# 電磁學

## —原理・問題解析—

胡銘全 編著

新興圖書公司

# 電 磁 學

## ——原理 · 問題解析——

胡銘全　編著



新興圖書公司

**電磁學 —原理・問題解析—**

胡銘全　編著

**出版：新興圖書公司**

**發行：時代圖書有限公司**

香港九龍彌敦道 500 號一樓

3-308884

**印刷：慶年柯式印刷公司**



1979年 4 月版

# 目　　錄

# 第一章 靜電場

## § 1-1 庫侖定律

1785年庫侖由實驗發現,二個點電荷間的作用力，與二點電荷大小的乘積成正比例，與其間距離的平方成反比例，此二電荷之力，稱爲庫侖力，以公式表之卽

$$\overline{F} = k\,\frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

式中：$Q_1$ 和 $Q_2$ 表二電荷的大小。

$r$ 表二電荷間的距離。

$k$ 爲一常數，其值視電荷存在之介質及使用之單位而定，如電荷存在於眞空中，且使用之單位系統爲 $MKS$ 制時，則 $k$ 之值爲 $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}$ 。

$\epsilon_0$ 爲眞空中之介電係數（Permittivity）

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^9} = 8.855 \times 10^{-12} \quad \text{法拉/米}$$

## § 1-2 電場強度

電場強度的定義是“單位電荷所受的力”設試驗電荷所帶的電量爲 $q$ 庫侖，其在電場中某點所受的力爲 $F$ 牛頓，則該點的電場强度

$$\overline{E} = \frac{\overline{F}}{q} \qquad \text{牛頓/庫侖}$$

其計算方法如下：

(1)一試驗電荷 $q_0$ 與另一點電荷 $q$ 相距爲 $r$ :則由庫侖定律，作用

於 $q_0$ 之力的大小爲

$$\bar{F}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}$$

故 $q_0$ 處的電場强度爲

$$\bar{E}=\frac{\bar{F}}{q_0}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

$E$ 的方向成輻射狀，若 $q$ 爲正，則向外，若 $q$ 爲負，則向內。

(2)由一群點電荷所產生的 $\bar{E}$：

(a)求出個別電荷對一點所產生的 $\bar{E}_n$， 而不考慮其他電荷的存在。

(b)以向量加法將 $\bar{E}_n$ 相加，即可得該點的合電場。此可寫成下列方程式：

$$\bar{E}=\bar{E}_1+\bar{E}_2+\bar{E}_3+\cdots\cdots=\Sigma\,\bar{E}_n\,,\qquad n=1,2,3,\cdots$$

此加法是就所有電荷所取的向量和。

(3)若電荷 $q$ 的分佈爲連續的：

則可將電荷分成無限小的單元 $dq$，然後視各單元 $dq$ 爲一點電荷而求各 $dq$ 對該點所產生的電場 $d\bar{E}$。$d\bar{E}$ 的大小爲

$$d\bar{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}$$

$r$ 爲 $dq$ 至點 $P$ 的距離。在 $P$ 點的合電場爲將 $d\bar{E}$ 相加（即積分），此可寫成

$$\bar{E}=\int d\bar{E}$$

## § 1-3 電位

靜電場內某點之電位，爲單位電荷自該點移至某一參考點所作之功，如以公式表之，點 $A$ 至點 $B$ 的電位可表之如下：

即 $$V_{AB}=\int_A^B \bar{E}\cdot d\bar{l}$$

電場$E$亦可以電位梯度表示之

即　　$$\overline{E}=-\nabla V=-\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\,\overline{i}+\frac{\partial E_y}{\partial y}\,\overline{j}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\,\overline{k}\right)$$

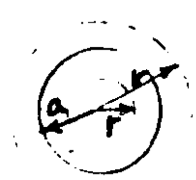
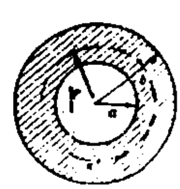
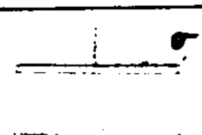
## §1-4　高斯定律

