高等学校教学用書

彈性理論

徐芝綸編

人民教育出版社

本书簡述彈性理論的基本原理和解題方法，而着重說明物理概念和工程应用，由平面問題进入空間問題，并对薄板、薄壳和基础梁的問題进行比較詳細的討論。本书除第一章緒論以外，其余各章末尾都有习題和答案，以便讀者在每一阶段学习以后作自我測驗。

本书可作为高等学校土建、水利类各专业彈性理論課程的教本及其他工程专业彈性理論課程的参考书，亦可供工程設計人員自修之用。

彈　性　理　論

徐芝綸編

人民教育出版社出版 高等学校教材編輯部 北京宣武門內承恩寺7号
（北京市书刊出版业营业許可証出字第2号）
商务印書館上海厂印刷　新华书店发行

統一书号 15010·878　开本 850×1168 1/32　印張 12 6/16
字数 295,000　印数 2,001—14,000　定价(4) ¥ 1.40
1960年4月第1版　1960年6月上海第2次印刷

目　　录

第一章　緒論

§1-1. 彈性理論的內容

彈性理論，又称为彈性力学，乃是理論物理的一部分，其中研究力对于彈性体的作用，而着重研究这些力所产生的应力和形变，以及与形变有关的位移。

建筑工程师們研究彈性理論，为的是深入了解各种建筑物在彈性阶段的应力状态和形变状态，从而寻求和改进这些建筑物的計算方法，使其能同时滿足安全和經济两方面的要求。因此，彈性理論也列为建筑力学的一部分。这样，建筑力学便分为三門学科：材料力学，結构力学和彈性理論。

这三門学科在研究对象上作了适当的分工。在材料力学里，基本上只研究杆状构件，也就是长度远大于寬度和厚度的构件。这种构件在拉压、剪切、弯曲、扭轉作用下的应力和形变，是材料力学的研究对象。在結构力学里，主要是研究杆状构件所組成的整个結构，也就是所謂杆件系統，例如桁架、剛架等等。非杆状构件，例如板和壳，以及擋土墻、堤壩、地基等实体結构，只能在彈性理論里加以充分研究。对杆状构件作进一步的、精确的分析，也須用到彈性理論。可見，彈性理論所包括的問題的种类，要比材料力学和結构力学广泛得多。

虽然在材料力学和彈性理論里都研究杆状构件，然而研究的方法却不相同。在材料力学里研究杆状构件，常常引用一些关于构件的形变状态或应力分布的假設，这就大大簡化了数学推演，但是，得出的解答往往是近似的而不是精确的。在彈性理論里研究

杆状构件，一般都不必引用那些假設，而是严格地根据靜力学、几何学、物理学三方面的条件来考虑，因而得出的結果比較精确，并且可以用来校核材料力学里得到的近似解答。

例如，在材料力学里研究梁的弯曲，我們引用了平面截面的假設，得出的結果是：横截面上的正应力（弯应力）按直綫分布，图1-1, *a*。在彈性理論里研究这同一个問題，就无須引用平面截面的假設。相反地，我們可以用彈性理論里的結果来校核这个假設的正确性，并且由此判明：如果梁的高度并不远小于梁的跨度，而两者是同等大小的，那末，横截面上的正应力并不按直綫分布，而是按曲綫分布的，如图 1-1, *b* 所示。

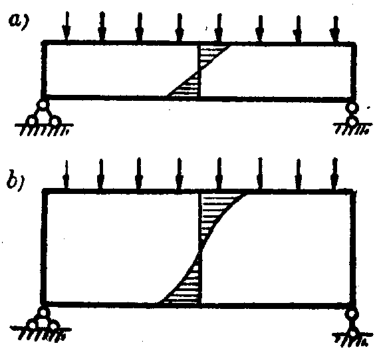

图 1-1.

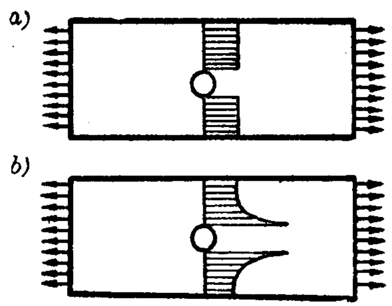

图 1-2.

