

高等学校试用教材

工程数学

# 数学物理方程与 特殊函数

南京工学院数学教研组 编

人民教育出版社

2.6

高等学校试用教材

工程数学

# 数学物理方程与特殊函数

南京工学院数学教研组编

GF/39/26

人民教育出版社

高等学校试用教材  
工程数学  
**数学物理方程与特殊函数**  
南京工学院数学教研组编

\*

人民教育出版社出版  
新华书店北京发行所发行  
北京印刷一厂印装

\*

开本  $787 \times 1092$  1/32 印张  $5 \frac{4}{16}$  字数 127,000

1978年11月第1版 1979年4月第1次印刷

印数 00,001—360,000

书号 13012·0254 定价 0.40 元

## 前 言

一、本教材是在我们教研组过去编写的讲义基础上，根据1977年在西安召开的高等学校工科数学教材编写会议通过的大纲编写的，后来又根据1978年9月杭州审稿会议上提出的意见作了一些修改。

二、全书共分八章，以数学物理方程的解法为安排内容的线索。书的前四章及第八章是讲数学物理方程的基本概念及几种常用解法，第五、六、七章是讨论数学物理方程求解中最常出现的两种特殊类型的常微分方程——贝塞尔方程与勒让德方程的解法及解的主要性质。

三、本书介绍五种求解数学物理方程的常用方法——分离变量法、行波法、积分变换法、格林函数法及差分法。在这些方法中，我们把重点放在分离变量法上，较详细地讨论了三种典型的方程在直角坐标系、极坐标系、柱坐标系、球坐标系中进行分离变量的一般步骤及各种边界条件的处理。用分离变量法解定解问题最后都归结为一个常微分方程的固有值问题。第五章所叙述的施特姆-刘维尔理论对二阶常微分方程的固有值问题作了明确的解答，这些结论是分离变量法的理论基础。

四、我们把贝塞尔函数及勒让德多项式放在第六、七两章讲授，主要的目的是想从求解数学物理方程的需要引出这两个特殊函数，并且使分离变量法有两次循环的机会。

五、本书由浙江大学主审，主审人为该校周茂清教授。参加审稿的单位有北京航空学院、河北工学院、吉林工业大学、山东工

学院、湖南大学、天津大学、西安冶金建筑学院、上海机械学院、上海交通大学、南京航空学院、西安交通大学、重庆大学，参加审稿的同志对本书进行了详细的审阅，并提出了宝贵的意见，我们在此表示衷心的感谢。

六、这次参加本书编写小组的有陶永德、高金衡、王元明（王元明执笔）。

由于我们对马列主义、毛泽东思想学习不够，业务水平不高，时间短促，因此，书中一定存在不少缺点、错误，希望同志们批评指正。

编者

1978年10月

# 目 录

<b>第一章 一些典型方程和定解条件的推导</b> .....	1
§ 1.1 基本方程的建立 .....	1
§ 1.2 初始条件与边界条件 .....	11
§ 1.3 定解问题的提法 .....	15
习题一	
<b>第二章 分离变量法</b> .....	18
§ 2.1 有界弦的自由振动 .....	18
§ 2.2 有限长杆上的热传导 .....	26
§ 2.3 圆域内的二维拉普拉斯方程的定解问题 .....	30
§ 2.4 有界弦的强迫振动 .....	33
§ 2.5 非齐次边界条件的处理 .....	36
习题二	
<b>第三章 行波法与积分变换法</b> .....	46
§ 3.1 一维波动方程的达朗倍尔公式 .....	46
§ 3.2 三维波动方程的泊松公式 .....	50
3.2.1 球对称三维波动方程的通解 .....	51
3.2.2 三维波动方程的泊松公式 .....	51
3.2.3 泊松公式的物理意义 .....	55
§ 3.3 积分变换法举例 .....	58
习题三	
<b>第四章 拉普拉斯方程的格林函数法</b> .....	67
§ 4.1 拉普拉斯方程边值问题的提法 .....	67
§ 4.2 格林公式 .....	69
§ 4.3 格林函数 .....	75

§ 4.4	两种特殊区域的格林函数及狄氏问题的解	77
4.4.1	半空间的格林函数	78
4.4.2	球域的格林函数	79

习题四

<b>第五章</b>	<b>数理方程求解中出现的几个特殊类型的常微分方程</b>	<b>83</b>
------------	-------------------------------	-----------