(1)在電場內，經一任意封閉曲面$S$之電力線總數，即等於該封閉曲面內所含之電荷總量除以$\epsilon_0$之值，以公式表之，即

$$\epsilon_0\Phi_E=q$$

$$\epsilon_0\oint\overline{E}\cdot d\overline{S}=q$$

(2)此定律適合於任何封閉之假想面（高斯面），應用此定律時，可十分簡單的求出下列靜電場之電場強度。

| 說　　明 | 高　　斯　　面 | 電　場　強　度 |
|---|---|---|
| 半徑爲$a$<br>表面電荷爲$Q$之球體 |  | $r>a$<br>$\bar{E}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$<br>$r<a$<br>$\bar{E}=0$ |
| 半徑爲$a$<br>面電荷爲$Q$之軸對稱圓筒 |  | $a<r<b$<br>$\bar{E}=\dfrac{Q}{2\pi\epsilon_0 r}$<br>$r<a$<br>$\bar{E}=0$ |
| 平行板電容器<br>面電荷密度爲$\sigma$ |  | $\bar{E}=\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}$ |

## § 1-5 電雙極

(1)正負等量電荷距離相同時，即形成一電雙極（ dipole ）。

如下圖所示之電雙極含有電荷 $+Q$ 及 $-Q$ ＝兩荷相距 $d$ 公尺，距離此電雙極中心 $r$ 公尺處之電位爲

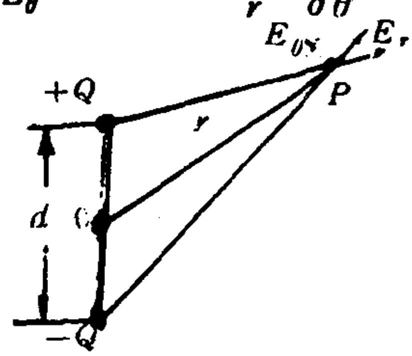
$$V \approx \frac{qd \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{P\cdot u}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

式中：$P$ 爲電偶極矩，$P = qd$

電雙極所產生之電場强度僅有 $E_r$ 及 $E_\theta$ 二個分量

$$\bar{E}_r = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{P\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$\bar{E}_\theta = -\nabla V = \frac{-1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{P\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$




## § 1-6 電力線方程式

電力線上之線素，以及該點之電場分別爲

$$d\bar{l} = \bar{i}\,dx + \bar{j}\,dy + \bar{k}\,dz$$

$$\bar{E} = \bar{i}E_x + \bar{j}E_y + \bar{k}E_z$$

$\bar{E}$ 既必須與線素 $d\bar{l}$ 平行，故由 $\bar{E}$ 之分佈得電力線之微分方程式爲

$$\bar{E}\times d\bar{l} = 0$$

上式化爲直角坐標三分量爲

$$E_y\,dz - E_z\,dy = 0$$

$$E_z\,dx - E_x\,dz = 0$$

$$E_x\,dy - E_y\,dx = 0$$

即

$$\frac{dx}{E_x(x,y,z)} = \frac{dy}{E_y(x,y,z)} = \frac{dz}{E_z(x,y,z)}$$

同理屬於圓柱坐標及球坐標之電力線微分方程式爲

$$\frac{dR}{E_R} = \frac{R\,d\varphi}{E_\varphi} = \frac{dZ}{E_Z}$$

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r\,d\theta}{E_\theta} = \frac{r\sin\theta\,d\varphi}{E_\varphi}$$

以上每一公式有二個等號代表二個微分方程式，每一微分方程式式決定一個面函數，二個面函數之交線即爲電力線。

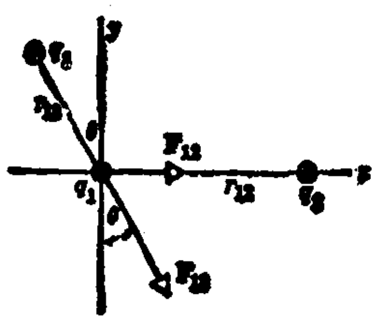
# 問 題 詳 解

## 庫侖定律

***1.*** 下圖顯示三電荷 $q_1$、$q_2$ 和 $q_3$。作用於 $q_1$ 之力爲若干？

設 $q_1 = -1.0 \times 10^{-6}$ 庫侖，$q_2 = 3.0 \times 10^{-6}$ 庫侖，$q_3 = -20 \times 10^{-6}$ 庫侖

