phi(\varepsilon)$ と考へれば, $\varepsilon = 0$ のとき極値となるのだから $\Phi'(0) = 0$ でなければならぬ. 然るに, ε が十分小さいとき, 上述の假定で $\Phi(\varepsilon)$ は ε につき Taylor の級數に展開して考へればすぐ判る様に,

$$\Phi(\varepsilon) = \Phi(0) + \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} (F_{y'} \eta + F_{y''} \eta') dx + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{x_0}^{x_1} \{ \tilde{F}_{yy} \eta^2 + 2 \tilde{F}_{yy'} \eta \eta' + \tilde{F}_{y'y'} \eta'^2 \} dx,$$

但し $\tilde{F}_{yy}$ 等は F_{yy} 等の變數 $y(x), y'(x)$ の代りに夫々 $y(x) + \varepsilon \theta \eta(x), y'(x) + \varepsilon \theta \eta'(x)$ ($0 < \theta < 1$) としたものを意味する. 従つて,

(1) 例へば, $F \equiv \sqrt{1+y'^2}$ の場合には二點 $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ を結ぶ曲線の中で長さの最短なものを求める問題となる.

(2) (Zweimal stetig differenzierbar) 即ち結局, 連續な第二階微分係数が存在する意味.

$$\Phi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} (F_y \eta + F_{y'} \eta') dx^{(1)} = 0.$$

第二項に部分積分法を適用して變形すれば,

$$\Phi'(0) = \left[F_{y'} \eta(x) \right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \eta(x) dx.$$

兩端に於て y の値は不變である事を考慮すれば第一項は消失するから,

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \eta(x) dx = 0. \quad (1.3)$$

η は上の條件を満す範圍で全く勝手だから, 今特に次の様にとつて見る:

$$\eta(x) = \begin{cases} (x-\alpha)^3(\beta-x)^3 & (\alpha < x < \beta), \\ 0 & (x_0 \leq x \leq \alpha, \text{ 及び } \beta \leq x \leq x_1). \end{cases}$$

として, $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}$ が恒等的に 0 でないと假定しよう. 上の假定からこれは連続函数であることが判るから η が 0 でない區間を十分小さく選べば必ず定符號 (例へば正號) となり, η も同じ區間で正だから (1.3) は 0 とはなり得ない (矛盾). 従つて, $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}$ は恒等的に 0 でなければならぬ (歸謬法). 即ち (1.2) の必要なることが證明された.

(注意). 上の證明法では $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}$ の連続なること, 従つて $\frac{d}{dx} F_{y'}$ を實際書けば, $y''(x)$ が現れるために, $y(x)$ の二回連続微分可能性の假定が必要であつた. 我々の y にはこの制限の外に比較函数 $\bar{y}$ として $y + \varepsilon \eta$ なる特殊の型をとることの制限が附纏ふ. 之等の假定は數理物理學の問題の範圍で十分妥當な假定であるが, 出来るだけ一般性を求める純數學の立場からは不満に値しよう. 實際これ等 $y(x)$ に関する制限を弛めて, $y(x)$ が區分的

(1) ε の一次の項の係數であるこの項を第一階變分係數と呼び, 又 ε 迄含めたものを第一階變分と呼び δJ なる記號で表はす. 即ち $\Phi(\varepsilon) \equiv J[\bar{y}]$ が $\varepsilon=0$ に對して停留値なるためには第一變分が 0 なることを要する: $\delta J=0$.

(斷片的)に連續な微分係數を有するものとさへすれば、求むる函数はやはり Euler の方程式を滿さねばならぬことが知られてゐる (du Bois Raymond). 且 $F_{y'y'} \neq 0$ なる限り、 $y(x)$ は二回連續微分可能なることが證明される。實際數理物理學の問題では、この最後の條件の成立する所謂正則問題と呼ばれる場合を論ずれば足りるのである。