§ 5.1	贝塞尔方程的引出	83
§ 5.2	勒让德方程的引出	85
§ 5.3	施特姆-刘维尔理论简述	87

习题五

<b>第六章</b>	<b>贝塞尔函数</b>	<b>94</b>
------------	--------------	-----------

§ 6.1	贝塞尔方程的求解	94
§ 6.2	当 $n$ 为整数时贝塞尔方程的通解	97
§ 6.3	贝塞尔函数的递推公式	99
§ 6.4	贝塞尔函数的零点与模值	103
6.4.1	贝塞尔函数的零点	103
6.4.2	贝塞尔函数的模值	104
§ 6.5	贝塞尔方程的边值问题	105
*§ 6.6	贝塞尔函数的其他类型	111
6.6.1	第三类贝塞尔函数	111
6.6.2	虚宗量的贝塞尔函数	112
6.6.3	开尔文函数	113
*§ 6.7	贝塞尔函数的渐近公式	114

习题六

<b>第七章</b>	<b>勒让德多项式</b>	<b>118</b>
------------	---------------	------------

§ 7.1	勒让德方程的求解	118
§ 7.2	勒让德多项式	120
§ 7.3	函数展成勒让德多项式的级数	124
§ 7.4	连带的勒让德多项式	130

习题七

<b>第八章 数学物理方程的差分解法</b> .....	134
§ 8.1 将微分方程化成差分方程 .....	134
§ 8.2 拉普拉斯方程的差分格式 .....	137
§ 8.3 热传导方程的差分格式 .....	143
§ 8.4 波动方程的差分格式 .....	146
习题八	
<b>附录 A <math>\Gamma</math> 函数的基本知识</b> .....	149
<b>附录 B 傅氏变换与拉氏变换简表</b> .....	153
<b>习题答案</b> .....	156



# 第一章 一些典型方程和定解条件的推导

在讨论数学物理方程的解法以前，我们首先要弄清楚数学物理方程所研究的问题应该怎样提。为此，我们从两方面来讨论，一方面要建立描述某种物理过程的微分方程，另一方面要把一个特定的物理现象本身所具有的具体条件用数学形式表达出来。

## § 1.1 基本方程的建立

在本节，我们将通过几个不同的物理模型推导出数学物理方程中三种典型的方程，这些方程构成本书的主要研究对象。

### 例 1 弦的振动

弦的振动问题，虽然是一个古典问题，但对于初学者仍然具有一定的启发性。

设有一根均匀柔软的细弦，平衡时沿直线拉紧，而且除受不随时间而变的张力作用及弦本身的重力外，不受外力影响。下面研究弦的微小横向振动，即假定全部运动出现在一个平面上，而且弦上的点沿垂直于  $x$  轴的方向运动（图 1-1）。设弦上具有横坐标为  $x$  的点，在时刻  $t$  时的位置为  $M$ ，位移  $NM$  记作  $u$ 。显然，在振动过程中位移  $u$  是变量  $x$  与  $t$  的函数  $u(x, t)$ 。现在来建立位移  $u$  满足的方程。我们把弦上点的运动先看作小弧段的运动，然后再考虑小弧段趋于零的极

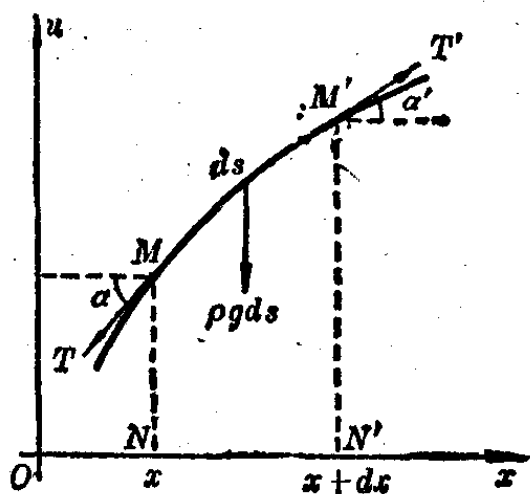


图 1-1

限情况。在弦上任取一弧段  $\widehat{MM'}$ ，其长为  $ds$ ，设  $\rho$  是弦的线密度，弧段  $\widehat{MM'}$  两端所受的张力记作  $T, T'$ 。现在考虑弧段  $\widehat{MM'}$  在  $t$  时刻的受力情况。用牛顿运动定律，作用于弧段上任一方向上的力的总和等于这段弧的质量乘以该方向上的加速度。

