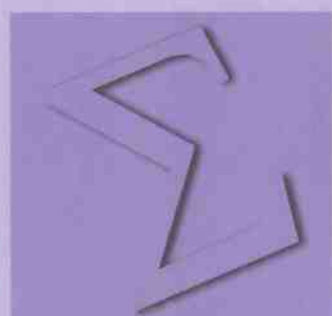




高等学校工科电子类教材

# 数字信号处理

丁玉美 高西全 彭学愚



西安电子科技大学出版社

<http://www.xduph.com>

高等学校教材

# 数字信号处理

丁玉美 高西全 彭学愚

西安电子科技大学出版社

2000

(陕)新登字 010 号

## 内 容 简 介

本书属数字信号处理的理论与分析的基础书,是根据无线电技术与信息系统教材编审委员会规定的教学大纲编写的全国统编教材。

全书共分七章,第一章时域离散信号和系统的理论分析基础,包括时域离散信号与系统基本概念、差分方程、序列的付里叶变换和 Z 变换、系统的频域分析和模拟信号数字处理等。本章是全书的分析基础。第二、三章研究离散付里叶变换及其快速算法 FFT。第四章和第五章分别研究数字滤波器的结构和数字滤波器的理论与设计方法。第六章研究用状态变量法分析研究时域离散系统。第七章讨论数字信号处理中的有限寄存器长度效应。每章后附有习题,书后有四个实验指导。

本书作为无线电技术专业本科生必修课教材,或者作为相近专业本科生选修课教材。也可作为有关科技人员在数字信号处理方面的理论基础参考书。

高等学校教材

### 数字信号处理

丁玉美 高西全 彭学愚

责任编辑 王绍菊

---

西安电子科技大学出版社出版

西安市秦群印刷厂印刷

陕西省新华书店发行 各地新华书店经售

开本 787×1092 1/16 印张 18.25 字数 428 千字

1994 年 6 月第 1 版 2000 年 2 月第 5 次印刷 印数 25 001—29 000

---

ISBN 7-5606-0293-2/TN·0076

定价: 15.00 元

## 出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作的规定，我部承担了全国高等学校和中等专业学校工科电子类专业教材的编审、出版的组织工作。由于各有关院校及参与编审工作的广大教师共同努力，有关出版社的紧密配合，从1978~1990，已编审、出版了三个轮次教材，及时供给高等学校和中等专业学校教学使用。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应“三个面向”的需要，贯彻国家教委《高等教育“八五”期间教材建设规划纲要》的精神，“以全面提高教材质量水平为中心，保证重点教材，保持教材相对稳定，适当扩大教材品种，逐步完善教材配套”，作为“八五”期间工科电子类专业教材建设工作的指导思想，组织我部所属的九个高等学校教材编审委员会和四个中等专业学校专业教学指导委员会，在总结前三轮教材工作的基础上，根据教育形势的发展和教学改革的需要，制订了1991~1995年的“八五”（第四轮）教材编审出版规划。列入规划的，以主要专业主干课程教材及其辅助教材为主的教材约300多种。这批教材的评选推荐和编审工作，由各编委会或教学指导委员会组织进行。

这批教材的书稿，其一是从通过教学实践、师生反映较好的讲义中经院校推荐，由编审委员会（小组）评选择优产生出来的，其二是在认真遴选主编人的条件下进行约编的，其三是经过质量调查在前几轮组织编定出版的教材中修编的。广大编审者、各编审委员会（小组）、教学指导委员会和有关出版社，为保证教材的出版和提高教材的质量，作出了不懈的努力。

限于水平和经验，这批教材的编审、出版工作还可能有缺点和不足之外，希望使用教材的单位，广大教师和同学积极提出批评和建议，共同为不断提高工科电子类专业教材的质量而努力。

机械电子工业部电子类专业教材办公室

## 前 言

本书是在西安电子科技大学信息工程系开设的数字信号处理课程中多次使用的教材基础上,总结作者分别在信息工程系和电子工程系十几年该课程的教学实践经验编写而成。数字信号处理是一门专业基础课,可作为无线电类专业本科生的必修课教材或相近专业本科生选修课教材。编写目的是使同学们能掌握离散时间信号和系统的基本理论、基本分析方法以及 FFT、数字滤波器等数字信号处理技术。本书选材注意少而精,物理概念阐述清楚,叙述问题深入浅出,初学者易接受易自学。

