孙 敏 著

高等代数方法研究

Gaodeng Daishu Fangfa Yanjiu

云南大学出版社
YUNNAN UNIVERSITY PRESS

高等代数方法研究

孙 敏 著

云南大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等代数方法研究/孙敏著.—昆明：云南大学出版社，2009

ISBN 978-7-81112-905-2

Ⅰ.高… Ⅱ.孙… Ⅲ.高等学校—教学参考资料 Ⅳ.0.15

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 143565 号

高等代数方法研究

孙 敏 著

责任编辑：徐 曼 朱光辉
封面设计：刘 雨
出版发行：云南大学出版社
印 装：昆明市五华区教育委员会印刷厂
开 本：787mm×1092mm 1/16
印 张：10.5
字 数：252 千
版 次：2009 年 9 月第 1 版
印 次：2009 年 9 月第 1 次印刷
书 号：ISBN 978-7-81112-905-2
定 价：25.00 元

地 址：昆明市翠湖北路 2 号云南大学英华园内（邮编：650091）
发行电话：0871-5033244 5031071
网 址：www.ynup.com
E-mail：market@ynup.com

前　言

高等代数课程是大学数学专业的重要基础课之一，其教学目标是使学习者掌握高等代数的基础知识、基本理论和基本方法。高等代数的研究方法有自身的特点，这些特点既是研究高等代数的方法，也是培养学生的数学思想，使他们运用数学的思维方式去观察、思考、分析问题，运用数学的方法去处理、解决问题。数学思想是通过特定的数学方法来实现的，所以对数学方法、技巧的研究学习和训练，对培养学习者的思维能力有十分重要的意义，也是实现数学思想的重要途径。每门数学课程所使用的特定的方法是建立该课程基本理论的工具，同时各门课程又有自己处理问题的特殊技巧，这些技巧是数学方法中必不可少的重要组成部分。这就是笔者写作本书的目的。

本书的重点是高等代数方法研究，其特点是：

1. 每一类问题都给出常用结论。这些结论一部分来自教科书，还有一部分是笔者研究总结的结果。

2. 重点研究的是处理问题的方法和技巧。所给出的基本方法是笔者的心得总结，也有一些方法是近年来出现的新的思想方法。

3. 例题的内容涵盖了高等代数中最常用的方法，且绝大多数题目是近年出现的新颖题型。对这些问题的处理方法也体现了一个“新”字，从一个侧面反映了现代数学思想的发展。

4. 对例题的解答重在分析，通过分析得出问题的解决方法和技巧。

本书可供数学专业的大学生、研究生、教师作为参考书使用。

由于笔者水平有限，书中所给方法可能不是最好的，恳请专家、同行和读者给予赐教。

孙　敏

2009 年 6 月 14 日

目　录

第一章　一元多项式

中学中所讲的多项式其系数是有理数、实数或复数，“x”代表的是一个数；高等代数中的多项式概念是中学多项式概念的推广，这种推广反映在两个方面：一是将多项式的系数确定在一个抽象的数域上，二是多项式中的“x”表示一个符号。这种推广使多项式概念更抽象，应用更广泛。在高等代数中主要研究多项式的整除性及因式分解。

在数学及其他许多研究领域，常常需要求一元多项式的根，而五次及五次以上的多项式的求根公式的不存在，致使多项式的求根问题复杂化。因此通过降次(即把较高次的多项式分解为一些次数较低的多项式的乘积)来化简多项式的求根问题就成为了一种重要途径。而这种“降次”的思想方法的理论依据就是多项式的整除性理论及因式分解理论。本章重点对一元多项式的整除性、因式分解及相关问题的解决方法进行探讨研究。

主要内容

一元多项式的整除性、最大公因式、因式分解、重因式、多项式的根、复系数与实系数多项式、有理系数多项式。

第一节　整除和带余除法

一、基本概念

设$f(x)$，$g(x)$是数域P上的多项式，若存在P上的多项式$h(x)$使得$f(x)=g(x)h(x)$，则称$g(x)$整除$f(x)$，记为$g(x)\mid f(x)$. 若不存在P上的多项式$h(x)$使得$f(x)=g(x)h(x)$，则称$g(x)$不整除$f(x)$，记为$g(x)\nmid f(x)$.

二、主要结论

(1) 两个多项式的整除与否关系不会因系数域扩大而改变.