在  $x$  轴方向弧段受力的总和为  $-T\cos\alpha + T'\cos\alpha'$ ，由于弦只作横向振动，所以

$$T'\cos\alpha' - T\cos\alpha = 0. \quad (1.1)$$

如果弦的振动很小，并且在振动过程中弦上的切线倾角也很小，即  $\alpha \approx 0, \alpha' \approx 0$ ，则由

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \dots$$

可知，当  $\alpha$  为无穷小量时， $\cos\alpha$  与 1 的差量是  $\alpha$  的高阶无穷小量，可以略去不计。因此当  $\alpha \approx 0, \alpha' \approx 0$  时

$$\cos\alpha \approx 1, \cos\alpha' \approx 1$$

代入(1.1)式，便可近似得到

$$T = T'.$$

在  $u$  方向弧段受力的总和为  $-T\sin\alpha + T'\sin\alpha' - \rho g ds$ ，其中  $\rho$  是单位弧段的质量， $-\rho g ds$  是弧段  $\widehat{MM'}$  的重力。又因当  $\alpha \approx 0, \alpha' \approx 0$  时

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x},$$

$$\sin\alpha' \approx \operatorname{tg}\alpha' = \frac{\partial u(x+dx, t)}{\partial x},$$

$$ds = \sqrt{1 + \left[ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right]^2} dx \approx dx,$$

且小弧段在时刻  $t$  沿  $u$  方向运动的加速度为  $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$ ，小弧段的质量为  $\rho ds$ ，所以

$$-T \sin \alpha + T' \sin \alpha' - \rho g ds \approx \rho ds \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

或

$$T \left[ \frac{\partial u(x+dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] - \rho g dx \approx \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx, \quad (1.2)$$

上式左边方括号内的部分是由于  $x$  产生  $dx$  的变化而引起的  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$  的改变量, 可用微分代替, 即

$$\frac{\partial u(x+dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \approx \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] dx = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx,$$

于是 
$$\left[ T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \rho g \right] dx \approx \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx$$

或 
$$\frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + g.$$

一般说来, 张力较大时弦振动速度变化很快, 即  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  要比  $g$  大得多, 所以又可以把  $g$  略去. 经过这样逐步略去一些次要的量, 抓住主要的量, 最后得出  $u(x, t)$  应近似地满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.3)$$

这里的  $a^2 = \frac{T}{\rho}$ . (1.3) 式称为一维波动方程.

如果在振动过程中, 弦上另外还受到一个与弦的振动方向平行的外力, 且假定单位长度所受外力为  $F(x, t)$ , 显然, 在这时 (1.1) 及 (1.2) 分别为

$$T' \cos \alpha' - T \cos \alpha = 0,$$

$$F ds - T \sin \alpha + T' \sin \alpha' - \rho g ds \approx \rho ds \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

利用上面的推导方法并略去弦本身的重量, 可得弦的强迫振动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (1.3)'$$

其中  $f(x, t) = \frac{1}{\rho} F(x, t)$ .

方程(1.3)与(1.3)'的差别在于(1.3)'的右端多了一个与未知函数  $u$  无关的项  $f(x, t)$ , 这个项称为自由项. 包含有非零自由项的方程称为非齐次方程. 自由项恒等于零的方程称为齐次方程. (1.3)为齐次一维波动方程, (1.3)'为非齐次一维波动方程.

## 例2 传输线方程

对于直流电或低频的交流电, 电路的基尔霍夫定律指出同一支路中电流相等. 但对于较高频率的电流 (指频率还没有高到能显著地辐射电磁波的情况), 电路中导线的自感和电容的效应不可忽略, 因而同一支路中电流未必相等.

今考虑一来一往的高频传输线, 它被当作具有分布参数的导体(图 1-2). 在具有分布参数的导体中, 电流通过的情况, 可以用

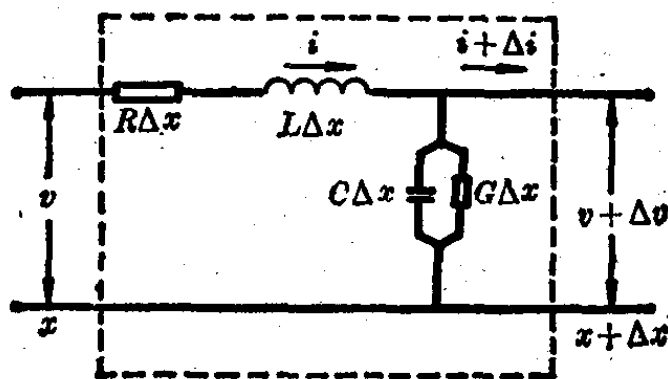


图 1-2

电流强度  $i$  与电压  $v$  来描述, 此处  $i$  与  $v$  都是  $x, t$  的函数, 记作  $i(x, t)$  与  $v(x, t)$ . 以  $R, L, C, G$  分别表示下列参数:

$R$ ——每一回路单位的串联电阻,

$L$ ——每一回路单位的串联电感,

$C$ ——每单位长度的分路电容,

$G$ ——每单位长度的分路电导.

