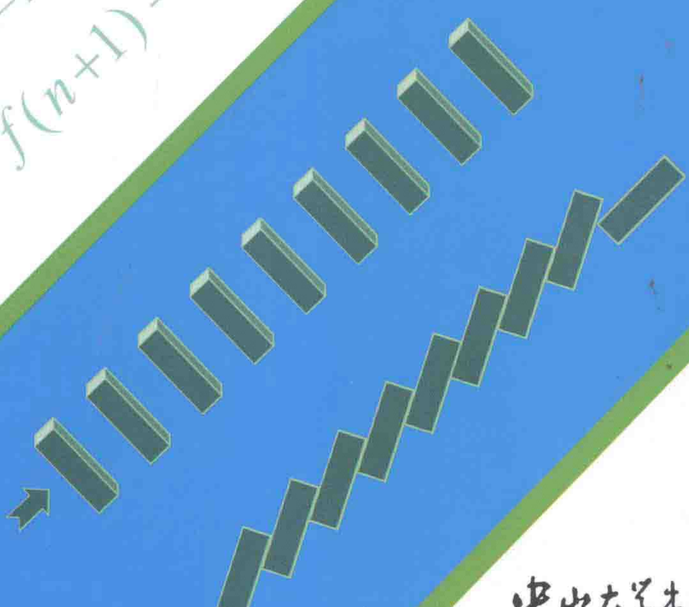
DI TUI SHU LIE

递推数列

主　编　方志平
副主编　刘志勇　刘　健

$$a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1)\\ S_n-S_{n-1} & (n\geqslant 2)\end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n}[f(k+1)-f(k)]=f(n+1)-f(1)$$



中山大学出版社

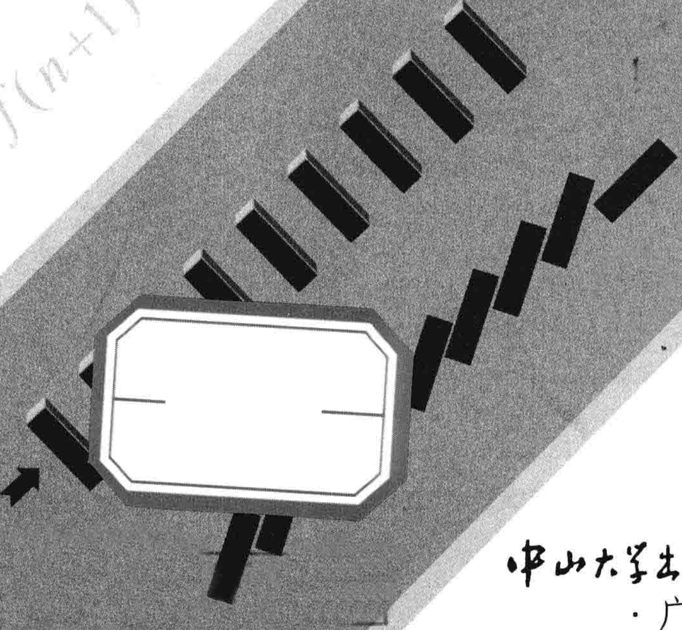
DI TUI SHU LIE

递推数列

主　编　方志平
副主编　刘志勇　刘　健

$$a_n=\begin{cases} S_1 & (n=1) \\ S_n-S_{n-1} & (n\geq 2) \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n}[f(k+1)-f(k)]=f(n+1)-f(1)$$



中山大学出版社
·广州·

图书在版编目（CIP）数据

递推数列/方志平主编；刘志勇，刘健副主编．—广州：中山大学出版社，2012.5
ISBN 978－7－306－04206－4

Ⅰ．①递… Ⅱ．①方… ②刘… ③刘… Ⅲ．①数学课—教学研究—高中 Ⅳ．①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 135301 号

出版人：祁　军
策划编辑：李　文
责任编辑：李　文
封面设计：林绵华
责任校对：杨文泉
责任技编：何雅涛
出版发行：中山大学出版社
电　　话：编辑部 020－84111996，84113349，84111997，84110779
发行部 020－84111998，84111981，84111160
地　　址：广州市新港西路 135 号
邮　　编：510275　　传　真：020－84036565
网　　址：http://www.zsup.com.cn　　E-mail:zdcbs@mail.sysu.edu.cn
印 刷 者：广州中大印刷有限公司
规　　格：787mm×960mm　1/16　9.25 印张　330 千字
版次印次：2012 年 5 月第 1 版　2012 年 5 月第 1 次印刷
印　　数：1～2000 册　定　价：20.00 元