(2) 整除的基本性质：

① 若$h(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid f(x)$，则$h(x)\mid f(x)$；

② 若$h(x)\mid f_i(x)$，$i=1, 2, \cdots, m$，则对任意多项式$g_i(x)$，$i=1, 2, \cdots, m$，$h(x)\ \Big|\ \sum_{i=1}^{m} f_i(x)g_i(x)$；特别地，若$h(x)\mid f(x)$，$h(x)\mid g(x)$，则$h(x)\mid f(x)\pm g(x)$；若$h(x)\mid f(x)$，则$h(x)\mid f(x)g(x)$；

③ 若$f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid f(x)$，则$f(x)=cg(x)$，$c\neq 0$；

④ 若$g(x)\mid f(x)$，$f(x)\neq 0$，则$g(x)\neq 0$，且$\partial g(x)\leqslant \partial f(x)$；

⑤ 对任意非零常数c，$cf(x)\mid f(x)$，$f(x)\mid cf(x)$；

⑥ 对任意多项式$f(x)$，对任意非零常数c，都有$c\mid f(x)$，$f(x)\mid 0$.

(3) 带余除法定理：

$P[x]$是数域P上的全体多项式组成的集合，若$f(x)$，$g(x)\in P[x]$，$g(x)\neq 0$，则存在唯一一对多项式$q(x)$，$r(x)\in P[x]$，使得

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x),\ r(x)=0 \text{ 或 } \partial r(x)<\partial g(x) \qquad (1)$$

满足(1)式的多项式$q(x)$，$r(x)$分别称为$g(x)$除$f(x)$(或$f(x)$除以$g(x)$)所得的商式和余式.

(4) 商式和余式不会因系数域的扩大而改变.

评注：带余除法定理中对余式的要求$r(x)=0$或$\partial r(x)<\partial g(x)$不能少，否则，仅仅满足$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$的多项式$q(x)$和$r(x)$不是唯一的，而是无穷多.

三、常用方法

(1) 证明$f(x)=g(x)$，常常通过证明$f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid f(x)$，得到$f(x)=cg(x)$，$c\neq 0$,再证明$c=1$.

(2) 对任意非零常数c，都有$cf(x)\mid f(x)$，$f(x)\mid cf(x)$，这本质上是说$f(x)$与$cf(x)$有完全相同的因式和倍式，在讨论与$f(x)$的因式、倍式有关的问题时，可用$cf(x)$来代替$f(x)$,以简化$f(x)$的系数.

(3) 利用带余除法中$g(x)$除$f(x)$的余式为零来证明$g(x)\mid f(x)$，其中$g(x)\neq 0$(命题1.1).

命题 1.1 若$g(x)\neq 0$，则$g(x)\mid f(x)$的充分必要条件是$g(x)$除$f(x)$的余式为零.

证明：$\because g(x)\neq 0$

$\therefore$ 由带余除法定理，存在多项式$q(x)$和$r(x)$使得

$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$，$r(x)=0$或$\partial r(x)<\partial g(x)$

“$\Leftarrow$” $\because g(x)$除$f(x)$的余式为零

$\therefore r(x)=0$，故$f(x)=g(x)q(x)$，即$g(x)\mid f(x)$

“$\Rightarrow$” $\because g(x)\mid f(x)$，由整除的定义，存在多项式$q(x)$使得$f(x)=g(x)q(x)$

$\therefore f(x)=g(x)q(x)+r(x)$，$r(x)=0$

由唯一性，$g(x)$除$f(x)$的余式为零

四、例题解析

例 1：若$f(x)=x^4-3x^3+6x^2+ax+b$，$g(x)=x^2-1$，且$g(x)\mid f(x)$，求a、b的值.

分析：$f(x)$、$g(x)$分别为4次和2次多项式，且它们的首项系数都为1，由整除的定义，应有2次多项式x^2+cx+d使得$f(x)=g(x)(x^2+cx+d)$，再由多项式相等的定义，解出a、b. 或由$g(x)=x^2-1=(x-1)(x+1)$，要使$g(x)\mid f(x)$，就要使$x-1\mid f(x)$，$x+1\mid f(x)$，用综合除法也可求出a、b.

解法一：由待定系数法

$x^4-3x^3+6x^2+ax+b=(x^2-1)(x^2+cx+d)=x^4+cx^3+(d-1)x^2-cx-d$

解得：$a=3$，$b=-7$

解法二：$g(x)=x^2-1=(x-1)(x+1)$

做两次综合除法：$x^4-3x^3+6x^2+ax+b=(x-1)(x^3-2x^2+4x+a+4)+a+b+4$

$$x^3-2x^2+4x+a+4=(x+1)(x^2-3x+7)+a-3$$

得$\begin{cases}a+b+4=0\\a-3=0\end{cases}$

解得：$a=3$，$b=-7$

例2：将$f(x)=(x-2)^4+4(x-2)^3+6(x-2)^2+10(x-2)+20$按$x+3$的幂展开.

分析：如果先将$f(x)$按x的幂展开，再按$x+3$的幂展开，那么需要做两次．但是，如果将$x-2$视为y，即令$y=x-2$，得到一个关于y的多项式$g(y)$，那么由$x+3=y+5$，将$g(y)$按$y+5$的幂展开即可得到所要的展开式.