上の議論は、變分法の問題の解が Euler の方程式を滿足することが必要であることを示したのみで、十分條件には觸れてゐない。微分學の極大極小論の類似が完全に行くとしたら、 $\varphi(\varepsilon)$ を ε の冪級數に展開して ε^2 の項の係數 (第二階變分係數) の符號で極大極小の判定が出來さうに見えるが、實際はさう簡單に行かない (Weierstrass). 十分條件の嚴格な判定には、所謂 Weierstrass の E 函数なるものを使はねばならなくなり、之等を論ずることは本書の範圍を脱することになる。然るに幸にして以下の目的には、別に極小 (又は極大) と限る必要がなく唯増減が一時止つて停留値 (stationary value) となることが要求されるのみで、従つて Euler の方程式を滿足することが同時に十分條件となる：即ち、(1.1) の積分が停留値たるために必要且十分な條件は、 $y(x)$ が Euler の方程式を滿足することである。

慣用的記號. 通例、變分法では上の如くパラメーター ε を一々書かず、 $\varepsilon\eta \equiv \delta y$ と書き、之を y の變分と呼び、隨時使用してゐる。これには、 $\delta y' = \frac{d}{dx}(\delta y)$ なる關係があることは明かである。この書き方で上の Euler の式の導き方を書けば、

$$\begin{aligned} \delta J &\equiv \delta \int_{x_0}^{x_1} F(x; y, y') dx = \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') dx \\ &= \left[F_{y'} \delta y \right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \varepsilon \eta dx. \quad (1.3') \end{aligned}$$

$\delta J = 0$ より上述の意味で Euler の方程式が得られる。

高階微分係数を有する場合への擴張。

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x; y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx$$

を停留値たらしめる y を定めることは, 上の方法を一般化して容易に

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{x_0}^{x_1} \{F_y \delta y + F_{y'} \delta y' + F_{y''} \delta y'' + \dots + F_{y^{(n)}} \delta y^{(n)}\} dx \\ &= \left[\left\{ F_{y'} - \frac{d}{dx} F_{y''} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} F_{y^{(n)}} \right\} \delta y \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left\{ F_{y^{(n-1)}} - \frac{d}{dx} F_{y^{(n)}} \right\} \delta y^{(n-2)} + F_{y^{(n)}} \delta y^{(n-1)} \right]_{x_0}^{x_1} \\ &\quad + \int_{x_0}^{x_1} \left\{ F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \right\} \delta y dx \end{aligned}$$

を得る。

両端の條件: $(\delta y)_0 = (\delta y)_1 = (\delta y')_0 = (\delta y')_1 = \dots = (\delta y^{(n-1)})_0 = (\delta y^{(n-1)})_1 = 0$

より $\left[\right]_{x_0}^{x_1}$ の項は消え, 上の方法と同様に議論を進めれば, $2n$ 階微分方程式:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0 \quad (1.4)$$

に到達する。この際, 當然 F は各引数 $x, y, y', \dots, y^{(n)}$ につき $n+1$ 回連続微分可能, $y(x)$ もやはり x につき $2n$ 回連続微分可能を假定してゐる。

多くの未知函数を含む場合。

$$J[u, v, \dots] = \int_{x_0}^{x_1} F(x; u, v, \dots, u', v', \dots) dx.$$

上からの一般化は極めて容易である:

$$\begin{aligned}
\delta J &= \int_{x_0}^{x_1} (F_u \delta u + F_{u'} \delta u' + F_v \delta v + F_{v'} \delta v' + \dots) dx \\
&= \left[F_{u'} \delta u \right]_{x_0}^{x_1} + \left[F_{v'} \delta v \right]_{x_0}^{x_1} + \dots \\
&\quad + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_u - \frac{d}{dx} F_{u'} \right) \delta u dx + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_v - \frac{d}{dx} F_{v'} \right) \delta v dx + \dots
\end{aligned}$$

両端の條件: $(\delta u)_{x_0} = (\delta u)_{x_1} = (\delta v)_{x_0} = (\delta v)_{x_1} = \dots = 0$ から第一項は消失する。従つて、 F が引數 $x; u, v, \dots, u', v', \dots$ の各につき二階連續微分可能で、 $u(x), v(x), \dots$ が夫々 x につき二回連續微分可能といふ條件の下に、上述と同様の議論により、聯立方程式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} F_{u'} - F_u &= 0, \\ \frac{d}{dx} F_{v'} - F_v &= 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

