备用

弹性地基上的矩形板

（提纲）

西南交通大学铁道系

一九七七年八月

弹性地基上的矩形板（提纲）

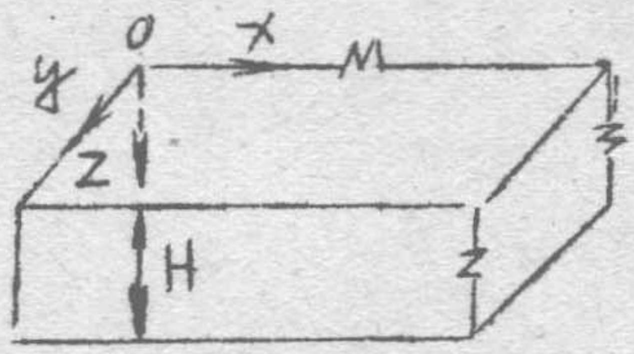
〔取材于 В.З.ВЛАСОВ и др.: "БАЛКИ, ПЛИТЫ И ОБОЛОЧКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ" (1960)〕

ΓΛ、I、§7 具有两个特征的弹性地基之空间模型

假设：$u(x,y,z)\equiv 0$，$v(x,y,z)\equiv 0$ （7．1）

$$w(x,y,z)=w(x,y)\psi(z) \tag{7.2}$$

根据具体条件事先选择的函数——位移竖向分布函数



则微分方程为

$$\frac{1-\nu_0}{2}r_{11}\nabla^2 w(x\ y)-S_{11}w(x\ y)+\frac{1-\nu_0{}^2}{E_0}q_1$$

$$=0 \tag{7.3}$$

其中：$\nu_0=\dfrac{\nu_{rp}}{1-\nu_{rp}}$，$E_0=\dfrac{E_{rp}}{1-\nu_{rp}^2}$，

E_{rp}、ν_{rp}——弹性地基的弹性模量及横向变形系数

$$\nabla^2 w(x,y)=\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \tag{7.4}$$

$$r_{11}=\int_0^H \psi^2(z)dz,\quad S_{11}=\int_0^H \psi'^2(z)dz$$

（7.5）

$$q_1=\int_0^H q(x,y,z)\psi(z)dz \tag{7.6}$$

若外荷载仅有表面力 $q(x,y)$则 $q_1=q(x,y)\varphi(0)$

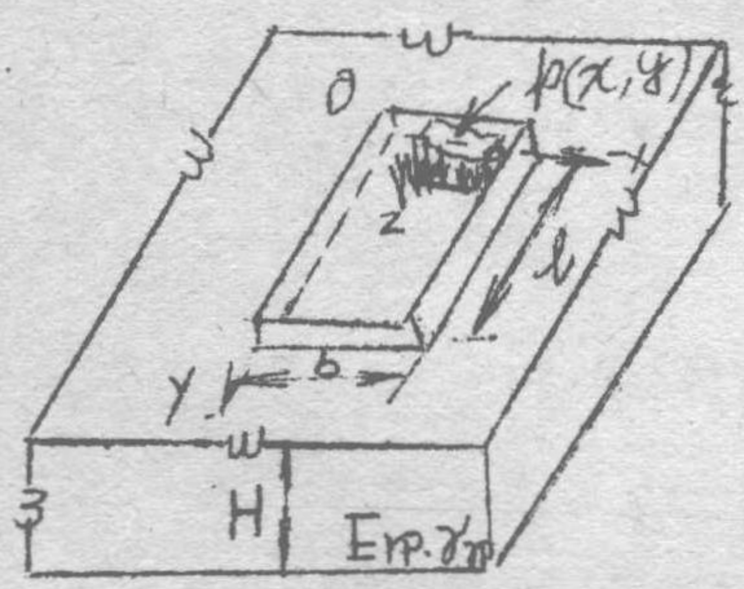
$$(7.7)$$

微分方程(7.3)可写作

$$2t\nabla^2 w(x,y)-kw(x,y)+q_1=0 \qquad (7.8)$$

$$t=\frac{E_0 r_{11}}{4(1+\nu_0)},\quad k=\frac{E_0 S_{11}}{1-\nu_0^2}\quad \text{地基的弹性特征} \qquad (7.9)$$