解：令$y=x-2\Rightarrow x+3=y+5$

$\because f(x)=(x-2)^4+4(x-2)^3+6(x-2)^2+10(x-2)+20=y^4+4y^3+6y^2+10y+20=g(y)$

(2) 若 $d(x)$ 满足：

① $d(x)\mid f(x)$，$d(x)\mid g(x)$；

② 如果 $h(x)\mid f(x)$，$h(x)\mid g(x)$，那么 $h(x)\mid d(x)$，则称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式.

③ 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式只有非零常数，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素.

二、主要结论

(1) 若 $f(x)=g(x)=0$，则 0 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的唯一的最大公因式.

(2) 若 $g(x)\mid f(x)$，则 $g(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式.

(3) 若 $f(x)$，$g(x)$ 不全为零，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式非零，且如果 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式，那么 $\{cd(x)\mid c\neq 0\}$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的所有最大公因式构成的集合. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的所有最大公因式中，首项系数为 1 的只有一个，记为 $(f(x), g(x))$.

(4) $(f(x), g(x))$ 不会因系数域扩大而改变.

(5) 若 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$，则 $(f(x), g(x))=(g(x), r(x))$.

(6) $(f(x), g(x))=(af(x)+bg(x), cf(x)+dg(x))$，其中 $ad-bc\neq 0$.

(7) 最大公因式的性质定理、判定定理：

① 如果 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式，那么存在多项式 $u(x)$、$v(x)$，使

$$d(x)=f(x)u(x)+g(x)v(x)$$

② 如果 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式，且存在多项式 $u(x)$、$v(x)$，使

$$d(x)=f(x)u(x)+g(x)v(x)$$

那么 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式.

③ 如果 $f(x)$，$g(x)$ 不全为零，且 $f(x)=d(x)f_1(x)$，$g(x)=d(x)g_1(x)$，那么 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式 $\Leftrightarrow (f_1(x), g_1(x))=1$.

(8) 互素多项式的性质及判定：

① $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素 $\Leftrightarrow (f(x), g(x))=1$.

② $(f(x), g(x))=1 \Leftrightarrow$ 存在多项式 $u(x)$、$v(x)$ 使 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$.

③ 若 $f(x)\mid g(x)h(x)$，$(f(x), g(x))=1$，则 $f(x)\mid h(x)$.

④ 若 $f(x)\mid h(x)$，$g(x)\mid h(x)$，$(f(x), g(x))=1$，则 $f(x)g(x)\mid h(x)$.

⑤ $(f(x), g(x))=1$，$(f(x), h(x))=1 \Leftrightarrow (f(x), g(x)h(x))=1$.

特别地，$(f(x), g(x))=1 \Leftrightarrow (f^m(x), g^n(x))=1$，其中 m，$n\in Z^+$.

评注：(1)“若 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$，则 $(f(x), g(x))=(g(x), r(x))$”是求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式的一般方法——辗转相除法的理论依据.

(2) 仅满足 $d(x)=f(x)u(x)+g(x)v(x)$ 的 $d(x)$ 未必是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式，其原因是，$d(x)$ 可能不是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式，所以还需附加条件“$d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式”.

(3) 应从实质上来理解“$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1 \Rightarrow (f(x), g(x))=1$”. 实际上由“$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$”不光可得到 $(f(x), g(x))=1$，还可得到 $(u(x), g(x))=1$，$(f(x)u(x), g(x))=1$，等等.

三、常用方法

(1) 证明 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式的常用方法：

① 用定义;

② 用主要结论(7)中的判定定理②、③

(2) $d(x)=(f(x),\ g(x))$, $d_1(x)=(f_1(x),\ g_1(x))$, 证明 $d(x)=d_1(x)$ 的常用方法:

利用 $d(x)$ 及 $d_1(x)$ 的最大公因式"身份",公因式一定是最大公因式的因式,先证明它们相互整除,得到 $d(x)=cd_1(x)$,再由首项系数决定 $c=1$.

(3) "$(f(x),\ g(x))=1\Leftrightarrow$存在多项式 $u(x)$、$v(x)$ 使 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$"是解决与互素有关的问题常用的定理.

命题 1.2 设 P 是一个数域, $a,\ b,\ c,\ d\in P$, $f(x),\ g(x)\in P[x]$, $f_1(x)=af(x)+bg(x)$, $g_1(x)=cf(x)+dg(x)$, 其中 $ad-bc\neq 0$. 求证: $(f_1(x),\ g_1(x))=(f(x),\ g(x))$.

分析: $(f_1(x),\ g_1(x))$ 与 $(f(x),\ g(x))$ 是两个首项系数为 1 的多项式,证明它们相等,可考虑证明它们相互整除.