本书先修课是信号与系统、工程概率论等,书中有些内容,如差分方程、Z 变换、随机信号等,可以根据学生先修课情况,作适当的省略或补充。全书共分七章,第一章是数字信号处理的理论分析基础,包括时域离散信号与系统的基本概念、差分方程、序列的付里叶变换和 Z 变换、系统的频域分析和模拟信号数字处理等内容。第二章离散付里叶变换是数字信号处理中的一种重要变换,第三章是它的快速算法 FFT。数字滤波器的结构与理论设计基础部分放在第四章和第五章。状态变量分析法和前五章应用的输入输出描述法都是时域离散系统的基本分析方法,但考虑到用状态变量法分析研究滤波器结构是一种更深入的理论研究,因此,将该内容放在第六章。第七章数字信号处理中的有限寄存器长度效应是数字信号处理的理论问题也是重要的实践问题。

数字信号处理是一门理论与实践联系紧密的课程,为帮助读者学好这门课,本书每章后都附有大量的习题,书后增加四个实验,并提供有关的程序流图及子程序清单。四个实验是:用 FFT 作谱分析;用双线性变换法设计 IIR 数字滤波器;用窗函数法设计 FIR 滤波器;定点实现 IIR 数字滤波器有限字长效应的计算机仿真。

全书教学时数为 70 学时,如果教学计划时数不够,可只进行前五章,或者省略第六章以及第七章的部分内容。

本书由丁玉美主编,高西全编写第二、三章以及实验部分,彭学愚、丁玉美编写第四、五章,其余部分由丁玉美编写。该书由冯一云教授、黄甫堪教授主审,并提出了许多宝贵意见。在编写中还得到了戴树荪教授、谢维信教授的热情指导与关心,在此一并致以衷心的感谢!本书在编写中参阅了许多参考书,这里也向这些作者们表示感谢!

由于作者水平所限,且编写时间仓促,错误与不妥之处在所难免,望读者给予批评指正,不胜感激!

作 者  
1993.7

## 绪 论

在各学科和各种工程技术中，常常需要对信号进行处理，所谓信号处理是对观测信号或数据进行分析、变换、综合等加工处理，以便更好地识别与使用。信号的形式基本上有模拟信号和数字信号两种。模拟信号的幅度和时间都是连续变量，而数字信号的幅度与时间变量均已离散化。过去对模拟信号进行处理，均用模拟系统，其基本元器件是电子管、晶体管、电阻、电容和电感等，近十几年也逐渐形成一些典型电路的集成化芯片。数字信号处理则是用数值计算的方法，完成对信号的处理。因此“处理”的实质是“运算”，运算的基本单元是延时器、乘法器和加法器。数字信号处理可以通过编软件，在通用计算机上完成，也可以根据算法选择一种运算结构，设计专用硬件进行处理，这些专用硬件一般有时序控制器、存储器、运算单元和输入输出接口等。因此也可以称为专用计算机。

由于数字信号处理的对象是数字信号，处理的方式是数值运算方式，因而使它具有许多显著的优点。这些优点归纳起来有：

(1) 数字信号处理具有高度的灵活性，这是它最大的特点。一个系统的性能取决于若干系统参数，这些参数预先放在系数存储器中，只要改变这些存储器中的数据，就可以改变系统的性能，甚至变成另外不同的系统。灵活性还表现在用一套计算设备，分时处理几路信号，即采用时分复用制。

(2) 高稳定性与高精度。数字系统与模拟系统不同，它的特性不易随使用条件变化而变化，尤其采用超大规模集成芯片，设备简化更提高了系统的稳定性与可靠性。运算位数由 8 位提高到 16 位、32 位甚至更高，因此计算精度达到  $10^{-5}$  以上是很容易的。目前很多高精密度测量与处理系统中，都采用数字技术，甚至只有采用数字技术才能达到精度要求。

(3) 便于大规模集成。数字信号处理采用的数字器件有高度的规范性，信号电平不是 1 就是 0，便于大规模集成和大批量生产，同时也带来了体积小、重量轻和高可靠性的好处。

(4) 数字信号可以存储，可以按照理论算法进行运算（不受时间顺序约束），这使处理效果显示出奇异的特点，有些甚至是模拟系统不能达到的。例如电视图像经过存储，可以进行画面压缩；或者利用插值方法进行画面放大；经过坐标旋转运算形成眼花缭乱的数字特技。非因果系统可以采用信号延迟一段时间，用因果系统近似实现等等。因此数字信号处理的特点已完全突破了用模拟系统处理信号的老概念，使数字信号处理不再仅仅局限于模拟系统的逼近上。