ГЛ.Ⅲ, §1　弹性地基上板的弯曲微分方程



略去板与弹性地基表面之间的摩擦力及粘结力，板弯曲的微分方程为

$$\nabla^2\nabla^2 w(x,y)=\frac{p^*}{D} \qquad (1.1)$$

即

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{p^*}{D} \qquad (1.2)$$

其中：

$w=w(x,y)$——板的挠曲面；基本未知函数；

$p^*=p^*(x,y)$——作用于板上的外力，

$$p^*(x,y)=\underbrace{p(x,y)}_{\text{给定的表面力}}-\underbrace{q(x,y)}_{\text{弹性地基的分布反力}} \qquad (1.3)$$

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$ ——板的圆柱刚度

式(1.2)虽称之为薄板的弯曲方程，但据研究甚至当板厚与短边之比为1:3时亦可用。

弹性地基的微分方程如前(7.8)所示，可写为

$$-2t\nabla^2 w(x,y)+kw(x,y)=q(x,y)\psi(o)$$

(1.4)

根据板与地基在接触表面的位移相容条件，微分方程(1.2)及(1.4)亦相容。为简化计算，选择函数$\psi(z)$时使$\psi(o)=1$将方程(1.4)中的$q(x,y)$代入板的弯曲微分方程(1.2)得：

$$\nabla^2\nabla^2 w-2\left(\frac{t}{D}\right)\nabla^2 w+\left(\frac{k}{D}\right)w=\frac{p}{D}$$

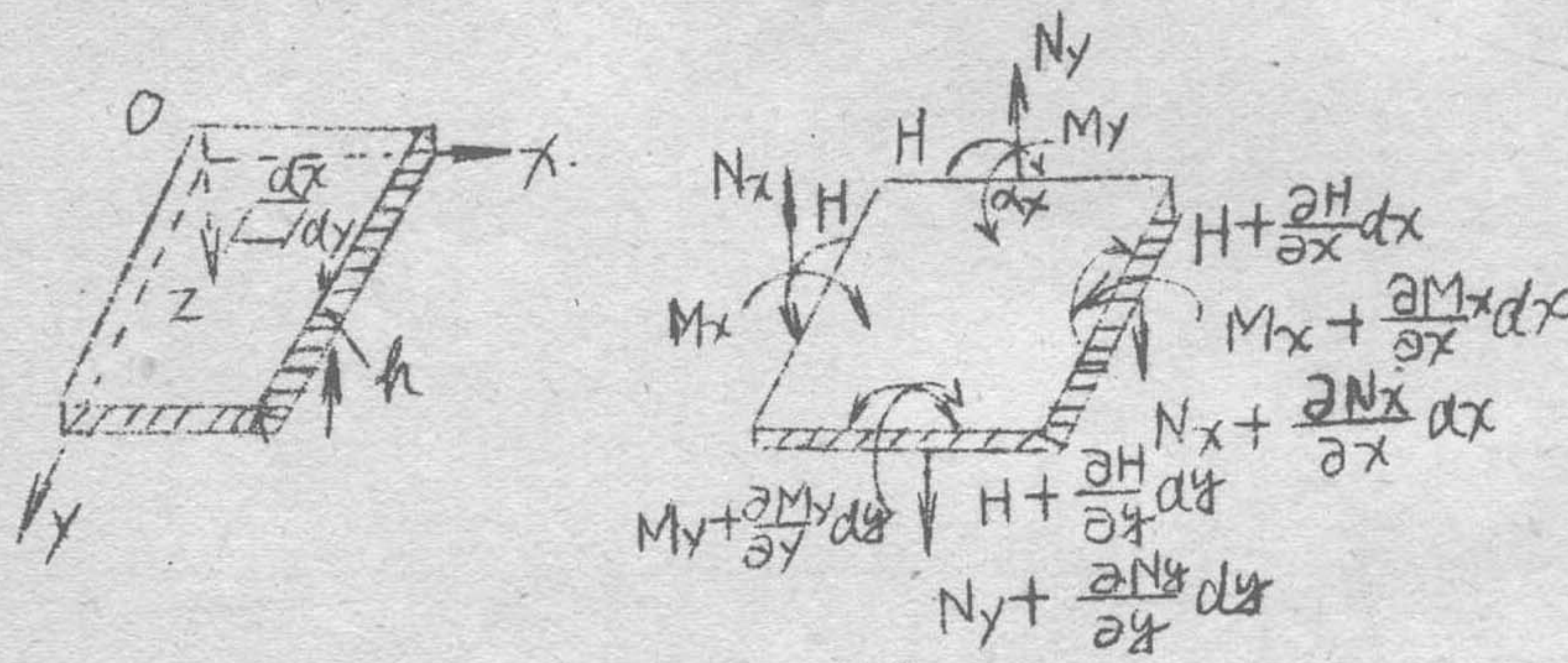
即 $$\boxed{\nabla^2\nabla^2 w-2r^2\nabla^2 w+S^4 w=\frac{p}{D}}$$ 基本方程 (1.5)