证明: 设 $(f_1(x),\ g_1(x))=d_1(x)$, $(f(x),\ g(x))=d(x)$

$\because\ d(x)\mid f(x),\ d(x)\mid g(x)$

$\therefore\ d(x)\mid af(x)+bg(x),\ d(x)\mid cf(x)+dg(x)$, 即 $d(x)\mid f_1(x),\ d(x)\mid g_1(x)\Rightarrow d(x)\mid d_1(x)$

$\because\ f_1(x)=af(x)+bg(x)$ (1)

$g_1(x)=cf(x)+dg(x)$ (2)

且 $ad-bc\neq 0$

$\therefore\ f(x)=\dfrac{1}{ad-bc}[df_1(x)-bg_1(x)]$, $g(x)=\dfrac{-1}{ad-bc}[cf_1(x)-ag_1(x)]$

$\because\ d_1(x)\mid f_1(x),\ d_1(x)\mid g_1(x)$

$\therefore\ d_1(x)\mid f(x),\ d_1(x)\mid g(x)\Rightarrow d_1(x)\mid d(x)$

$\because\ d_1(x)$、$d(x)$ 的首项系数都为 1

$\therefore\ d_1(x)=d(x)$, 即 $(f_1(x),\ g_1(x))=(f(x),\ g(x))$

命题 1.3 如果 $f(x),\ g(x)$ 不全为零,且 $f(x)=d(x)f_1(x)$, $g(x)=d(x)g_1(x)$, 那么 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式 $\Leftrightarrow(f_1(x),\ g_1(x))=1$(最大公因式的性质与判定定理).

分析: 题目内容与"互素"有关,所以应考虑用定理"$(f(x),\ g(x))=1\Leftrightarrow$存在多项式 $u(x)$、$v(x)$ 使 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$".

证明: "$\Leftarrow$" $\because\ (f_1(x),\ g_1(x))=1$

$\therefore$ 存在多项式 $u(x)$、$v(x)$ 使 $f_1(x)u(x)+g_1(x)v(x)=1$

$\Rightarrow d(x)f_1(x)u(x)+d(x)g_1(x)v(x)=d(x)$

$\because\ f(x)=d(x)f_1(x),\ g(x)=d(x)g_1(x)$

$\therefore\ f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$

$\because\ d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式

$\therefore\ d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式

"$\Rightarrow$" $\because\ d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式

$\therefore$ 存在多项式 $u(x)$、$v(x)$ 使 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$

$\because f(x)=d(x)f_1(x),\ g(x)=d(x)g_1(x)$

$\therefore d(x)f_1(x)u(x)+d(x)g_1(x)v(x)=d(x)$

$\because f(x),\ g(x)$不全为零

$\therefore d(x)\neq 0 \Rightarrow f_1(x)u(x)+g_1(x)v(x)=1$

故 $(f_1(x),\ g_1(x))=1$

命题1.4 $(f(x),\ g(x))=1,\ (f(x),\ h(x))=1 \Leftrightarrow (f(x),\ g(x)h(x))=1$（互素的性质）

证明："$\Rightarrow$"$\because (f(x),\ g(x))=1,\ (f(x),\ h(x))=1$

$\therefore$ 存在多项式 $u(x)$、$v(x)$、$s(x)$、$t(x)$使

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1 \tag{1}$$

$$f(x)s(x)+h(x)t(x)=1 \tag{2}$$

(1)×(2)得

$f(x)[f(x)s(x)u(x)+g(x)s(x)v(x)+h(x)t(x)u(x)]+g(x)h(x)t(x)v(x)=1$

$\therefore (f(x),\ g(x)h(x))=1$

"$\Leftarrow$" $\because (f(x),\ g(x)h(x))=1$

$\therefore$ 存在多项式 $u(x)$、$v(x)$使$f(x)u(x)+g(x)h(x)v(x)=1$

$\because f(x)u(x)+g(x)[h(x)v(x)]=1,\ f(x)u(x)+h(x)[g(x)v(x)]=1$

$\therefore (f(x),\ g(x))=1,\ (f(x),\ h(x))=1$

四、例题解析

例5：设 m、n 为正整数，求证 $g(x)=x^2+x+1$ 与$f(x)=x^{3m}+x^{3n}$互素.

证明：由例4知 $g(x)=x^2+x+1$ 除$f(x)=x^{3m}+x^{3n}$所得余式 $r(x)=2$，即

$f(x)=g(x)q(x)+2$

$\therefore (f(x),\ g(x))=(g(x),\ 2)=1$

例6：若$(f(x),\ g(x))=1$，则$(f(x^m),\ g(x^m))=1$.