(5) 数字信号处理可以获得很高的性能指标。例如 FIR 数字滤波器有着严格的线性相位特点，模拟系统则很难达到。

正是由于以上这些优点，数字信号处理技术和一些算法一出现就受到人们极大的关注。从 60 年代到现在，发展十分迅速，现在不仅已形成一门新兴的独立学科，且数字信号处理技术已广泛应用在通讯、雷达、声纳、遥感、图像处理与识别、语音处理与识别、地球物理、资源考察、人工智能、核技术、生物医学工程等领域。一些模拟系统，也逐渐改用数字信号处理系统，以便提高稳定性和精度，增加新的功能。

当然数字信号处理技术还具有自己的局限性。目前数字信号处理的速度还跟不上发展的需要，一般仅限于处理几十兆赫以下的信号，算法复杂且运算量大的情况还不能进行实

时处理。数字器件和超大规模集成的成本较高，因此对一般要求不高，希望成本降低的系统，仍用模拟系统，或者用通用计算机进行软件处理。现在数字信号处理技术正以惊人的速度向更深和更高的水平方向发展，应用范围不断扩大，其局限性会不断减少，当然更高更新的要求也会不断提出来。

数字信号处理涉及到的内容非常丰富，也非常广泛，本书作为专业基础课介绍数字信号处理的基本理论与基本分析方法。其中介绍了时域离散系统的理论分析基础；三种重要的数学工具：付里叶变换、Z变换和离散付里叶变换；用相当的篇幅介绍数字滤波器的理论与设计方法，最后一章介绍数字信号处理中的有限寄存器长度效应。数字信号处理是一门理论与实践，原理与应用结合紧密的学科，为帮助大家在这方面的学习，每章后附有大量的习题，且书后附有四个实验指导，以便配合教学，或自学者练习用。

# 目 录

## 绪论

<b>第一章 时域离散信号和系统的理论分析基础</b> .....	1
§ 1.1 引言 .....	1
§ 1.2 时域离散信号 .....	1
§ 1.3 时域离散系统 .....	5
§ 1.4 时域离散系统的输入输出描述法——线性常系数差分方程 .....	8
§ 1.5 序列的付里叶变换 .....	10
一、序列付里叶变换定义 .....	10
二、周期序列的离散付里叶级数表示 .....	10
三、周期序列的付里叶变换表示式 .....	11
四、序列付里叶变换的性质 .....	14
§ 1.6 序列的 Z 变换 .....	17
一、Z 变换的定义 .....	18
二、收敛域与序列特性之间的关系 .....	19
三、逆 Z 变换 .....	21
四、Z 变换的性质与定理 .....	25
五、利用 Z 变换解差分方程 .....	29
§ 1.7 时域离散系统的频域分析 .....	30
§ 1.8 模拟信号数字处理 .....	34
一、采样定理及 A/DC .....	35
二、采样恢复及 D/AC .....	37
三、模拟信号数字滤波 .....	39
习题 .....	41
<b>第二章 离散付里叶变换(DFT)</b> .....	46
§ 2.1 离散付里叶变换的定义 .....	46
§ 2.2 离散付里叶变换的基本性质 .....	49
§ 2.3 频率域采样 .....	55
§ 2.4 DFT 的应用举例 .....	57
一、用 DFT 计算线性卷积 .....	57
二、用 DFT 对信号进行谱分析 .....	60
习题 .....	69
<b>第三章 快速付里叶变换(FFT)</b> .....	73
§ 3.1 引言 .....	73
§ 3.2 基 2 FFT 算法 .....	73
一、直接计算 DFT 的特点及减少运算量的基本途径 .....	73
二、时域抽取法基 2 FFT 基本原理 .....	74
三、DIT-FFT 算法与直接计算 DFT 运算量的比较 .....	77
四、DIT-FFT 的运算规律及编程思想 .....	77
五、频域抽取法 FFT(DIF-FFT) .....	81