其中：
$$\left.\begin{aligned} r^2&=\frac{t}{D}=\frac{E_0}{4(1+\nu_0)D}\int_0^H \psi^2(z)dz,\\ S^4&=\frac{k}{D}=\frac{E_0}{(1-\nu_0^2)D}\int_0^H \psi'^2(z)dz \end{aligned}\right\}$$ 板及地基的广义弹性特征

(1.6)

$$E_0=\frac{E_{rp}}{1-\nu_{rp}^2},\quad \nu_0=\frac{\nu_{rp}}{1-\nu_{rp}}$$ (1.7)

由微分方程(1.5)及板的给定的边界条件确定了板的挠度函数$w(x,y)$后，可由方程(1.4)求得地基反力$q(x,y)$，並根据下列公式求板的内力：



$$M_x=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

$$M_y=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

弯矩

$$H=H_x=-H_y=-D(1\overset{-}{\cancel{+}}\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

—扭矩　(1.8)

$$N_x=-D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$N_y=-D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

剪力

剪力N_x、N_y及扭矩H可以用相当的换算剪力Q_x、Q_y替代(根据Кирхгоф)。对于矩形板，换算剪力Q_x、Q_y为

$$
\left.\begin{aligned}
Q_x &= -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right] \\
Q_y &= -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (1.9)
$$