を得る。

多くの獨立變數の場合。簡單のため二獨立變數の場合に限る。

$$J[u] = \iint_D F(x, y; u, u_x, u_y) dx dy,$$

$$\delta J = \iint_D (F_u \delta u + F_{u_x} \delta u_x + F_{u_y} \delta u_y) dx dy,$$

[Gauss の定理を用ゐて ((4.6) 参照)],

$$= \int_C \delta u (F_{u_x} dy - F_{u_y} dx) + \iint_D \left\{ F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} \right\} \delta u dx dy.$$

周圍 C 上では、 u は一定値を取るとして $\delta u = 0$, 従つて第一項は消失する。

依つて同上的方法で今度は偏微分方程式:

$$\frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} - F_u = 0 \quad (1.6)$$

に到達する。

境界条件 (Randbedingung) と附加条件 (Nebenbedingung). 以上の種々の場合を通じて、積分の両端では求むる未知函数の値を變へないものとした。境界に於て、求むる函数に全然斯様な條件を課さない場合とか、又は別に指定された條件が課される場合でも、兎も角積分が停留値をとるためには、求むる函数は Euler の方程式を満足しなければならない。何んとなれば、比較函数を特に境界で不變の値を指定したものだけに限ればその必要なことは明かだからである。従つて我々は Euler の方程式の解の中から指定の條件を満すものを選べばよい。今もし、境界値に何等の指定がないときには、例へば最初の問題では (1.3') から直ぐ判るやうに同時に $\left[F_y, \delta y \right]_{x_0}^{x_1} = 0$ が満されねばならぬから

$$F_{y'}(x_0) = F_{y'}(x_1) = 0 \quad (1.7)$$

なる條件が自然について來ることになる。(1.7)の種類の條件を**自然な條件** (natürliche Bedingung) と呼ぶ⁽¹⁾。

又附加條件のついた問題は、この條件を使つて消去を行ひ、條件の附かないものに直して直接解くことも出来るが、微分學に於ける條件附極大極小問題の Lagrange の乗因子と同様に取扱ふのが一番簡單である。例へば $G(x, y, z) = 0$ の條件の下に

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)) dx = 0$$

の解を求める様な問題、即ち幾何學的に言へば、與へられた曲面上である停

(1) 積分の上下端が、指定された曲線又は曲面上にあるやうに與へられた境界條件では、所謂横斷條件 (Transversalitätsbedingung) が之に代る。Courant-Hilbert: Methoden der mathematischen Physik. Bd. I. (2te Aufl.) IV, §5 を見よ。寺澤寛一氏: '數學概論', §9-9-10 にもこの取扱ひが述べられてある。

留曲線を定める場合には, F の代りに

$$F^* = F(x, y, y', z, z') + \lambda G(x, y, z) \quad (1.8)$$

なる函数 F^* につき, 通例の場合のやうに取扱つて

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F^*}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F^*}{\partial y} &= 0, \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F^*}{\partial z'} \right) - \frac{\partial F^*}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

を得, 之と上の條件 $G(x, y, z) = 0$ から, 求むる函数 $y(x), z(x)$ と乗因子 λ を決定することが出来るのである. 但し, この場合に, 次に述べる重要な特殊の場合即ち所謂等周問題を除いては, 一般には λ は常數ではないことに注意を要する.

條件附問題中, 等周問題 (isoperimetric problem) なる名稱で呼ばれてゐる問題は變分問題:

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx = 0$$

に對し

$$\int_{x_0}^{x_1} G(x, y(x), y'(x)) dx = \text{與へられた常數}$$

の形の附加條件が附されてゐる場合である. 例へば, 與へられた長さを有する曲線中で, これによつて圍まれる面積を最大ならしむるものはどんな曲線であらうかと言ふ幾何學的問題の形で, 最初に變分法の對象となつたものがそれである. この問題では λ は常數なる可きこと論を待たない. この一例として, 重力の場に於ける (質量を有する) 絲又は鎖の釣合の問題がある.