证明：$\because (f(x),\ g(x))=1$

$\therefore$ 存在多项式 $u(x)$、$v(x)$使$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1 \Rightarrow f(x^m)u(x^m)+g(x^m)v(x^m)=1$

故 $(f(x^m),\ g(x^m))=1$

例7：若$(f(x),\ g(x))=1$，则$(f(x)g(x),\ f(x)+g(x))=1$

分析：如果先证得$(f(x),\ f(x)+g(x))=1$及$(g(x),\ f(x)+g(x))=1$，那么由命题1.4即可得到$(f(x)g(x),\ f(x)+g(x))=1$. 而$(f(x),\ f(x)+g(x))=1$的证明则可用添一项减一项的方法证得或利用命题1.2可得$1=(f(x),\ g(x))=(f(x),\ f(x)+g(x))$

证明：$\because (f(x),\ g(x))=1$

$\therefore$ 存在多项式 $u(x)$、$v(x)$使$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$

$\Rightarrow f(x)(u(x)-v(x))+(f(x)+g(x))v(x)=1$

$\therefore (f(x),\ f(x)+g(x))=1$

同理可证$(g(x),\ f(x)+g(x))=1$，由互素的性质命题1.4得$(f(x)g(x),\ f(x)+g(x))=1$

第三节　因式分解与不可约多项式

一、基本概念

设 $p(x)$ 是数域 P 上的多项式，$\partial(p(x))>0$，若在 $P[x]$ 中，$p(x)$ 只有平凡因式 c 及 $cp(x)$，$c\neq0$，则称 $p(x)$ 在数域 P 上不可约；若在 $P[x]$ 中，$p(x)$ 有非平凡因式，则称 $p(x)$ 在数域 P 上可约.

评注：(1) 常数不在可约与不可约的范围，即只有在多项式次数大于 0 的前提下，可约与不可约才是一对矛盾.

(2) 一个多项式的可约与否，与所讨论的数域有关. 如 x^2-2 在有理数域上不可约，在实数域、复数域上都可约；x^2+x+1 在有理数域、实数域上都不可约，在复数域上可约.

二、主要结论

(1) $f(x)$ 是数域 P 上的多项式，$\partial(f(x))>0$，$f(x)$ 在数域 P 上可约的充分必要条件是 $f(x)=g(x)h(x)$，$g(x)$，$h(x)\in P[x]$，$0<\partial(g(x))$，$\partial(h(x))<\partial(f(x))$.

(2) 任何数域上的一次多项式都不可约.

(3) 不可约多项式的性质：

若 $p(x)$ 在数域 P 上不可约，则

① $\forall f(x)\in P[x]$，有 $p(x)\mid f(x)$ 或 $(p(x), f(x))=1$；

② $\forall f(x)$，$g(x)\in P[x]$，如果 $p(x)\mid f(x)g(x)$，那么 $p(x)\mid f(x)$ 或 $p(x)\mid g(x)$.

(4) 若 $p(x)$，$q(x)$ 不可约，则 $(p(x), q(x))=1$ 或 $p(x)=cq(x)$，$c\neq0$.

特别地，若 $p(x)$，$q(x)$ 是两个首项系数为 1 的不可约多项式，则 $(p(x), q(x))=1$ 或 $p(x)=q(x)$.

(5) 因式分解唯一性定理：

数域 P 上的次数大于 0 的多项式，都可以分解成 P 上的一些不可约多项式的乘积. 并且，在不记因子的顺序及因子间相差一个非零常数倍的前提下，这种分解式是唯一的.

(6) 标准分解式：

设 $f(x)$ 是数域 P 上的首项系数为 a 的多项式，$\partial(f(x))=n>0$，则 $f(x)$ 的标准分解式为：

$$f(x)=ap_1^{l_1}(x)p_2^{l_2}(x)\cdots p_s^{l_s}(x)$$

其中 $p_i(x)$ 是数域 P 上的首项系数为 1 的不可约多项式，l_i 为正整数，$i=1, 2, \cdots, s$，$p_i(x)\neq p_j(x)$，$1\leqslant i<j\leqslant s$，$l_1\partial p_1(x)+l_2\partial p_2(x)+\cdots+l_s\partial p_s(x)=n$.

(7) 若 $f(x)$、$g(x)$ 的标准分解式分别为：

$$f(x)=ap_1^{l_1}(x)p_2^{l_2}(x)\cdots p_s^{l_s}(x)$$
$$g(x)=bp_1^{m_1}(x)p_2^{m_2}(x)\cdots p_s^{m_s}(x)$$
$$l_i\geqslant0,\ m_i\geqslant0,\ i=1, 2, \cdots, s$$

则 $(f(x), g(x))=p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x)$，$k_i=\min\{l_i, m_i\}$，$i=1, 2, \cdots, s$.