六、IDFT 的高效算法 .....	84
§ 3.3 基 $r$ FFT 算法 .....	85
一、基 2 FFT 算法递推公式 .....	85
二、基 $r$ FFT 算法 .....	89
§ 3.4 混合基 FFT 算法 .....	94
§ 3.5 分裂基 FFT 算法 .....	96
一、分裂基 FFT 算法原理 .....	96
二、分裂基 FFT 算法的运算量 .....	102
三、分裂基 FFT 算法程序及说明 .....	102
习题 .....	105
<b>第四章 数字滤波网络</b> .....	<b>106</b>
§ 4.1 引言 .....	106
一、用信号流图表示网络结构 .....	106
二、根据信号流图求系统函数 .....	108
三、网络结构分类 .....	108
§ 4.2 无限脉冲响应系统的基本网络结构 .....	110
一、直接型 .....	110
二、转置型 .....	111
三、级联型 .....	112
四、并联型 .....	113
§ 4.3 有限脉冲响应系统的基本网络结构 .....	114
一、直接型 .....	114
二、级联型 .....	115
三、线性相位有限脉冲响应系统网络结构 .....	115
四、频率采样结构 .....	117
§ 4.4 几种特殊的数字滤波网络 .....	120
一、全通网络 .....	120
二、梳状滤波器 .....	122
三、格形滤波器 .....	122
习题 .....	125
<b>第五章 数字滤波器的设计</b> .....	<b>130</b>
§ 5.1 引言 .....	130
§ 5.2 设计 IIR 滤波器的一种简易方法——零极点累试法 .....	131
§ 5.3 从模拟滤波器设计 IIR 数字滤波器 .....	133
一、脉冲响应不变法 .....	134
二、双线性变换法 .....	138
三、数字滤波器的频率变换 .....	146
四、从归一化模拟低通滤波器到希望类型的数字滤波器的直接转换 .....	150
§ 5.4 IIR 数字滤波器的计算机辅助设计 .....	152
一、IIR 数字滤波器频域最小均方误差设计 .....	153
二、IIR 数字滤波器时域最小均方误差设计 .....	155
三、最小平方逆滤波设计法 .....	158
§ 5.5 FIR 数字滤波器设计概述 .....	159

§ 5.6	利用窗函数法设计 FIR 滤波器 .....	164
§ 5.7	用频率采样法设计 FIR 滤波器 .....	173
§ 5.8	FIR 数字滤波器的优化设计 .....	177
§ 5.9	IIR 与 FIR 数字滤波器的比较 .....	182
习题	.....	183
<b>第六章</b>	<b>用状态变量法分析研究时域离散系统</b> .....	<b>187</b>
§ 6.1	状态方程与输出方程 .....	187
§ 6.2	由系统传输函数确定系统状态方程和输出方程的几种方法 .....	191
一、	用直接法建立状态方程和输出方程 .....	192
二、	用巢式法建立状态方程和输出方程 .....	195
三、	用部分分式法建立状态方程和输出方程 .....	196
四、	用级联法建立状态方程和输出方程 .....	198
五、	由基本信号流图确定运算次序 .....	200
§ 6.3	由状态变量分析法转换到输入输出分析法 .....	202
§ 6.4	线性变换 .....	206
习题	.....	207
<b>第七章</b>	<b>数字信号处理中的有限字长效应</b> .....	<b>210</b>
§ 7.1	量化及量化误差 .....	210
一、	二进制数的表示方法 .....	210
二、	量化及量化误差 .....	212
三、	量化误差的统计分析 .....	215
§ 7.2	A/D 变换器中的量化误差及其统计模型 .....	215
§ 7.3	数字滤波器中的系数量化效应 .....	218
一、	系数量化对极零点位置的影响 .....	218
二、	系数量化效应的统计分析 .....	219
§ 7.4	定点制数字滤波器的溢出极限环振荡 .....	222
一、	溢出非线性特性 .....	223
二、	零输入溢出极限环振荡的产生 .....	223
三、	溢出极限环振荡的消除 .....	225
四、	为防止溢出对状态空间进行线性变换——标准滤波器结构 .....	227
§ 7.5	数字滤波器中的运算量化效应 .....	229
一、	IIR 滤波器由于定点舍入处理引起的极限环振荡 .....	229
二、	定点乘法运算量化效应的统计分析 .....	231
三、	浮点运算中量化效应的统计分析 .....	237
§ 7.6	定点制 FFT 系统中量化误差及防溢出措施 .....	239
一、	蝶形运算统计模型 .....	239
二、	FFT 乘法运算量化误差 .....	240
三、	防溢出措施 .....	241
习题	.....	243
<b>实验</b>	.....	<b>246</b>
实验一	用 FFT 作谱分析 .....	246
实验二	用双线性变换法设计 IIR 数字滤波器 .....	253
实验三	用窗函数法设计 FIR 数字滤波器 .....	255

实验四 定点实现 IIR 数字滤波器有限字长效应的计算机仿真 .....	257
附录 .....	263
附录 A 模拟滤波器设计 .....	263
附录 B 用 Mason 公式求网络传输函数 $H(z)$ .....	278
附录 C 矩阵的幂和逆矩阵的计算方法 .....	279
参考文献 .....	281