ГЛ.Ⅲ、§2　将弹性地基上板的弯曲问题变换成普通微分方程

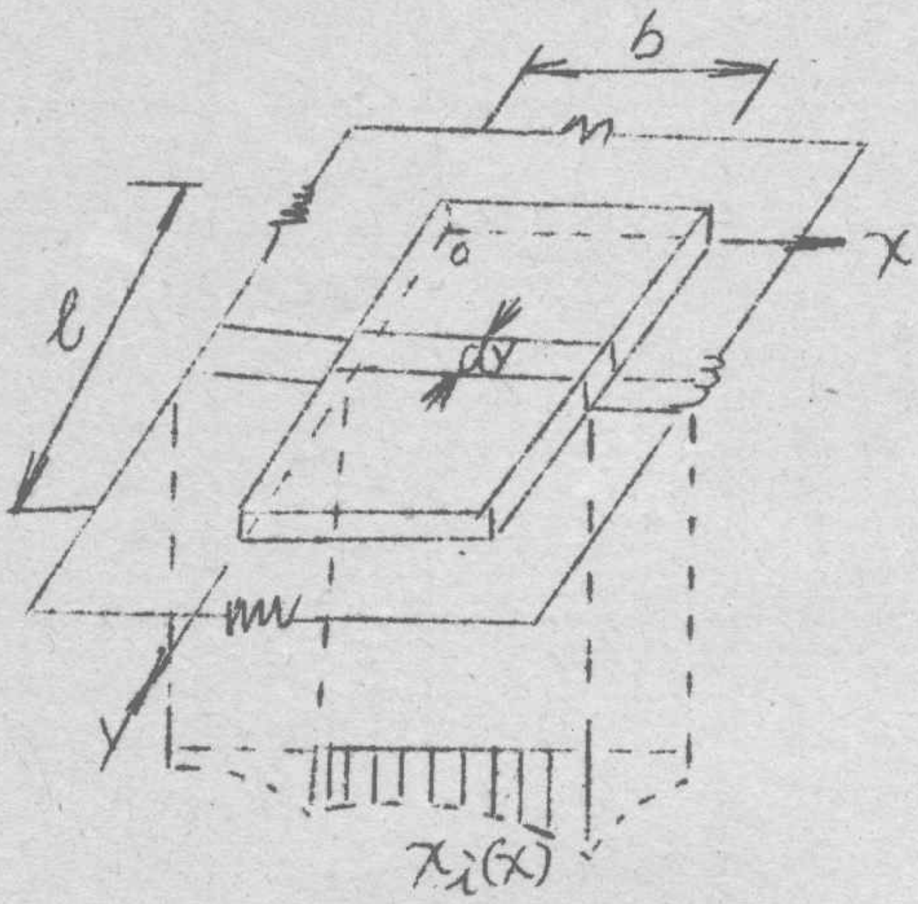
1、概述

板的弯曲问题是数学弹性理论中最复杂的问题之一。只有对于少数边界条件才能得到严格的分析解。在大多数情况下，不可能得到基本微分方程（1.5）的严格的分析解，即以变量 x、y 表示的挠度函数 $w(x、y)$ 的有限项公式。通常都利用级数求近似解；但就实用计算来说足够简单和方便的三角级数解法也只适宜于边界条件的某些特殊情况。下面介绍的则是更为一般的方法，即将基本微分方程变换成普通微分方程的方法——变分法。此时，所研究的板在横向及纵向边缘上可以具有任何边界条件，而且板的厚度可以在一个或两个方向按阶梯状变化。

2、将二维问题变换成一维问题

将板的未知挠度表面（二个变量的函数）写成如下有限项和的形式：

$$
w(x,y)=\sum_{k=1}^{n} W_k(y)\,x_k(x) \qquad (2.1)
$$



其中：$\chi_k(x)$——无量纲的一组函数，反映板的挠度在横向的变化，系事先选择，称为挠度横向分布函数；

$W_k(y)$——假定的一组函数，具有挠度的量纲，称为广义挠度。挠度横向分布函数虽可用各种不同方法选择~~（见后）~~，但必须是线性独立的，並满足板的纵向边界上的几何边界条件。例如，满足几何边界条件

$$\chi_k(0)=\chi_k(b)=0$$

的这样一组函数的最简单的例子是由三角函数 $\sin\frac{k\pi x}{b}$ 组成的级数，其中 k 为由1至n的所有整数。

为了确定未知函数 $W_k(y)$，利用由横截面 y 及 $y+dy$ 从所研究的系统（板十弹性地基）中取出之基本片的平衡条件。后者在此系指，根据虚位移原理，基本片之全部外力及内力在所有虚位移（可能位移）上所作功的总和等于零。

取在板的放置范围内顶面挠度由一个函数 $\chi_i(x)$ 决定的竖直平面内的圆柱弯曲（此时相应的广义挠度 $W_i(y)=1$）作为基本片第 i 个可能位移的形式。由于板的整个可能位移系由 n 个线性独立函数 $\chi_i(x)$ 组成，所以可以毫无困难地列出 n 个独立的平衡条件，並从而解出所有 n 个未知函数 $W_k(y)$。

3．基本片的广义平衡条件

为了列出广义平衡条件，分别考虑作用在截面y及$y+dy$之间板片及弹性地基片上的那些力。在板的基本片上，除给定的外荷载以外，还有来自弃去部分的力M_y、Q_y及$M_y+\frac{\partial M_y}{\partial y}dy$、$Q_y+\frac{\partial Q_y}{\partial y}dy$。此外，板片的顶角处尚有集中竖直力$2H$及$2(H+\frac{\partial H}{\partial y}dy)$，它们是由扭矩根据克希霍夫定理换算成静力相当横向力所致。所有这些力对于所研究的板片而言是外力。发生在$x=$常量之纵截面上的应力则是板片的内力，它们构成弯矩M_x及换算横向力Q_x。对于弹性地基的受压层来说，作用在竖直面y及$y+dy$上的正应力及剪应力是外力，而内力则是正应力σ_x、σ_z及剪应力τ_{zx}及τ_{xz}。