评注：虽然因式分解定理告知我们，一个次数大于 0 的多项式 $f(x)$ 的分解式是存在

的，但该定理及它的证明并没有告诉我们分解$f(x)$的方法，而实际上，因式分解的一般方法是不存在的，这是已经得到证明的定论，我们所掌握的因式分解的方法都只是特殊方法．所以，多项式的因式分解问题是较复杂的问题，对具体的多项式，要根据它的特点，选择适当的方法对其分解．

三、常用方法

(1) 多项式次数大于0时，可约与不可约是一对矛盾，欲证明次数大于0的多项式$f(x)$不可约，常采用反证法，假设$f(x)$可约，则$f(x)=g(x)h(x)$，$0<\partial(g(x))$，$\partial(h(x))<\partial(f(x))$，由此及已知条件、结论推出矛盾．

(2) 若题目中出现不可约多项式，务必联想不可约多项式的性质：

① 不可约多项式与任何多项式的关系互素和整除二者必居其一；

② 不可约多项式整除多个多项式的积，至少整除其中一个．

(3) 利用标准分解式证明整除、求最大公因式．

命题 1.5　若$p(x)$、$q(x)$都不可约，则$(p(x),\ q(x))=1$或$p(x)=cq(x)$.

特别地，若$p(x)$、$q(x)$都是首项系数为1的不可约多项式，则$(p(x),\ q(x))=1$或$p(x)=q(x)$.

证明：$\because$ $p(x)$不可约，由不可约多项式的性质

$\therefore (p(x),\ q(x))=1$或$p(x)\mid q(x)$

如果$(p(x),\ q(x))=1$，那么结论成立

如果$p(x)\mid q(x)$，那么$p(x)$是$q(x)$的因式

$\because$ $q(x)$不可约

$\therefore$ $q(x)$的因式只有平凡因式c及$cq(x)$，$c\neq 0$

$\because$ $p(x)$不可约，$\partial p(x)>0$

$\therefore p(x)=cq(x)$

当$p(x)$、$q(x)$的首项系数都为1时，$c=1$

四、例题解析

例8：设$f(x)$，$g(x)$，$p(x)$是数域P上的多项式，$p(x)$不可约，若$p(x)\mid f(x)+g(x)$，且$p(x)\mid f(x)g(x)$，则$p(x)\mid f(x)$且$p(x)\mid g(x)$.

分析：由$p(x)$不可约及$p(x)\mid f(x)g(x)$可得$p(x)\mid f(x)$或$p(x)\mid g(x)$，就这两种情形讨论即可．

证明：$\because p(x)\mid f(x)g(x)$，$p(x)$不可约

$\therefore p(x)\mid f(x)$ 或$p(x)\mid g(x)$

$\because$ $p(x)\mid f(x)+g(x)$

$\therefore$ 如果$p(x)\mid f(x)$，那么$p(x)\mid f(x)+g(x)-f(x)$，即$p(x)\mid g(x)$

如果$p(x)\mid g(x)$，那么$p(x)\mid f(x)+g(x)-g(x)$，即$p(x)\mid f(x)$

$\therefore$ $p(x)\mid f(x)$且$p(x)\mid g(x)$

例9：$g^k(x)\mid f^k(x)\Leftrightarrow g(x)\mid f(x)$.

分析：充分性显然，只考虑必要性．

要证$g(x)\mid f(x)$，可考虑证明$g(x)$的因式都是$f(x)$的因式，这样就可得到$g(x)\mid f(x)$.

而要证明 $g(x)$ 的因式都是 $f(x)$ 的因式，利用标准分解式是容易证明的.

证明：充分性显然，只证必要性

(1) 若 $g(x)$ 是常数，则结论成立

(2) 若 $g(x)$ 不是常数，则 $\partial g(x)>0 \Rightarrow f(x)=0$ 或 $\partial f(x)>0$

当 $f(x)=0$ 时，结论成立

当 $\partial f(x)>0$ 时，设 $f(x)$，$g(x)$ 的标准分解式分别为：

$f(x)=ap_1^{l_1}(x)p_2^{l_2}(x)\cdots p_s^{l_s}(x)$，$g(x)=bp_1^{m_1}(x)p_2^{m_2}(x)\cdots p_s^{m_s}(x)$

其中 $p_i(x)$ 为首项系数为 1 的不可约多项式，$l_i\geqslant 0$，$m_i\geqslant 0$，$(p_i(x), p_j(x))=1$，$i\neq j$

$\because\ g^k(x)\mid f^k(x)$

$f^k(x)=ap_1^{kl_1}(x)p_2^{kl_2}(x)\cdots p_s^{kl_s}(x)$

$g^k(x)=bp_1^{km_1}(x)p_2^{km_2}(x)\cdots p_s^{km_s}(x)$

$\therefore p_1^{km_1}(x)p_2^{km_2}(x)\cdots p_s^{km_s}(x)\mid p_1^{kl_1}(x)p_2^{kl_2}(x)\cdots p_s^{kl_s}(x)$