---

# 第一章 时域离散信号和系统的理论分析基础

---

## § 1.1 引言

信号通常是时间  $t$  的函数。信号的幅度和时间  $t$  可以取连续值也可以取离散值。对于幅度取连续值, 时间  $t$  也取连续值的信号称为模拟信号或时域连续信号; 对于幅度取连续值而时间  $t$  取离散值的信号称为时域离散信号或离散时间信号; 对于幅度和时间  $t$  均取离散值的信号称为数字信号。

一些原始信号源的信号, 例如语音信号、图像信号等是模拟信号, 如果按规定的的时间间隔对其采样, 得到的采样信号是时域离散信号, 再将采样信号的幅度用二进制编码表示, 存放在一定长度的寄存器或存储器中, 这样信号幅度必须用有限位的二进制编码表示。用有限位二进制编码表示的信号称数字信号。时域离散信号的幅度用有限位二进制编码表示, 称为幅度离散化或量化, 数字信号就是幅度量化的时域离散信号。对模拟信号进行采样、二进制编码及量化是 A/D (Analog/Digital) 变换器完成的。

信号有模拟信号、时域离散信号和数字信号之分, 根据系统输入输出信号是哪一类性质的信号, 系统也有模拟系统、时域离散系统和数字系统之分。当然也有模拟电路和数字电路构成的混合系统。为了分析方便, 本章及本书大部分只讨论分析时域离散信号和系统, 对于幅度量化的影响放在第七章进行讨论。

在模拟系统中, 对信号与系统的描述与分析有微分方程、付里叶变换及拉氏变换; 在数字信号处理中则有差分方程、序列付里叶变换及 Z 变换。作为数字信号与系统理论分析基础, 本章将重点讨论这两种重要的数学变换, 并利用它们对信号及系统进行频域分析。

在绪论中介绍了数字信号处理的许多优点, 且有些性能是模拟系统无法完成的, 因此将模拟信号经过 A/D 变换器, 形成数字信号, 利用数字技术进行处理, 处理完毕再由 D/A (Digital/Analog) 变换器还原成模拟信号, 这种处理方法称为模拟信号数字处理。

## § 1.2 时域离散信号

对模拟信号  $x_a(t)$  进行等间隔采样, 采样间隔为  $T$ , 得到的采样信号  $\hat{x}_a(t)$  与  $x_a(t)$  之间关系为

$$\hat{x}_a(t) = x_a(nT) \quad -\infty < n < \infty \quad (1.2.1)$$

将  $n$  的取值代入  $\hat{x}_a(t)$ , 得到一串数字序列:  $\cdots x(-2T), x(-T), x(0), x(T), x(2T) \cdots$ , 这

样一个有序的数字序列就是时域离散信号。在实际信号处理中, 这些信号值要按顺序存放在存储器或寄存器中, 此时  $nT$  并不明显代表采样时刻, 代表的是前后顺序, 为了简单将  $T$  去掉, 并用集合符号  $\{x(n)\}$ ,  $-\infty < n < \infty$ , 表示该序列,  $x(n)$  则表示第  $n$  个序列值。  $n$  只能取整数, 对于非整数  $n$  序列无定义。为避免符号繁琐, 序列也常用  $x(n)$  表示。如果序列  $x(n)$  是由模拟信号  $x_a(t)$  采样得到的, 在数值上序列  $x(n)$  与模拟信号  $x_a(t)$  的关系如下式:

$$x(n) = x_a(nT) \quad (1.2.2)$$

序列变化规律可用公式表示, 也可用图形表示, 图 1.2.1 表示了一个具体的时域离散信号——序列。下面介绍几个常用的典型序列:

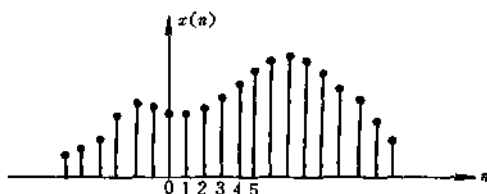


图 1.2.1 时域离散信号的表示

(1) 单位脉冲序列  $\delta(n)$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.2.3)$$

单位脉冲序列只在  $n=0$  时, 取确定值 1, 其它皆为 0, 如图 1.2.2 所示。单位脉冲序列也称单位取样序列, 它与模拟系统中单位冲击函数  $\delta(t)$  起一样的作用, 因此  $\delta(n)$  是数字信号处理中重要序列之一。