又例如，在材料力学里計算有孔的拉伸构件，通常就假設拉应力在凈截面上均匀分布，图 1-2, *a*。彈性理論指出，凈截面上的拉应力远不是均匀分布，而在孔边发生高度的应力集中；孔边的最大拉应力要比平均拉应力大得很多，图 1-2, *b*。

彈性理論可以分为数学彈性理論和实用彈性理論两部分。在数学彈性理論里，只用精确的数学推演而不引用关于形变状态或应力分布的假設。本书的第二章到第七章属于数学彈性理論。在实用彈性理論里，和在材料力学里一样，也引用这一类的假設来簡

化推演，得出具有一定近似性的解答。这样，按照解答的精确程度說来，实用彈性理論是接近材料力学的；但是，由于其中所研究的問題比較复杂，需要比較复杂的数学工具，同时还要用到数学彈性理論中的結果，所以归入彈性理論。本书的第八章到第十章属于实用彈性理論。

§ 1-2. 彈性理論的发展簡史

彈性理論的发展过程，和其他学科的发展过程一样，是首先从生产經驗的累积和科学实驗的綜合得到一些粗淺的理論，然后再把这些理論应用于生产实踐，在应用的过程中間又累积了更丰富的經驗，再結合进一步的科学实驗而得到更完善的理論，継續发展。彈性理論經过这样循环往复的过程，到目前已經发展成为相当完善的一門学科。

远在古代，人們就通过建筑物的建造和車、船、工具的制造积累了一些实际經驗。从公元前几百年开始，就有一些建筑师和技师們致力于制訂建筑物的計算理論。但是，这些理論多半是从臆想得来，沒有被科学实驗和足够的实踐所証实，因而沒有什么实用价值，对于建筑力学的发展（特別是对于彈性理論的发展）并不起什么作用。

艺术家、物理学家兼工程师芬奇（1452—1519 年）曾提出有关材料强度的一些見解，并且指出："实踐是科学理論的最終准繩，……我認为，那些不产生于实驗（一切眞实之母）并終結于实驗的科学，都是无价值和充滿錯誤的。"他的这种完全符合于現代科学方法論的見解，不但公正地批判了过去的建筑物計算理論，同时也指出后一阶段的努力方向。

在十七和十八世紀期間，主要是发展了材料力学。数学家兼力学家伽利来（1564—1642 年）曾进行过梁的弯曲实驗，并在 1638

年提出了他自己对于梁的强度的見解。虽然他的見解是有錯誤的，但是，因为他首創地开始了实驗研究工作，所以很多人認为他是“强度科学”的創立者。

此后，虎克进行过大量的实驗工作，并在1678年提出了拉伸情况下力与形变成正比的定律；馬立奧特在1680年将这一定律应用于梁的弯曲；柏努利曾提出平面截面的假設，并立出梁軸彈性曲綫的微分方程式（1705年）；欧拉継續在梁軸彈性曲綫方面进行研究，并創立了压杆的縱弯曲理論（1757年）；庫倫提出了現在材料力学中所用的梁的弯曲理論（1776年），并研究了圓軸的扭轉（1784年）；楊氏确立了关于拉伸彈性模数的概念，并用实驗方法决定这个模数（1807年）。这样，到十九世紀初叶，就奠定了材料力学的基础，并为彈性理論的創始准备好了基地。

十八世紀末年的工业革命导致工厂的发展和机器的使用，这就常常要求解决有关建筑物和机器强度的一些技术問題。这些問題越来越复杂，而且越来越多样化，使得旧有的材料力学知識越来越显得不够用，而迫切需要創立一个一般性的理論来加以解决。彈性理論就是在这种情况下开始发展的。

首先研究彈性体的一般平衡方程式的是納維叶。他在1821年向巴黎科学院提出的报告，被認为是彈性理論的創始。在1822年到1827年的期間，歌西建立了“物体內一点的应力状态”这个概念，建立了形变与位移之間的微分关系，并导出了彈性体的运动和平衡方程式。稍后，拉密利用应力与形变之間的綫性关系和形变与位移之間的微分关系，从平衡微分方程式中消去应力，得出位移所应当滿足的一組微分方程式，可以用来求解位移，从而求得形变和应力。在1864年，森維南导出了形变所应当滿足的微分方程式，也就是所謂形变协調方程式或相容方程式。这就可能建立应力所应当滿足的一組完备的方程式；求解这一組方程式，就可能直

接求得应力而不必首先决定位移。到此为止，彈性理論已有了稳固的基础；求解彈性理論的一些簡单問題，往往可以归結为按照边界条件求解一組微分方程式的数学問題。

起初，彈性理論只用来分析一般的物理問題，例如彈性体中波的傳播問題和地壳中的应力問題等等。从十九世紀中叶开始，彈性理論才用来解答工程上的問題。首先是基尔希霍夫解答了薄板問題（1850 年），拉密解答了圓筒和空心圓球的問題（1852 年），森維南解答了柱形杆扭轉和弯曲的問題（1855—1856 年）。后来，艾雷解答了平面問題（1862 年），阿隆提出了薄壳問題（1874 年），伽道林分析了套筒問題（1875 年），布希涅斯克解答了半无限大彈性体在边界上受力的問題（1878 年），赫芝解答了接触問題（1882 年），郭洛文解答了曲杆的純弯曲問題（1882 年）。这些貢献对于建筑工程和机械工程都有很大的帮助。