现在计算上面提到的每一个力所作的功。

作用在板片上的内力功系指弯矩M_x及剪力Q_x在相应变形上所作功。但剪力Q_x所作功由于在板的弯曲理论中采用的基本几何假定——法线仍为直线——而等于零。对于宽度为dy的板片，弯矩所作功为

$$\int M_x x_i'' dx ,\qquad (2.2)$$

积分遍及于所取出的板片之整个长度，即由0至b。

对于宽度为dy的板片，外力功系由下列各部分组成：

a）给定的外荷载所作功：

$$G_1=\int p(x,y)x_1(x)dx,\qquad (2.3)$$

此积分实际上不仅应考虑分布荷载$p(x,y)$，而且应考虑集中

外力和外力矩，因此，上式可以下列形式表示：

$$G_1=\int p(x,y)\chi_1(x)dx+\sum p_c(y)\chi_1(c)+\sum m_c(y)\chi_1'(c) \qquad (2.4)$$

式中，$p_c(y)$及$m_c(y)$分别为集中于$x=x_c$直线上的竖直荷载及横向外力矩，而$\chi_1(c)$及$\chi_1'(c)$则分别为截面$x=x_c$处相应函数的值。应该注意，作用在板两侧的换算剪力$Q_x(a)$、$Q_x(b)$及弯矩$M_x(a)$、$M_x(b)$也属于集中力。

b）换算剪力Q_y及$Q_y+\frac{\partial Q_y}{\partial y}dy$所作功为

$$\int\frac{\partial Q_y}{\partial y}\chi_1(x)dx。\qquad (2.5)$$

B）集中横向力$2H$及$2(H+\frac{\partial H}{\partial y}dy)$所作功为

$$-2[\frac{\partial H}{\partial y}\chi_1]^* \qquad (2.6)$$

此处及以后，带星号的方括号用以表示括号内的量在板片边界点处之值的差。

注意，纵向弯矩M_y在对板片所取可能位移（当$W_1(y)=1$时的$\chi_1(x)$）上作的功系等于零。

作用在由弹性地基中取出的基本片上之内力和外力，它们所作的功由于基本假设：

$$u(x,y,z)=0,\quad v(x,y,z)=0$$

而仅取决于正应力σ_z、剪应力τ_{zx}分别在压缩变形及剪切变形

上作的功，以及分布在y及$y+dy$面上的剪应力τ_{zy}及$\tau_{zy}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}dy$所作功。这种功以$R_i(y)$表示。

把作用在所研究的基本片上的全部外力功和内力功总加起来，可以列出此基本片相应于n个可能位移中任一个χ_i的积分平衡条件如下：

$$\int M_x\chi_i''dx+\int\frac{\partial Q_y}{\partial y}\chi_i dx-2\left[\frac{\partial H}{\partial y}\chi_i\right]^*+R_i+G_i=0 \tag{2.7}$$

$$(i=1,\ 2,\ 3\cdots\cdots,\ n)$$

4、弹性地基的外力功和内力功

首先研究在实践中最重要的情况——板的两个纵向边界不受约束。

从函数$w(x,y)$（表示弹性地基表面的沉陷）连续（包括在板的纵向边界上连续）的条件出发，把板的范围以外地基的沉陷近似地用下列展开式表示：

$$w(x,y)=\sum_{k=1}^{n}W_k(y)\chi_{ok}(x)。 \tag{2.8}$$

上式中，函数$W_k(y)$如前一样是广义挠度，而无量纲函数$\chi_{ok}(x)$由下列两式确定：

$$\left.\begin{aligned}&\text{板左侧外面，}x\leqq 0\text{处}\quad \chi_{ok}=\chi_k(0)e^{\alpha x}\\&\text{板右侧外面，}x\geqq b\text{处}\quad \chi_{ok}=\chi_k(b)e^{-\alpha(x-b)}\end{aligned}\right\}\tag{2.9}$$