(2) 单位阶跃序列  $u(n)$

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1.2.4)$$

单位阶跃序列用图 1.2.3 表示, 它类似于模拟系统中的单位阶跃函数  $u(t)$ 。单位脉冲

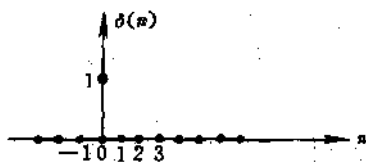


图 1.2.2 单位脉冲序列

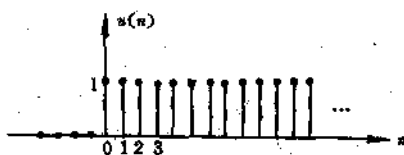


图 1.2.3 单位阶跃序列

序列与单位阶跃序列之间关系用下式表示:

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \quad (1.2.5)$$

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k) \quad (1.2.6)$$

(3) 矩形序列  $R_N(n)$

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其它 } n \end{cases} \quad (1.2.7)$$

矩形序列在  $0 \leq n \leq N-1$  取值为 1, 其它为 0, 一般称矩形序列长度为  $N$ , 例如  $R_4(n)$  表示长度为 4。矩形序列可用单位阶跃序列表示:

$$R_N(n) = u(n) - u(n-N) \quad (1.2.8)$$

(4) 实指数序列

$$x(n) = a^n u(n), \quad a \text{ 为实数}$$

如果  $|a| < 1$ ,  $x(n)$  随  $n$  增大, 模值逐渐减小, 称为收敛序列; 如  $|a| > 1$ ,  $x(n)$  模值随  $n$  加大而加大, 称为发散序列。如图 1.2.4 所示。

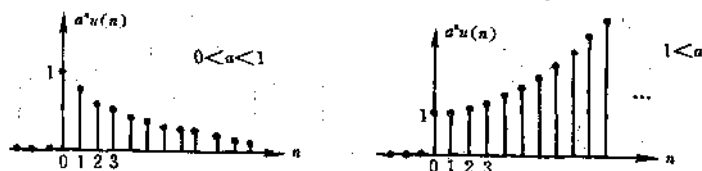


图 1.2.4 实指数序列

### (5) 正弦序列

$$x(n) = \sin(\omega n)$$

式中  $\omega$  称为正弦序列的数字域频率, 单位是弧度, 它表示序列变化的速率, 或者说表示二个相邻序列值之间变化的弧度数。

如果正弦序列是由模拟信号  $x_a(t) = \sin \Omega t$  采样得到的, 可以写成:

$$x(n) = x_a(nT) = \sin(\Omega nT)$$

对照

$$x(n) = \sin(\omega n)$$

得到

$$\omega = \Omega T \quad (1.2.9)$$

由(1.2.9)式表明, 由模拟信号采样得到的序列, 其数字频率  $\omega$  与模拟信号的模拟角频率  $\Omega$  成线性关系。考虑采样频率  $f_s$  和采样间隔  $T$  的关系为  $f_s = 1/T$ , 可得

$$\omega = \frac{\Omega}{f_s} \quad (1.2.10)$$

(1.2.10)式表示数字频率是模拟角频率对采样频率  $f_s$  的归一化频率。下面我们均用  $\omega$  表示数字频率,  $\Omega$  或  $f$  表示模拟角频率或模拟频率。

### (6) 复指数序列

$$x(n) = e^{(\sigma + j\omega_0)n}$$

式中  $\omega_0$  为数字频率。复指数序列也可以用其实部虚部或者极坐标表示:

$$x(n) = e^{\sigma n} \cos(\omega_0 n) + j e^{\sigma n} \sin(\omega_0 n)$$

$$x(n) = e^{\sigma n} e^{j\omega_0 n}$$

如果  $\sigma = 0$ ,  $x(n) = e^{j\omega_0 n}$ , 由于  $n$  只取整数, 下面等式成立

$$e^{j(\omega_0 + 2\pi M)n} = e^{j\omega_0 n}, \quad M = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

上式表明当  $\sigma = 0$  时, 复指数序列的频率具有以  $2\pi$  为周期的周期性, 在以后的研究中可以仅考虑一个周期就够了。

### (7) 周期序列

如果序列  $x(n)$  满足下式:

$$x(n) = x(n + N), \quad -\infty < n < \infty \quad (1.2.11)$$

且  $N$  是满足(1.2.11)式的最小正整数, 则称  $x(n)$  是以  $N$  为周期的周期序列。例如:

$$x(n) = \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) = \sin\frac{\pi}{4}(n + 8)$$

因此  $\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$  是以 8 为周期的周期序列, 如图 1.2.5(a) 所示。对于一般的正弦序列  $\sin(\omega n)$  满足下式:

$$\sin(\omega n) = \sin\left(\omega\left(n + \frac{2\pi}{\omega}\right)\right)$$

如果  $2\pi/\omega$  为实整数, 例如  $\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$ , 则是周期序列, 周期为  $2\pi/\omega$ ; 如果  $2\pi/\omega$  是有理数, 设  $2\pi/\omega = Q/P$ ,  $Q$  与  $P$  互为素数, 可写成

$$\sin(\omega n) = \sin\left(\omega\left(n + \frac{2\pi}{\omega}P\right)\right)$$