在二十世紀，新型建筑結构的使用，大型水工建筑物的建造，飞机和船舶上輕型构件的采用等等，都促进彈性理論进一步地、更迅速地发展。在这一阶段，彈性理論的发展具有和以往不同的下列特点：

（1）俄国和苏联科学家的領先。从二十世紀初叶开始，俄国科学家在建筑力学方面的貢献就有超过西方国家的趋势。在偉大的十月社会主义革命之后，随着社会主义建設中各种建筑物的建造，苏联科学家們在彈性理論方面的成就更是西方国家所望尘莫及。例如，穆斯海里什維里繼柯洛索夫之后，广泛地应用复变数函数解决了很多平面問題；伽辽尔金对平衡微分方程式組提出了三項双諧函数式的解答，并将它应用于厚板問題；巴普柯維奇提出了四項双諧函数式的解答，并将它应用于平面問題和空間軸对称問題；費洛宁柯-鮑罗第契用他所提出的特种函数来分析棱柱体內的应力；别辽耶夫和施塔也尔芒发展了彈性体接触問題；符拉索夫拟

定了薄壁构造的一般理論;此外还有布勃諾夫、鉄摩辛柯、第尼克、雷本尙等等科学家提出一些新的研究方法,并求出許多重要实用問題的具体解答。这些成就,往往是在提出了若干年之后才被西方国家得知的。

(2) 近似法和比拟法的使用。由于很多問題的边界条件非常复杂,很难从彈性理論的微分方程組求得精确解答,工程师和力学家們就发展了一些近似計算法。例如,雷茨提出了能量法(1908年),馬尔庫斯提出了差分法(1932年),苏斯威尔提出了松弛法(1935年),等等。这些方法使得一些重要的工程問題有了近似的、但也足够精确的解答。另一方面,由于彈性理論中某些問題的基本方程式的形式相似,有的还和其他学科中某些問題的基本方程式相似,科学家們又創造了一些比拟法,利用一个問題的解答求出另一个問題的解答。例如,普郎都提出了常截面杆扭轉問題的薄膜比拟法(1903年),維加特提出了平面問題的薄板比拟法(1908年),鉄摩辛柯提出了悬臂梁弯曲問題的薄膜比拟法(1913年),开尔文提出了常截面杆扭轉問題的流体动力学比拟法(1912年),賈可卜生提出了变截面杆扭轉問題的电学比拟法(1925年)。这些比拟法不但有助于用数学方法求解問題,而且提供了用实驗方法量測应力或位移的可能性。

(3) 非綫性彈性理論和各向异性体彈性理論的发展。从二十世紀初叶开始,彈性理論的发展冲出了各向同性体的綫性彈性理論的古典范圍。卡門首先提出了薄板的大撓度問題(1910年)。后来,比奥特和摩納干提出了彈性体的大形变問題(1939年和1952年)。这些問題的特性是:彈性体的位移或者形变幷不微小,必須用变形以后的尺寸来描述彈性体的平衡状态,因而問題的微分方程式不是綫性的。由于数学上的困难,只有非常簡单的少数几个問題有了解答。至于各向异性体的彈性理論,虽然从歌西和泊松

开始，就曾經进行过有关彈性常数的研究，但很久都沒有人研究过具有实用价值的具体問題。在1929年，胡勃尔提出了有关各向异性板的研究工作；在1947年和1950年，列赫尼茨基发表了“各向异性板”和“各向异性彈性体的彈性理論”两篇专著，解决了各向异性体的一些彈性理論問題。

(4) 彈性理論和結构力学的綜合应用。由于苏联力学家和建筑工程师們的努力，彈性理論和結构力学越来越密切結合。彈性理論吸收了結构力学中的超靜定結构分析法以后，大大地扩展了它的应用范圍，使得某些很复杂的实际問題得到完全可用的解答（虽然带有一定的近似性）。值得特别提出的有：施塔也尔芒把圓屋頂的計算变换为彈性支承的拱的計算（1933年）；符拉索夫把柱面形的折板和薄壳变换为薄壁构件的系統，再用結构力学中的力法进行計算（1940年）；日莫契金把基础梁和板桩变换为彈性支座上的梁，再用結构力学中的混合法进行計算（1937年和1948年）。这些貢献向我們指出，彈性理論和結构力学之間的人为界限，虽然已經存在了几个世紀，将随着这两个学科的共同发展而逐漸趋于消失。