其中，$\alpha=\sqrt{\dfrac{k}{2t}}$，$k$ 及 t ——弹性地基的广义特征（参看 ГЛ. I 中的式7.9），$\chi_k(0)$ 及 $\chi_k(b)$ ——挠度横向分布函数 $\chi_k(x)$ 在板的纵向边界（$x=0$ 及 $x=b$）处的値。

这样，弹性地基片的每一个竖直可能位移

$$\overline{w}_1(x, y)=1\cdot\chi_1(x)$$

就相应于板的范围以外弹性地基表面之完全确定的位移。

计算弹性地基片的外力和内力在可能位移上所作功时要注意，弹性地基之点的位移如 ГЛ. I 公式（7.2）所示为

$$w(x, y, z)=w(x, y)\psi(z)。$$

因此，弹性地基表面的竖直位移：

$$\overline{w}_1(x, y)=1.\chi_1(x)$$

将与弹性地基之点的下列竖直位移相应：

$$\overline{w}_1(x, y, z)=1\cdot\chi_1(x)\psi(z)。\qquad(2.10)$$

分布在弹性地基片 y 及 $y+dy$ 面上的剪应力 τ_{zy} 及 $\tau_{zy}+\dfrac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}dy$ 在式（2.10）所示竖直位移上作的功等于：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_0^H\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}\chi_1(x)\psi(z)dz。\qquad(2.11)$$

内部的应力 σ_z、τ_{zx} 在反映竖直位移〔式(2.10)〕的变

形上所作功分别为

$$\left.\begin{aligned}&-\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{0}^{H}\sigma_{z}\chi_{1}(x)\psi'(z)dz\\&-\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{0}^{H}\tau_{zx}\chi_{1}'(x)\psi(z)dz\end{aligned}\right\}\qquad(2.12)$$

式(2.11)及(2.12)中的应力σ_z、τ_{zy}、τ_{zx}在ΓΛ. I中式(7.1)、(7.2)及ΓΛ.Ⅲ中式(2.1)所示条件：

$$u(x,y,z)\equiv 0,\quad v(x,y,z)\equiv 0,$$
$$w(x,y,z)=w(x,y)\psi(z),\quad w(x,y)=\sum_{k=1}^{n}W_k(y)\chi_k(x)$$

下，分别为：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_z&=\frac{E_0}{1-\nu_0^2}\psi'(z)\sum_{k=1}^{n}W_k(y)\chi_k(x),\\\tau_{zy}&=\frac{E_0}{2(1+\nu_0)}\psi(z)\sum_{k=1}^{n}W_k'(y)\chi_k(x),\\\tau_{zx}&=\frac{E_0}{2(1+\nu_0)}\psi(z)\sum_{k=1}^{n}W_k(y)\chi_k'(x).\end{aligned}\right\}(2.13)$$

要注意，公式(2.13)仅可用来计算 位于板下的那部分弹性地基中的应力，而要计算板的范围以外之弹性地基中的应力，根据式(2.8)，应将公式(2.13)中的函数$\chi_k(x)$、$\chi_k'(x)$分别以$\chi_{0k}(x)$、$\chi_{0k}'(x)$代替。

将式(2.13)代入式(2.11)、(2.12)並积分，得弹性地基的外力及内力功之表达式如下：

$$R_1(y)=\sum_{k=1}^{n}\{2t\int\chi_k\chi_i\,dx+\frac{t}{a}[[\chi_k\chi_i]]\}W_k''$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\{k\int\chi_k\chi_i\,dx+2t\int\chi_k'\chi_i'\,dx$$

$$+2at[[\chi_k\chi_i]]\}W_k\ , \qquad (2.14)$$

其中：

$$k=\frac{E_0}{1-\nu_0^2}\int_0^H\psi'^2(z)dz\ ,\ t=\frac{E_0}{4(1+\nu_0)}\int_0^H\psi^2(z)dz,$$