$\Rightarrow p_i^{km_i}(x)\mid p_1^{kl_1}(x)p_2^{kl_2}(x)\cdots p_s^{kl_s}(x)$

$\because\ (p_i(x), p_j(x))=1$，$i\neq j$

$\therefore\ (p_i^{km_i}(x), p_j^{kl_j}(x))=1$，$i\neq j$

故 $p_i^{km_i}(x)\mid p_i^{kl_i}(x)\Rightarrow km_i\leqslant kl_i\Rightarrow m_i\leqslant l_i\Rightarrow p_i^{m_i}(x)\mid p_i^{l_i}(x)$，$i=1, 2, \cdots, s$

$\therefore g(x)\mid f(x)$

例 10：$f(x)$，$g(x)$ 是数域 P 上的多项式，n 为正整数. 求证：$(f^n(x), g^n(x))=(f(x), g(x))^n$.

分析：从要证的结论的形式看，容易想到应该用标准分解式来证.

证明：如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 中有一个是常数，那么结论是成立的.

不妨设 $\partial(f(x))>0$，$\partial(g(x))>0$，设 $f(x)$，$g(x)$ 的标准分解式分别为：

$f(x)=ap_1^{l_1}(x)p_2^{l_2}(x)\cdots p_s^{l_s}(x)$，$g(x)=bp_1^{m_1}(x)p_2^{m_2}(x)\cdots p_s^{m_s}(x)$

则 $f^n(x)=ap_1^{nl_1}(x)p_2^{nl_2}(x)\cdots p_s^{nl_s}(x)$，$g^n(x)=bp_1^{nm_1}(x)p_2^{nm_2}(x)\cdots p_s^{nm_s}(x)$

设 $k_i=\min\{l_i, m_i\}$，$i=1, 2, \cdots, s$

$\because nk_i=\min\{nl_i, nm_i\}$，$i=1, 2, \cdots, s$

$\therefore\ (f(x), g(x))^n=p_1^{nk_1}(x)p_2^{nk_2}(x)\cdots p_s^{nk_s}(x)=(f^n(x), g^n(x))$

第四节　重因式、多项式函数与根

一、基本概念

1. 重因式

设 $p(x)$ 不可约，若 $p^k(x)\mid f(x)$，$p^{k+1}(x)\nmid f(x)$，则称不可约多项式 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的 k 重因式.

当 $k=0$ 时，$p(x)$ 不是 $f(x)$ 的因式；

当 $k=1$ 时，$p(x)$ 是 $f(x)$ 的单因式；

当 $k\geqslant 2$ 时，$p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式.

2. 多项式函数

若$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$是数域$P$上的多项式，$c\in P$，则$f(c)=a_nc^n+a_{n-1}c^{n-1}+\cdots+a_1c+a_0$是数域$P$中的数，称为$f(x)$在$c$处的取值.

$\forall c\in P$，有P中唯一的$f(c)$与之对应，这个由多项式$f(x)$决定的数域P到P的映射仍记为$f(x)$，称为多项式函数.

3. 多项式的根

设$f(x)$是数域P上的多项式，$\forall c\in P$. 若$f(c)=0$，则称c为$f(x)$在P中的一个根.

4. 重　根

若$x-c$是$f(x)$的$k(k\geq1)$重因式，则称c为$f(x)$的k重根.

当$k=1$时，c是$f(x)$的单根；

当$k\geq2$时，c是$f(x)$的重根.

二、主要结论

(1) 若不可约多项式$p(x)$为$f(x)$的$k(k\geq1)$重因式，则$p(x)$是$f(x)$的导数$f'(x)$的$k-1$重因式.

(2) 不可约多项式$p(x)$为$f(x)$的重因式的充分必要条件是$p(x)$是$f(x)$与$f'(x)$的公因式.

(3) $f(x)$有重因式的充分必要条件是$(f(x),f'(x))\neq1$；$f(x)$无重因式的充分必要条件是$(f(x),f'(x))=1$.

(4) 若$f(x)$的标准分解式为：

$$f(x)=ap_1^{l_1}(x)p_2^{l_2}(x)\cdots p_s^{l_s}(x)$$

则$p_i(x)$是$f(x)$的l_i重因式，$i=1,2,\cdots,s$，且$\dfrac{f(x)}{(f(x),f'(x))}=ap_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)$.

(5) $f(x)$，$g(x)$是数域P上的次数不超过n的多项式，$a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1}$是$P$中互不相同的$n+1$个数，若$f(a_i)=g(a_i)$，$i=1,2,\cdots,n,n+1$，则$f(x)=g(x)$.