序

惠州市一中几位一线数学老师编写了《递推数列》一书，拜读后深感本书编写具有以下特点：

从知识的纵向体系看，先解决递推数列问题的必备基础——“数列求和”，然后介绍常见的递推关系，及由递推式求数列的通项公式。让读者耳目一新的是介绍了递推数列与不等式放缩技巧的应用。

从知识的横向关联看，本书作者更想通过“数列的递推”这样一种规律性较强，特征突出的知识入手，帮助读者逐步提高数学综合思维能力。

从编写的结构上看，从知识与方法提要开始，进入典型例题的学习，再到反馈练习的延伸，最后为读者备有必要的练习答案。特别是典型例题，按照由浅入深，由易到难的顺序进行编排，使读者深感层次清晰，有利于读者自学。

总之，本书编写者所追求的目标只有一个，即通过学习《递推数列》，领会数学思想方法，提高数学思维能力，发展数学思维品质。

是为序。

广东省教育研究院 徐勇

2012 年 5 月 11 日

前　言

学习数学的根本目的在于培养数学能力，即培养运用数学知识和数学思想来解决实际问题和进行发明创造的本领。这种能力，不是表现在对数学知识的简单记忆，而是反映在数学思想方法的素养上。

高中阶段正是一生中接受数学训练、打好数学基础的最佳时期，在这个时期下点工夫学数学，将会对思维品质和解决问题能力的提升产生重要影响。

作为高中数学重要内容之一的数列，是高考的热点，而递推数列又是数列的一个核心内容，多年来一直是全国高考和高中数学联赛的亮点，在全国及各省市的高考命题中均占有一席之地，且多以“把关题”的姿态呈现。特别是在2008年高考中，全国19套文理试卷中共有30多道数列题，其中递推数列题有20多道。递推数列中蕴含着丰富的数学思想，具有很强的逻辑性，其解题方法灵活、多变，递推方法涉及函数、方程、不等式、解析几何和概率等知识。递推方法不仅能有效地激发学生的求知欲，唤起他们对数学的学习兴趣，而且是考查学生逻辑推理和转化化归能力的好素材。因此，学习和研究递推数列的思想方法是很有必要的。

本书主要介绍了数列求和、由递推数列求通项公式、递推数列与其他知识的交汇、递推数列与数列的放缩法、递推数列的综合运用、数学竞赛中的递推数列。

古人云：授人以鱼，只供一饭之需；授人以渔，则一生受用无穷。我们正是本着这样的理念来编写本书。因此，在编写过程

中，我们充分尊重现行教材体系，依据教学大纲与考试说明，结合多年的教学实践，采用了大量的现实性、趣味性、前沿性的资料，把握最新的高考信息和命题趋势，选题精妙，解析详尽，探究规律，总结方法，拓展思维，点拨技巧，使学生举一反三、融会贯通。

亲爱的同学们，高中阶段正是人生的花季，每个同学都拥有诗一般的梦想。然而高中阶段的学习生活，将是一段辛勤播种和耕耘之路，也必将是一段收获硕果、体验成功之路。在这条寂寞、曲折、坎坷的道路上不仅要有“十年春秋磨一剑，初试锋芒待明珠”的坚忍不拔之志，还要有“驽马十驾，功在不舍”的点滴积累之功，这样才可成就梦想。我们有理由相信，《递推数列》一书将成为你体验成功、收获喜悦的一把金钥匙，使你“今日常怀蟾宫折桂之逸兴壮思，来年定有金榜题名之眉飞色舞”！

本书在编写过程中得到人民教育出版社数学专家、学者蔡上鹤教授，1984 年全国高考数学命题专家万尔遐教授，湖北大学《中学数学》杂志社社长何延凯教授的指导和帮助，在此一并向他们表示衷心的感谢！鉴于本书立意新颖，编写难度很大，加之作者水平所限，时间仓促，难免有错漏之处。敬请广大读者和专家朋友批评指正，谨致谢忱。

方志平

2012 年 5 月于惠州

目　　录

第一章　数列求和 ………………………………………… (1)

一、知识与方法提要 ………………………………………… (1)

二、典型例题 ………………………………………… (2)

三、反馈练习 ………………………………………… (9)

四、反馈练习答案 ………………………………………… (10)

第二章　由递推数列求通项公式 ………………………………………… (14)

一、知识与方法提要 ………………………………………… (14)

二、典型例题 ………………………………………… (15)

三、反馈练习 ………………………………………… (42)