虽然科学的发展能推动生产的发展，但更主要的是：生产实踐产生科学，生产发展的要求推动科学的发展。我国在解放以前，生产力受到重重束縛，生产不能发展并且遭到破坏，因而科学的发展也就远远落在其他一些国家的后面，当然建筑科学也不能例外。但是1949年革命的胜利，1956年对农业、手工业和私营工商业的社会主义改造的胜利，以及近一年来政治思想战綫上的社会主义革命的胜利，使生产力获得了一次又一次的大解放，特别是在党提出了“鼓足干勁、力爭上游、多快好省地建設社会主义”的总路綫之后，更形成了工农业生产的大跃进。生产的大发展，向科学提出了大量等待解决的重要問題，其中也有不少是要用彈性理論来解决

的問題。例如，三峽水利樞紐的建筑物，就有不少須用彈性理論来加以分析，使其既安全又經济。另一方面，生产中提供的大量資料以及提出問題的解决，也必然将推动科学的迅速发展。可以預期，在总路綫的光輝照耀下，生产发展的大跃进形势必将带来科学发展的大跃进局面，彈性理論也必然能和其他科学一样，很快地赶上世界水平。如何应用理論来为生产服务，以达到“多快好省”的要求，如何总結生产实踐中的經驗，使之成为系統的理論，这是摆在每个工程师和科学工作者面前的光荣而艰巨的任务。

§1-3. 古典彈性理論的基本假設

本书中所述的一切，都属于古典彈性理論的范圍。古典彈性理論是以下列基本假設为根据的。

(1) 假設物体是連續的——整个物体的体积都被組成这物体的介質填滿，不留下任何空隙。这样，物体內的一些物理量，例如应力、形变、位移等等，才可能是連續的，因而才可能用坐标的連續函数来表示。实际上，一切物体都是微粒組成的，都不能符合上述假設。但是，可以想見，如果微粒本身的尺寸以及相邻微粒之間的距离都比物体的尺寸小得很多，那末，关于物体連續性的假設，并不会产生显著的誤差。从物体微粒构造出发的所謂“顆粒彈性理論”，到現在为止，还远远沒有发展到可以应用的阶段，因而还远远不能代替現在的“連續介質彈性理論”。

(2) 假設物体是完全彈性的。所謂彈性，指的是“物体在产生形变的外力被除去以后能够恢复原形”这一性質；所謂完全彈性，指的是物体能完全恢复原形而沒有任何剩余形变。这样，物体在任一瞬时的形状就完全决定于它在这一瞬时所受的外力，与它过去的受力情况无关（假設溫度沒有改变）。由材料力学已知：韌性材料的物体，在应力未达到屈服极限以前，是近似的完全彈性体；

脆性材料的物体，在应力未超过比例极限以前，也是很近似的完全彈性体。又由材料力学已知，在这种情况下，材料服从虎克定律，也就是，应力与形变成正比。不服从虎克定律的材料所組成的物体，只在塑性理論中加以研究。

(3) 假設物体是均匀的——整个物体是由同一材料做成的。这样，整个物体的所有各部分才具有相同的物理性质，因而物体的彈性常数(彈性模数和泊松系数)才不随位置坐标而变。如果物体是由两种或两种以上的材料組成的，例如混凝土，那末，也只要每一种材料的顆粒远小于物体而且在物体内均匀分布，这物体就可以当做是均匀的。

(4) 假設物体是各向同性的——物体的物理性质，特别是彈性，在所有各方向都相同。这样，物体的彈性常数才不随方向而变。显然，木料和竹料的构件都不能作为各向同性体看待。至于鋼料的构件，虽然它含有各向异性的晶体，但由于晶体非常微小而且是杂乱排列的，所以，鋼料构件的彈性(包含无数多晶体杂乱排列时的統观彈性)大致是各向相同的。

凡是符合以上四个假設的物体，称为理想彈性体。

(5) 假設位移是微小的——物体受力以后，整个物体所有各点的位移都远小于物体的原有尺寸，因而轉角和应变都远小于1。这样，在考慮物体变形以后的平衡状态时，可以用变形以前的尺寸来代替变形以后的尺寸，而不致有显著的誤差；并且，在考慮物体的形变时，轉角和应变的二次幂或乘积都可以略去不計。这就使得彈性理論中的微分方程式成为綫性的。因此，古典彈性理論是綫性彈性理論。至于非綫性的問題，例如彈性平衡稳定性的問題和薄板薄壳大撓度的問題，都属于近代彈性理論的范圍。