此时仍为周期序列, 周期为  $(2\pi/\omega)P$ , 例如:  $x(n) = \sin(2.5\pi n)$ ,  $2\pi/\omega = 4/5$ , 则  $x(n)$  为周期序列, 周期为 4, 序列波形如图 1.2.5(b) 所示; 如果  $2\pi/\omega$  为无理数, 例如  $\sin\frac{1}{4}n$ ,  $2\pi/\omega = 8\pi$ , 则是非周期函数。其它如  $e^{j\omega n}$ , 也有类似的情况。

以上介绍了几种典型常用的序列, 对于任意序列  $x(n)$  常用下面公式表示:

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) \quad (1.2.12)$$

式中

$$\delta(n-m) = \begin{cases} 1, & n=m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

(1.2.12) 式提供了任意序列用加权单位延时采样序列线性组合表示方法, 在以后的分析中是一个有用的公式。

在数字信号处理中, 需要对序列进行运算, 其基本运算有三种:

(1) 序列乘以常数  $a$ , 例如  $y(n) = a \cdot x(n)$

(2) 两序列相加, 例如  $y(n) = x_1(n) + x_2(n)$ 。注意相加时, 要求同序号的序列值相加。

(3) 序列移位, 例如:  $y(n) = x(n-n_0)$ , 是将  $x(n)$  延时  $n_0$  个单位作为  $y(n)$  序列。

例如:  $x(n) = R_4(n)$

$$y(n) = x(n-2)$$

$x(n)$  与  $y(n)$  的波形图如图 1.2.6 所示。

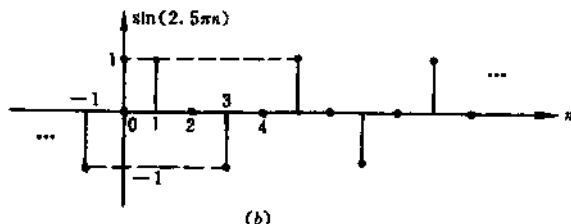
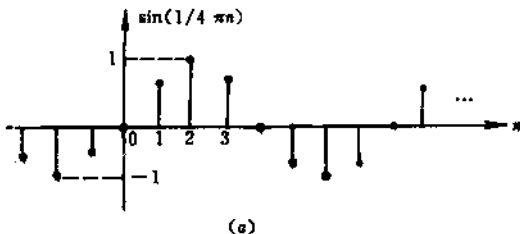


图 1.2.5 周期序列

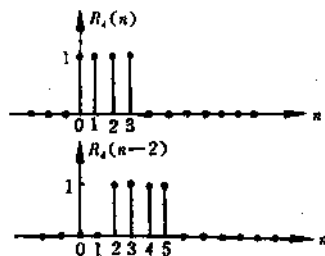


图 1.2.6 序列移位

### § 1.3 时域离散系统

时域离散系统的输入信号为  $x(n)$ ，经过规定运算，系统输出序列用  $y(n)$  表示。设运算关系用  $T[\cdot]$  表示，输出与输入之间关系可以表示成

$$y(n) = T[x(n)]$$

如图 1.3.1 所示。

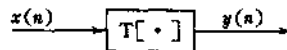


图 1.3.1 时域离散系统

在时域离散系统中，最重要并最常用的是线性时不变系统。这是因为很多物理过程都可用这类系统表征，且便于分析。

#### (一) 线性系统

凡是满足叠加原理的系统称为线性系统。设  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  分别作为系统的输入序列，输出序列分别为  $y_1(n)$  和  $y_2(n)$ ，即

$$y_1(n) = T[x_1(n)]; \quad y_2(n) = T[x_2(n)]$$

当且仅当

$$\begin{aligned} y(n) &= T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] \\ &= ay_1(n) + by_2(n) \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