$$a=\sqrt{\frac{k}{2t}}\,。\qquad (2.15)$$

公式(2.14)中的积分系在板的全宽内计算，即积分限为 0 到 b。双方括号[[ ]]系指括号内的量在板边缘($x=0$ 及 $x=b$)处两个值之和。

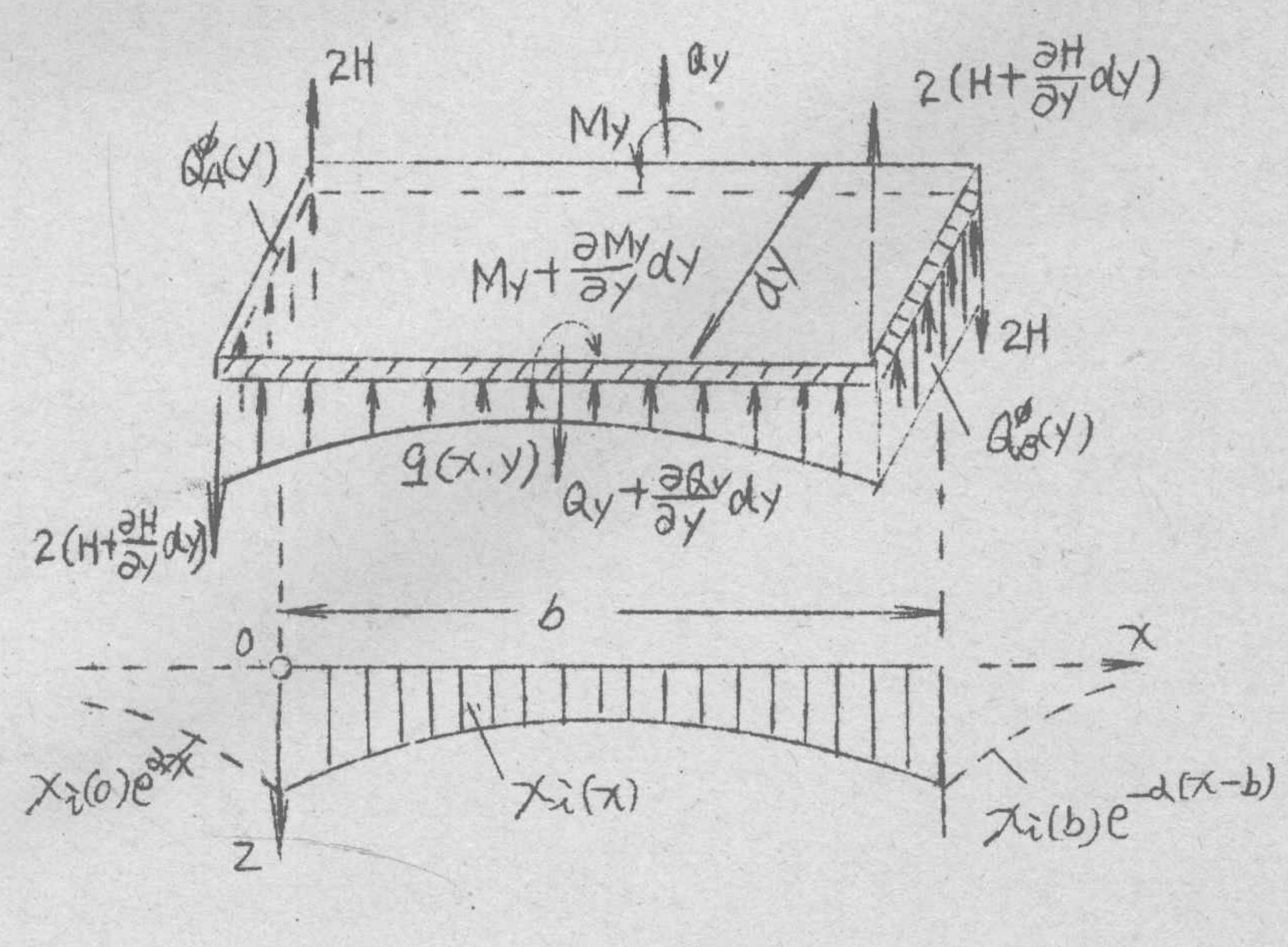
当板的纵向边缘系铰支或刚性嵌固，因而该处不可能有竖直位移[$\chi_k(0)=\chi_k(b)=0$]时，板外的弹性地基不作功。在此情况下，公式(2.14)就简化成下列形式：