(6) 若$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，则

①$f(0)=a_0$为$f(x)$的常数项；

②$f(1)=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0$为$f(x)$的各项系数之和；

③$f(-1)=(a_0+a_2+a_4+\cdots)-(a_1+a_3+a_5+\cdots)$为$f(x)$的偶次项系数之和与奇次项系数之和的差.

(7) 余数定理：

$x-c$除$f(x)$所得余数$r=f(c)$.

(8) 根与一次因式的关系：

c是$f(x)$的根（即$f(c)=0$）$\Leftrightarrow x-c\mid f(x)$（即$x-c$是$f(x)$的一次因式）.

评注：(1) 主要结论(1)的逆命题不成立，即条件"$p(x)$是$f(x)$的导数$f'(x)$的k重因式"是"$p(x)$为$f(x)$的$k+1$重因式"的必要条件，而不是充分条件. 例如：$f(x)=x^3+1$，$f'(x)=3x^2$，x是$f'(x)=3x^2$的二重因式，但x不是$f(x)=x^3+1$的因式. 由此例看出，条件不充分的原因是$p(x)$未必是$f(x)$的因式.

(2) 重根是由重因式来定义的，因此$f(x)$无重因式$\Rightarrow f(x)$无重根，但反过来不成立.

例如：$f(x)=(x^2+1)^2$ 在实数域无根，但$f(x)$在实数域上有二重因式 x^2+1.

三、常用方法

(1) $\dfrac{f(x)}{(f(x),f'(x))}=ap_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)$与$f(x)$有完全相同的不可约因式，但 $\dfrac{f(x)}{(f(x),f'(x))}=ap_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)$没有重因式．当$(f(x),f'(x))\neq 1$时，用$f(x)$除以$(f(x),f'(x))$去掉$f(x)$的重因式，降低$f(x)$的次数，以达到求出$f(x)$的不可约因式，最终求出$f(x)$的分解式的目的.

(2) 利用$f(x)$与其导数$f'(x)$互素与否，解决$f(x)$有无重因式问题.

(3) 利用"$f(x)$无重因式$\Rightarrow f(x)$无重根"及其逆否命题"$f(x)$有重根$\Rightarrow f(x)$有重因式"解决$f(x)$有无重因式、重根问题.

(4) 根与一次因式的关系揭示了求根问题与因式分解问题的相辅相成关系，利用这个关系常常可将证明题转化为计算问题来解决．此方法的应用，在第五、第六节中有更多的例子来说明.

(5) 利用$f(0)$、$f(1)$、$f(-1)$的特殊性，快速判定 0、1、-1 是否是$f(x)$的根及简化计算或证明.

命题 1.6 $f(x)$的不可约因式$p(x)$为$f(x)$的 $k+1$ 重因式的充分必要条件是，$p(x)$是$f(x)$的导数$f'(x)$的 k 重因式，其中 $k\geqslant 0$.

证明： 由结论(1)可知必要性成立，下面证充分性

$\because$ $p(x)$是$f(x)$的因式

$\therefore$ 可设$p(x)$为$f(x)$的 s 重因式，$s\geqslant 1$，由必要性$p(x)$是$f(x)$的导数$f'(x)$的 $s-1$ 重因式

$\because$ $p(x)$是$f(x)$的导数$f'(x)$的 k 重因式

$\therefore$ $s-1=k\Rightarrow s=k+1$，即$p(x)$为$f(x)$的 $k+1$ 重因式

命题 1.7 数域 P 上任意一个不可约多项式在复数域中无重根.

分析： 设$p(x)$在数域 P 上不可约，因为"$p(x)$无重因式$\Rightarrow p(x)$无重根"，所以，欲证$p(x)$在复数域中无重根，就去证明$p(x)$在复数域上无重因式．又由不可约多项式的性质可推出$p(x)$与其导数互素，从而$p(x)$在复数域上无重因式.

证明： 设$p(x)$在数域 P 上不可约，则 $\partial p(x)\geqslant 1$

$\because$ $0\leqslant \partial p'(x)<\partial p(x)$

$\therefore$ $p(x)\nmid p'(x)$

$\because$ $p(x)$在数域 P 上不可约

$\therefore$ 在数域 P 上$(p'(x),p(x))=1$

$\because$ $(p'(x),p(x))=1$ 不会因系数域的扩大而改变

$\therefore$ 在复数域上$(p'(x),p(x))=1\Rightarrow p(x)$ 在复数域上无重因式

故$p(x)$在复数域中无重根

四、例题解析

例 11： $f(x)=(x^{10}+x^9+\cdots+x^2+x+1)(x^{10}-x^9+\cdots+x^2-x+1)$，求$f(x)$的奇次项