$r_{12} = 15$ 厘米，$r_{13} = 10$ 厘米，$\theta = 30°$。




〔解〕 依題由庫侖定律

得 $$\bar{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}$$

$$= \frac{(9.0\times10^9)(1.0\times10^{-6})(3.0\times10^{-6})}{(1.5\times10^{-1})^2}$$

$$= 1.2 \text{ 牛頓}$$

$$\bar{F}_{13} = \frac{(9.0\times10^9)(1.0\times10^{-6})(2.0\times10^{-6})}{(1.0\times10^{-1})^2}$$

$$= 1.8 \text{ 牛頓}$$

力 $F_{12}$ 和 $F_{13}$ 的方向如圖所示，作用於 $q_1$ 之合力 $F_1$ 的二分量爲

$$F_{1x} = F_{12x} + F_{13x} = F_{12} + F_{13}\sin\theta$$

$$= 1.2 + 1.8\sin 30° = 2.1 \text{ 牛頓}$$

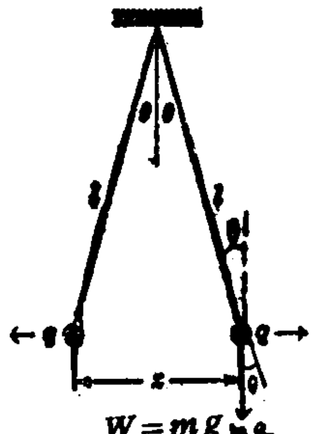
及 $F_{1y} = F_{12y} + F_{24y} = 0 - F_{13}\cos\theta = -1.8\cos 30^\circ = -1.6$ 牛頓

$F = 2.1\, a_x - 1.6\, a_y$ 牛頓

**2.** 二相同之球質量爲 $m$，以長度 $l$ 的絲線懸之，並帶相同之電荷 $q$，如下圖。設 $\theta$ 甚小，$\tan\theta$ 可以 $\sin\theta$ 代替。由此近似證明

$$x = \left(\frac{q^2 l}{2\pi\varepsilon_0 m g}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$x$ 爲二球間之距離。若 $l = 120$ 厘米，$m = 10$ 克，$x = 5.0$ 厘米 $q$ 爲若干？




$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{q^2}{x^2}$$

〔解〕 在平衡位置，各電荷所受合力爲零，考慮右邊電荷：

$$F = T\sin\theta = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$W = T\cos\theta = mg$$

$$\therefore\ \frac{\dfrac{q^2}{4\pi\epsilon_0 x^2}}{mg} = \tan\theta \approx \sin\theta \qquad (\because \theta \text{ 很小})$$

$$= \frac{x/2}{l}$$

$$\therefore\quad x^3 = \frac{q^2 l}{2\pi\epsilon_0 m g}$$

即 $x = (q^2 l/2\pi\epsilon_0 m g)^{\frac{1}{3}}$

由所予數據

$$q=\left(\frac{2\pi\epsilon_0 mgx^3}{l}\right)^{\frac{1}{2}}=\left[\left(\frac{2}{4\pi\epsilon_0}\right)^{-1}mgx^3/l\right]^{\frac{1}{2}}$$

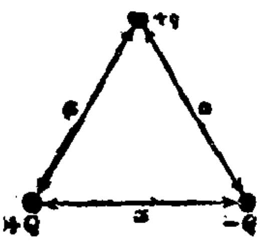
$$=\left[\frac{1}{18\times10^9}\times(1\times10^{-2})(9.8)(5\times10^{-2})^3\times\frac{1}{1.20}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=2.4\times10^{-8}\text{ 庫侖}$$

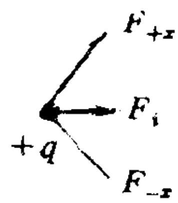
正負均可，只要兩球同號。

**3.** 三個電荷排列如圖，求作用於 $+q$ 的力。

〔63年高考〕









〔解〕 以平行於 $\overline{(+Q)(-Q)}$ 的方向爲正 $x$

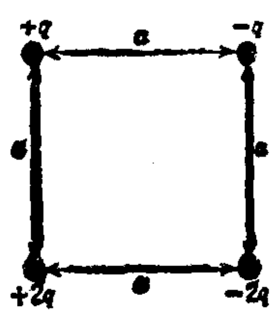
則 $F_t=F_{+x}+F_{-x}$

$$=\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 a^2}\cos 60^\circ+\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 a^2}\cos 60^\circ$$