总之，古典彈性理論的研究对象是理想彈性体的綫性問題。

§1-4. 几个物理量的通用記号和規定符号

彈性理論中常用的物理量有外力、应力、形变和位移。这些物理量，虽然在其他課程中已經用到过，但在这里仍有詳細說明的必要。

作用于物体的外力可以分为体力和面力。所謂体力，是分布在物体体积內的力，例如重力和慣性力。在物体內的任一点，作用于单位体积的体力，用它在坐标軸上的投影 X, Y, Z 来表明，以沿坐标軸正方向的为正，沿坐标軸負方向的为負。这三个投影称为在該点的体力分量。

所謂面力，是作用在物体表面上的力，例如流体压力和接触力。在物体表面上的任一点，作用在单位表面面积上的面力，也用它在坐标軸上的投影 $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ 来表明，以沿坐标軸正方向的为正，沿坐标軸負方向的为負。这三个投影称为在該点的面力分量。

为了考察物体內某一点 P 的应力，在这一点从物体割取一个无穷小的平行六面体，它的棱边平行于坐标軸而长度为 $PA=dx$, $PB=dy$, $PC=dz$，图 1-3。将每一面上的应力分解为一个正应力和两个剪应力，分别与三个坐标軸平行。正应力用字母 σ 表示。为了表明这个应力的作用面和作用方向，再加上一个脚碼。例如，正应力 σ_x 是作用在垂直于 x 軸的面上同时也沿 x 軸方向作用的。剪应力用字母 τ 表示，并加上两个脚碼。前一个脚碼表明作用面垂直于哪一个坐标軸，后一个脚碼表明作用方向沿着哪一个坐标軸。例如，剪应力 τ_{xy} 是作用在垂直于 x 軸的面上而沿 y 軸方向作用的。

如果某一个面上的外法綫是朝着坐标軸的正方向，这个面上的应力就以沿坐标軸正方向为正，沿坐标軸負方向的为負。相反，如果某一个面上的外法綫是朝着坐标軸的負方向，这个面上的应

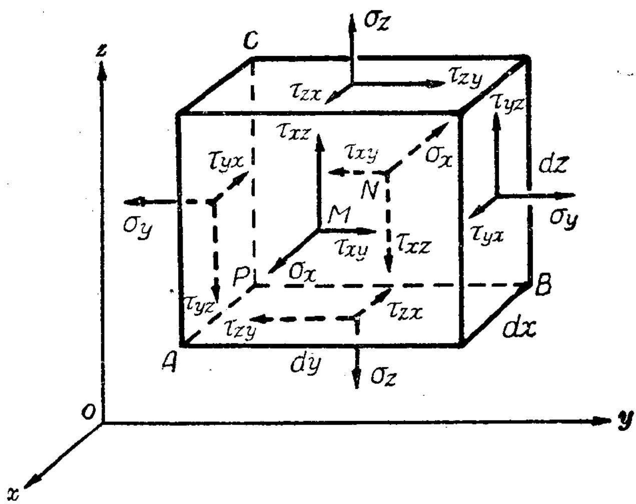

图 1-3.

力就以沿坐标軸負方向的为正，沿坐标軸正方向的为負。图上所示的应力全都是正的。

六个剪应力幷不是互不相关而是两两相等的。例如，以連接前后两面的中心的直綫 MN 为矩軸，立出力矩的平衡方程式，得

$$2\tau_{yz}\,dx\,dz\,\frac{dy}{2}-2\tau_{zy}\,dx\,dy\,\frac{dz}{2}=0\text{。}$$

同样可以立出其余两个相似的方程式。簡化以后，得

$$\tau_{yz}=\tau_{zy},\ \tau_{zx}=\tau_{xz},\ \tau_{xy}=\tau_{yx}\text{。} \tag{1-1}$$

这就証明了剪应力互等定律：作用在两垂直面上幷且垂直于該两面交綫的剪应力是互等的（大小相等，符号也相同）。因此，剪应力記号的两个脚碼可以对調。

以后将証明（見 § 5-2），如果 σ_x, σ_y, σ_z, τ_{yz}, τ_{zx}, τ_{xy} 这六个量在某一点是已知的，那末，經过該点的任何斜面上的应力都可以求得。因此，这六个量可以完全确定該点的应力状态，幷称为在該