根据基尔霍夫第二定律, 在长度为  $\Delta x$  的传输线中, 电压降应等于电动势之和, 即

$$v - (v + \Delta v) = R\Delta x \cdot i + L\Delta x \cdot \frac{\partial i}{\partial t}.$$

而 
$$\Delta v \approx \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x,$$

故上式可写成

$$\frac{\partial v}{\partial x} \approx -Ri - L \frac{\partial i}{\partial t}. \quad (1.4)$$

另外, 由基尔霍夫第一定律, 流入节点  $x$  的电流应等于流出该节点的电流, 即

$$i = (i + \Delta i) + C\Delta x \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + G\Delta x \cdot v,$$

或 
$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C \frac{\partial v}{\partial t} - Gv. \quad (1.5)$$

将方程(1.4)与(1.5)合并, 即得  $i, v$  应近似地满足如下方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial v}{\partial t} + Gv = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0. \end{cases}$$

为了确定函数  $i$  及  $v$ , 将方程(1.5)对  $x$  微分, 同时在方程(1.4)两端乘以  $C$  后再对  $t$  微分, 并把两个结果相减, 即得

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + G \frac{\partial v}{\partial x} - LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - RC \frac{\partial i}{\partial t} = 0,$$

将(1.4)中的  $\frac{\partial v}{\partial x}$  代入上式, 得

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (RC + GL) \frac{\partial i}{\partial t} + GRi, \quad (1.6)$$

这就是电流  $i$  近似满足的微分方程. 采用类似的方法从(1.4)与(1.5)中消去  $i$  可得电压  $v$  近似满足的方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (RC + GL) \frac{\partial v}{\partial t} + GRv, \quad (1.7)$$

方程(1.6)或(1.7)称为传输线方程。

根据不同的具体情况,对参数  $R, L, C, G$  作不同的假定,就可以得到传输线方程的各种特殊形式。例如,在高频传输的情况下,电导与电阻所产生的效应可以忽略不计,也就是说可令  $G=R=0$ , 此时方程(1.6)与(1.7)可简化为

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

这两个方程称为高频传输线方程。

若令  $a^2 = \frac{1}{LC}$ , 这两个方程与(1.3)完全相同。由此可见,同一个方程可以用来描述不同的物理现象。一维波动方程只是波动方程中最简单的情况,在流体力学、声学及电磁场理论中,还要研究高维的波动方程。

### \*例3 电磁场方程

从物理学我们知道,电磁场的特性可以用电场强度  $E$  与磁场强度  $H$  以及电感应强度  $D$  与磁感应强度  $B$  来描述。联系这些量的麦克斯韦(Maxwell)方程组为

$$\text{rot } H = J + \frac{\partial D}{\partial t}, \quad (1.8)$$

$$\text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad (1.9)$$

$$\text{div } B = 0, \quad (1.10)$$

$$\text{div } D = \rho. \quad (1.11)$$

其中  $J$  为传导电流的体密度,  $\rho$  为电荷的体密度。

这组方程还必须与下述场的物质方程

$$D = \epsilon E, \quad (1.12)$$

$$B = \mu H, \quad (1.13)$$

$$J = \sigma E \quad (1.14)$$

相联立, 其中  $\epsilon$  是介质的介电常数,  $\mu$  是导磁率,  $\sigma$  为导电率. 我们假定介质是均匀而且是各向同性的, 此时  $\epsilon, \mu, \sigma$  均为常数.

方程(1.8)与(1.9)都同时包含有  $E$  与  $H$ , 从中消去一个变量, 就可以得到关于另一个变量的微分方程. 例如先消去  $H$ , 在(1.8)式两端求旋度并利用(1.12)与(1.14)得

$$\text{rot rot } H = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } E + \sigma \text{rot } E,$$

将(1.9)与(1.13)代入得

$$\text{rot rot } H = -\epsilon \mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial H}{\partial t},$$

而  $\text{rot rot } H = \text{grad div } H - \nabla^2 H$ , 且  $\text{div } H = \frac{1}{\mu} \text{div } B = 0$ , 所以最后得到  $H$  所满足的方程为

$$\nabla^2 H = \epsilon \mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \sigma \mu \frac{\partial H}{\partial t};$$

同理, 若消去  $H$  即得  $E$  所满足的方程

$$\nabla^2 E = \epsilon \mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \sigma \mu \frac{\partial E}{\partial t}.$$

如果介质不导电( $\sigma = 0$ ), 则上面两个方程简化为

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon \mu} \nabla^2 H, \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon \mu} \nabla^2 E, \quad (1.16)$$

(1.15)与(1.16)称为三维波动方程.