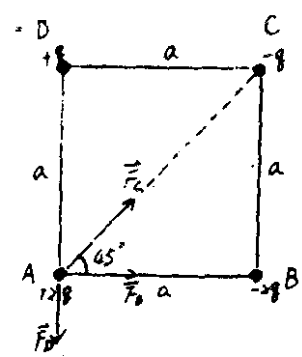
$\because\ F_y=0$

$\therefore$ 合力方向平行於由 $+Q$ 到 $-Q$ 的方向。

**4.** 如下圖，設 $q=1.0\times10^{-7}$ 庫侖，$a=5.0$ 厘米。在左下角的電荷所受之力。









〔解〕 $F_x=F_B+F_C\cos 45^\circ$

$F_y=F_C\sin 45^\circ-F_D$

$$\therefore\ F_x=\frac{(2q)(2q)}{4\pi\epsilon_0 a^2}+\frac{(2q)(q)}{4\pi\epsilon_0(a\sqrt{2})^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=(9\times10^{9})\frac{q^2}{a^2}(4+\frac{2}{2\sqrt{2}})$$

$$=4.86\times10^{10}\times(\frac{1\times10^{-7}}{5\times10^{-2}})^2$$

$=0.17$ 牛頓（向正 $x$ 方向）

$$F_y=\frac{(2q)(q)}{4\pi\epsilon_0(a\sqrt{2})^2}\ \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{(2q)(q)}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

$$=\frac{1q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}(\frac{1}{\sqrt{2}}-2)$$

$=-0.046$ 牛頓（向負 $y$ 方向）

**5.** 長爲 $2a$ 的桿端分別置有電荷 $+q$ 及 $-q$，則成電雙極。下圖中有兩個雙極，其中心相距 $R$。(a)求左雙極所受之力，(b) $R\gg a$ 時，試證前述之力約爲 $F=3p^2/2\pi\epsilon_0 R^4$，而 $p=2qa$ 爲“雙極矩”。

〔解〕依　題

(a)
$$F=\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{(R-2a)^2}-\frac{1}{R^2}-\frac{1}{R^2}+\frac{1}{(R+2a)^2}\right]$$

$$=\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2(R^2+4a^2)}{(R^2-4a^2)^2}-\frac{2}{R^2}\right]$$

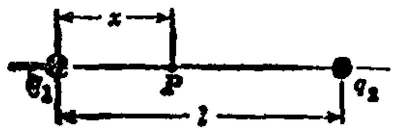
$$=\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0}\left[\frac{R^2+4a^2}{(R^2-4a^2)^2}-\frac{1}{R^2}\right]$$

(b)
$$\therefore\quad F=\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left[R^{-4}(1+\frac{8a^2}{R^2})R^2(1+\frac{4a^2}{R^2})-\frac{1}{R^2}\right]$$

$$=\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0}\left[R^{-2}(1+\frac{12a^2}{R^2})-\frac{1}{R^2}\right]$$

$$=\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0}\left[\frac{12a^2}{R^4}\right]=\frac{3p^2}{2\pi\epsilon_0 R^4}$$

**6.** 下圖陳示電荷$q_1$距電荷$q_2$，10 厘米，在二電荷之連線上何點電場强度爲零？




$q_1 = +1.0 \times 10^{-5}$ 庫侖
$q_2 = +2.0 \times 10^{-6}$ 庫侖

〔解〕 此點應位於二電荷之間，因僅在該處$q_1$和$q_2$ 施於試驗電荷之力彼此反向。若$E_1$是$q_1$所生之電場，$E_2$是$q_2$之電場，則應有

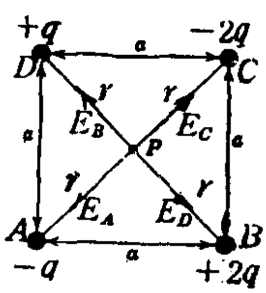
$$E_1 = E_2$$

即 $$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{(l-x)^2}$$

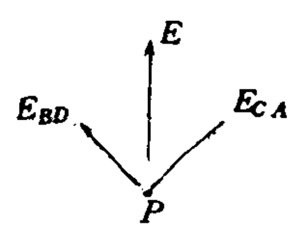
$x$爲自$q_1$之距離，$l$等於 10 厘米。解$x$得

$$x = \frac{l}{1+\sqrt{q_2/q_1}} = \frac{10}{1+\sqrt{2}} = 4.1 \text{ 厘米}$$

**7.** 如圖所示之正方形，中心點$P$之大小和方向爲何？
如$q = 1.0 \times 10^{-18}$ 庫侖，$a = 5.0\ cm$。




〔解〕 依　題




$$E_{CA} = E_C - E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2q}{r^2} - \frac{q}{r^2}\right)$$

$$E_{BD} = E_B - E_D = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2q}{r^2} - \frac{q}{r^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2}$$