四、反馈练习答案 ………………………………………… (46)

第三章　递推数列与其他知识的交汇 ………………………………………… (59)

一、知识与方法提要 ………………………………………… (59)

二、典型例题 ………………………………………… (60)

三、反馈练习 ………………………………………… (68)

四、反馈练习答案 ………………………………………… (70)

第四章　递推数列与数列的放缩法 ………………………………………… (75)

一、知识与方法提要 ………………………………………… (75)

二、典型例题 ………………………………………… (76)

三、反馈练习 ………………………………………… (81)

四、反馈练习答案 ………………………………………… (82)

第五章　递推数列的综合应用 ………………………………………… (86)
一、知识与方法提要 ………………………………………… (86)
二、典型例题 ………………………………………… (87)
三、反馈练习 ………………………………………… (103)
四、反馈练习答案 ………………………………………… (107)

第六章　数学竞赛中的递推数列 ………………………………………… (121)
一、知识与方法提要 ………………………………………… (121)
二、典型例题 ………………………………………… (121)
三、反馈练习 ………………………………………… (128)
四、反馈练习答案 ………………………………………… (129)

后　　记 ………………………………………… (135)

第一章　数列求和

研究递推数列离不开数列求和，因此，本书首先介绍几种常见的数列求和方法。

数列是高中代数的重要内容，又是学习高等数学的基础，在高考和各种数学竞赛中都占有重要的地位。数列求和是数列的重要内容之一，除了等差数列和等比数列有求和公式外，大部分数列的求和都需要一定的技巧。下面，就从六个方面来谈谈数列求和的基本方法和技巧。

一、知识与方法提要

1. 求和公式

（1）等差数列求和公式：$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$。

（2）等比数列求和公式：$S_n=\begin{cases}na_1, & q=1\\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}, & q\neq1\end{cases}$。

（3）$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}k=\dfrac{1}{2}n(n+1)$。

（4）$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$。

（5）$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}k^3=[\dfrac{1}{2}n(n+1)]^2$。

2. 数列求和注意事项

（1）求一般数列的前 n 项和，无通法可循，需要掌握求某些特殊数列前 n 项和的方法，达到触类旁通。对等比数列的求和，勿忘记对公比 q 的讨论。如果已知数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 分别为等差、等比数列，求 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的前 n 项和 S_n，则可用“错位相减法”。

（2）变换通项就是对通项公式进行一些有目的的处理，像裂项就是一种常用方法，通过裂项而转化为等差、等比或自然数次方。

（3）两相邻项的代数和为常数时可用“分组并项”法，此法往往要分为奇数、偶数两种情况进行讨论。因此，也可以模仿“倒序相加法”处理，避免讨论。

（4）求 S_n，实质上是求 $\{S_n\}$ 的通项公式，应注意对其含义的理解。

二、典型例题

1. 利用常用求和公式求和（定义法）

例1 求和：$x+x^2+x^3+\cdots+x^n$。

分析：此数列是等比数列吗？能直接使用等比数列求和公式吗？

解 （1）当 $x=0$ 时，$S_n=0$。

（2）当 $x=1$ 时，$S_n=n$。

（3）当 $x\neq 0$ 且 $x\neq 1$ 时，$S_n=\frac{x(1-x^n)}{1-x}=\frac{x-x^{n+1}}{1-x}$。

点评：等比数列求和，应注意对公比 q 为字母时的讨论：

$$S_n=\begin{cases} na_1, & q=1 \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q\neq 1 \end{cases}$$

例2 已知$\log_3 x=\frac{-1}{\log_2 3}$，求 $\sum_{k=1}^{n} x^k$。

解 由$\log_3 x=\frac{-1}{\log_2 3}\Rightarrow \log_3 x=-\log_3 2\Rightarrow x=\frac{1}{2}$。

由等比数列求和公式得

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} x^k=\frac{x(1-x^n)}{1-x}=\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$$

点评：不要被已知条件中给的式子吓倒。一个方程解一个未知数，这个等式刚好可以帮助我们确定字母 x 的取值，省去了我们对字母的讨论预期。另外，解对数方程，“化同底”是基本的解题方法。

例3 设在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n=1+2+3+\cdots+n$，$n\in\mathbf{N}^*$，将 $\{a_n\}$ 中 5 的