若将三维波动方程以标量函数的形式表示出来, 则可写成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (1.17)$$

其中  $a^2 = \frac{1}{\epsilon\mu}$ ,  $u$  是  $\mathbf{E}$  (或  $\mathbf{H}$ ) 的任意一个分量.

从方程(1.11)与(1.12)还可以推导出静电场的电位所满足的微分方程,事实上,以(1.12)代入(1.11)得

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} \epsilon \mathbf{E} = \epsilon \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho,$$

而电场强度  $\mathbf{E}$  与电位  $u$  之间存在关系

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} u,$$

所以可得

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = -\frac{\rho}{\epsilon},$$

或 
$$\nabla^2 u = -\frac{\rho}{\epsilon}. \quad (1.18)$$

这个非齐次方程称为泊松(Poisson)方程.

如果静电场是无源的,即  $\rho = 0$ , 则(1.18)变成

$$\nabla^2 u = 0, \quad (1.19)$$

这个方程称为拉普拉斯(Laplace)方程.

#### 例4 热传导方程

一块热的物体,如果体内每一点的温度不全一样,则在温度较高的点处的热量就要向温度较低的点处流动,这种现象就是热传导.在工程技术上有许多传热问题都要归结为求物体内部温度的分布,现在我们来推导传热过程中温度所满足的微分方程.与上例类似,我们不是先讨论一点处的温度,而应该先考虑一个区域的温度.为此,在物体中任取一闭曲面  $S$ , 它所包围的区域记作  $V$  (图 1-3). 假

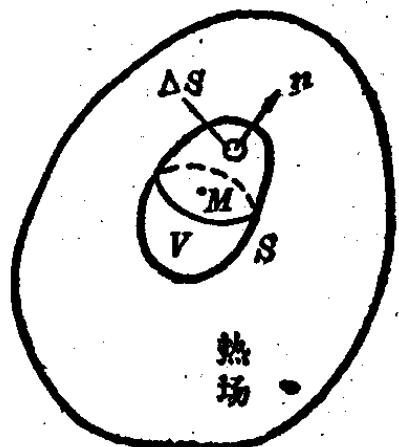


图 1-3



设在时刻  $t$  区域  $V$  内点  $M(x, y, z)$  处的温度为  $u(x, y, z, t)$ ,  $n$  为曲面元素  $\Delta S$  的法向(从  $V$  内指向  $V$  外).

由传热学可知, 在  $[t, t + \Delta t]$  时间内, 从  $\Delta S$  流入区域  $V$  的热量与时间  $\Delta t$ , 面积  $\Delta S$ , 以及沿曲面的法线方向的速度变化率三者的乘积成正比, 即

$$\begin{aligned}\Delta Q &= k \frac{\partial u}{\partial n} \Delta S \Delta t = k(\text{grad } u)_n \Delta S \Delta t \\ &= k(\text{grad } u) \cdot \Delta S \Delta t.\end{aligned}$$

其中  $k$  称为物体的热传导系数, 当物体为均匀导热体时,  $k$  为常数.

于是, 从时刻  $t_1$  到时刻  $t_2$ , 通过曲面  $S$  流入区域  $V$  的全部热量为

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \iint_S k \text{grad } u \cdot dS \right] dt.$$

流入的热量使  $V$  内温度发生了变化, 在  $\Delta t$  时间内区域  $V$  内各点温度从  $u(x, y, z, t)$  变化到  $u(x, y, z, t + \Delta t)$ , 则在  $\Delta t$  内  $V$  内温度升高所需要的热量为

$$\begin{aligned}& \iiint_V c\rho [u(x, y, z, t + \Delta t) - u(x, y, z, t)] dV \\ & \approx \iiint_V c\rho \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} \Delta t dV.\end{aligned}$$

从而从时刻  $t_1$  到时刻  $t_2$ , 由于温度升高所吸收的热量为

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV \right] dt,$$

其中  $c$  为物体的比热,  $\rho$  为物体的密度, 对均匀物体来说, 它们都是常数.

由于热量守恒, 流入的热量应等于物体温度升高所需吸收的