时，该系统称为线性系统。式中  $a$  和  $b$  为任意常数。

#### (二) 时不变系统

如果系统的运算关系  $T[\cdot]$  在整个运算过程中不随时间变化，这种系统称为时不变系统。设系统的输出序列  $y(n) = T[x(n)]$ ，对于输入移位  $n_0$  的序列  $x(n-n_0)$ ，如果是时不变系统，一定满足下面关系式：

$$y(n-n_0) = T[x(n-n_0)], \quad n_0 \text{ 为任意整数}$$

例如：系统的输出输入关系为

$$y(n) = kx(n)$$

如果式中  $k$  为常数，将  $x(n)$  移位  $n_0$ ，如果是时不变系统，输出  $y_1(n)$  一定满足下列关系式：

$$y_1(n) = kx(n-n_0) = y(n-n_0)$$

如果将  $k$  换成  $n$ ，

$$y(n) = nx(n)$$

$$y_1(n) = T[x(n-n_0)] = n(n-n_0) \neq y(n-n_0)$$

因为  $y(n-n_0) = (n-n_0)x(n-n_0)$ ，此系统属时变系统。本书中不作另外说明时，系统均看做线性时不变系统。

#### (三) 线性时不变系统输入输出的关系

设系统输入序列  $x(n) = \delta(n)$ ，系统输出  $y(n)$  初始状态为零，定义这种条件下系统输出



为系统的单位取样响应  $h(n)$ ，也就是说  $h(n)$  是系统对  $\delta(n)$  的零状态响应。用公式表示：

$$h(n) = T[\delta(n)] \quad (1.3.2)$$

$h(n)$  和模拟系统中的单位冲击响应  $h(t)$  一样，它代表了系统的时域特征。

现在假设系统输入为一般序列  $x(n]$ ，按照公式(1.2.12)

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)$$

此时系统输出为

$$y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)\right]$$

根据线性系统的叠加性质

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)T[\delta(n-m)]$$

又根据时不变性质

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = x(n) * h(n) \quad (1.3.3)$$

式中的符号“\*”代表卷积运算。(1.3.3)

式说明，线性时不变系统的输出序列等于输入序列和系统的单位取样响应的卷积。

例如： $x(n) = R_4(n)$ ， $h(n) = R_4(n)$

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_4(m)R_4(n-m)$$

式中， $R_4(m)$  在  $0 \leq m \leq 3$  区间取非零值 1， $R_4(n-m)$  在  $n-3 \leq m \leq n$  区间取非零值 1，因此

当  $0 \leq n \leq 3$  时

$$y(n) = \sum_{m=0}^n 1 = n + 1$$

当  $4 \leq n \leq 6$  时

$$y(n) = \sum_{m=n-3}^3 1 = 7 - n$$

该例的卷积过程及最后  $y(n)$  波形如图 1.3.2 所示。

两序列的卷积是一个序列与另一个序列倒置后逐次移位乘积之和，故称为离散卷积，也称两序列的线性卷积。按照(1.3.3)式，如果  $x(n)$  序列长度为  $N$ ， $h(n)$  序列长度为  $M$ ，卷积结果  $y(n)$  的长度为  $(N+M-1)$ 。

离散卷积运算服从交换律、结合律和分配律，它们分别用公式表示如下：

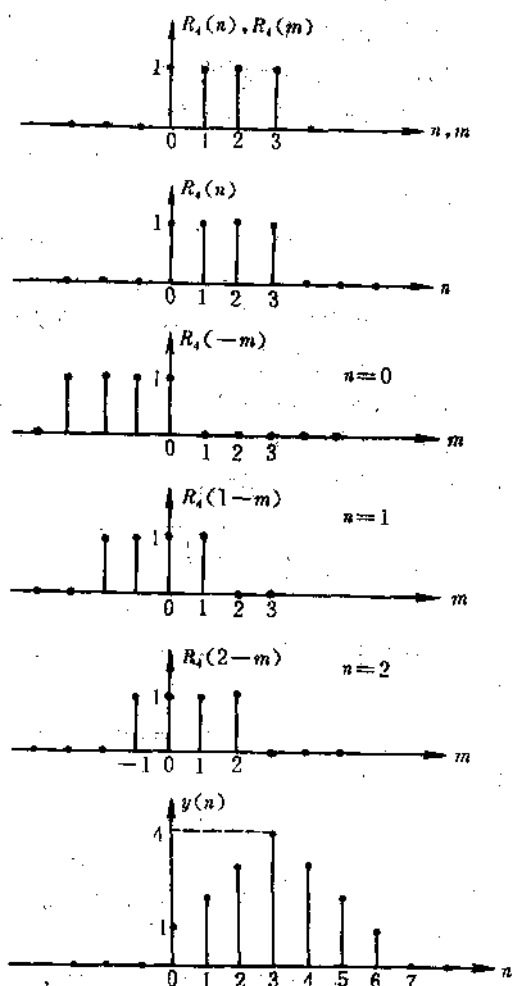


图 1.3.2  $R_4(n)$  与  $R_4(n)$  的线性卷积