$$R_1(y)=\sum_{k=1}^{n}\{2t\int\chi_k\chi_i\,dx W_k''$$

$$-(k\int\chi_k\chi_1\,dx+2t\int\chi_k'\chi_1'\,dx)W_k\}. \qquad (2.16)$$

5、列出广义平衡条件的另一方法

位于板下之弹性地基所作的功可以按照与前面所述略有不同的形式来加以考虑。首先，如前一样，把板的挠度表面写成式(2.1)的形式，即$w(x, y)=\sum_{k=1}^{n}W_k(y)\chi_k(x)$。为了确定广义挠度$W_k(y)$，这里研究由横截面$y$及$y+dy$从板中取出的基本片之平衡条件（图　）。在这种基本片上，除了作用有外荷载及来自板的弃去部分的内力以外，还作用有弹性地基的分布反力。



取当$W_1(y)=1$时由函数$\chi_1(x)$确定挠度的圆柱弯曲作为板片第1个可能位移的形式。这样，板片的广义平衡条件又可写

成下列形式：

$$\int M_x X_i'' dx + \int \frac{\partial Q_y}{\partial y} X_i dx - 2\left[\frac{\partial H}{\partial y} X_i\right]^* + R_i + G_i$$

$$= 0,$$

其中，$G_i = G_i(y)$——给定的外荷载所作的功，而$R_i = R_i(y)$——弹性地基的分布反力在板片的可能位移$\bar{w}_i(x, y) = 1 \cdot X_i(x)$上所作的功。

根据弹性地基微分方程(1.4)：

$$-2t\nabla^2 w(x, y) + kw(x, y) = q(x, y)\psi(o)$$

及板的挠度表面有限项和表达式(2.1)：

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^{n} W_k(y) X_k(x)$$

可得出用以确定分布反力$q(x, y)$的表达式：

$$-2t\sum_{k=1}^{n} W_k X_k'' - 2t\sum_{k=1}^{n} W_k'' X_k + k\sum_{k=1}^{n} W_k X_k = q(x, y) \cdot 1$$

即 $$q(x, y) = k\sum_{k=1}^{n} W_k X_k - 2t\sum_{k=1}^{n} W_k X_k'' - 2t\sum_{k=1}^{n} W_k'' X_k \,. \tag{2.17}$$

分布反力(2.17)在位移X_i上所作功现在可以写成：

$$-\int q(x,y)x_i\,dx = 2\sum_{k=1}^{n} t\int x_k x_i\,dx\,W_k''$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\left(k\int x_k x_i\,dx + 2t\int x_k' x_i'\,dx\right.$$

$$\left.-2t[x_k' x_i']^*\right)W_k \qquad (2.18)$$

这里，利用了普遍积分公式：

$$\int F'(x)\cdot f(x)\,dx = F(x)\cdot f(x) - \int F(x)\cdot f'(x)\,dx\text{。}$$

位于板的范围以外不受荷载作用的那部分地基的影响用集中（板的纵向边缘单位长度上的线分布力）虚力 Q^{ϕ} 来计及：

$$\left.\begin{aligned} Q^{\phi}_A &= -2t\sum_{k=1}^{n}\Big\{W_k[x_k'(0) - a x_k(0)] + \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{2a}x_k(0)W_k''\Big\} \\ Q^{\phi}_B &= 2t\sum_{k=1}^{n}\Big\{W_k[x_k'(b) + a x_k(b)] \\ &\qquad\qquad - \frac{1}{2a}x_k(b)W_k''\Big\} \end{aligned}\right\} \qquad (2.19)$$

这些反力在可能位移 x_i 上所作的功为

$$-[Q^{\phi}_A x_i(0) + Q^{\phi}_B x_i(b)]$$

$$= -\sum_{k=1}^{n}\Big\{(2t[x_k' x_i]^* + 2at[[x_k x_i]])W_k$$

$$-\frac{t}{a}[[x_k x_i]]W_k''\Big\}\text{。} \qquad (2.20)$$