倍数的项依次记为 b_1，b_2，b_3，…

（1）求 b_1，b_2，b_3，b_4 的值。

（2）用 k 表示 b_{2k-1} 与 b_{2k}，并说明理由。

（3）求和：$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{2n-1}+b_{2n}$。

分析：本题的设问顺序刚好给解题者的思路做好层层铺垫。对于陌生的数列，可以先罗列前几项，使其直观化，后寻找数列的内在联系与规律。

解　（1）$b_1=a_4=10$，$b_2=a_5=15$，$b_3=a_9=45$，$b_4=a_{10}=55$。

（2）$\because a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}=5m(m\in\mathbf{N}^*)$，

$\therefore n=5k$ 或 $n+1=5k(k\in\mathbf{N}^*)$，即 $n=5k-1$ 或 $n=5k$。

$\because b_{2k-1}<b_{2k}$，$\therefore b_{2k-1}=a_{5k-1}=\dfrac{5k(5k-1)}{2}$，$b_{2k}=a_{5k}=\dfrac{5k(5k+1)}{2}$。

（3）$\because b_{2n-1}+b_{2n}=25n^2$，$\therefore b_1+b_2+\cdots+b_{2n}=\dfrac{25}{6}n(n+1)(2n+1)$。

点评：本题的难点在于如何找到常用下标 n 与新记号 k 之间的关系。显然，联系它们的纽带就是$\dfrac{n\ (n+1)}{2}=5m(m\in\mathbf{N}^*)$，即“5 的倍数”这句话的符号表示。由它可知，要么 n 是 5 的倍数，记为 $n=5k$，$k\in\mathbf{N}^*$；要么 $n+1$ 是 5 的倍数，记为 $n+1=5k$（$k\in\mathbf{N}^*$）”，进而使 n 与 k 产生关联，自然使 b_k 与 a_n 的关系明朗化。第 3 问可直接套用公式 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$求解。

2. 利用数列的通项求和

先根据数列的结构及其特征进行分析，找出数列的通项及其特征，然后再利用数列的通项所揭示的规律来求数列的前 n 项和，这是一个重要的方法。

例 4　求 $1+11+111+\cdots+\underbrace{111\cdots1}_{n个1}$之和。

解　$\because \underbrace{111\cdots1}_{k个1}=\dfrac{1}{9}\times\underbrace{999\cdots9}_{k个9}=\dfrac{1}{9}\times(10^k-1)$（找通项及特征），

$\therefore 1+11+111+\cdots+\underbrace{111\cdots1}_{n个1}$

$=\dfrac{1}{9}\times(10^1-1)+\dfrac{1}{9}\times(10^2-1)+\dfrac{1}{9}\times(10^3-1)+\cdots+\dfrac{1}{9}\times(10^n-1)$

（分组求和）

$$=\frac{1}{9}\times(10^1+10^2+10^3+\cdots+10^n)-\frac{1}{9}\times(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n个1})$$

$$=\frac{1}{9}\times\frac{10(10^n-1)}{10-1}-\frac{n}{9}$$

$$=\frac{1}{81}\times(10^{n+1}-10-9n)。$$

点评：这是一道传统题目，它很好地展示了由观察法确定通项，再观察通项特征决定求和方法。

例5 求数列$\frac{1}{1^2+2}$，$\frac{1}{2^2+4}$，$\frac{1}{3^2+6}$，$\frac{1}{4^2+8}$，…的前 n 项和。

解 $\because a_n=\frac{1}{n^2+2n}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$，

$$\therefore S_n=\frac{1}{2}\times\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}。$$

点评：解本题的关键是，通过前 4 项观察出此数列的通项，而后要想到将通项 $a_n=\frac{1}{n^2+2n}$进行裂项，得到$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$，最后考虑数列求和。

3. 分组求和法

有一类数列，既不是等差数列，也不是等比数列，若对其求和，可将这类数列适当拆分，分为几个等差、等比或常见的数列，然后分别求和，再将其合并即可。

例6 求和：$\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\cdots+\left(x^n+\frac{1}{y^n}\right)$（$x\neq0$，$x\neq1$，$y\neq1$）。

解 原式$=(x+x^2+x^3+\cdots+x^n)+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}+\cdots+\frac{1}{y^n}\right)$

$$=\frac{x(1-x^n)}{1-x}+\frac{\frac{1}{y}\left(1-\frac{1}{y^n}\right)}{1-\frac{1}{y}}=\frac{x-x^{n+1}}{1-x}+\frac{y^n-1}{y^{n+1}-y^n}。$$

点评：（1）注意到题目尾部括号里的条件了吗？它们的作用是什么？

（2）分组求和，一般用在通项公式是由“+”“-”号联结的多项式时，因此，观察通项的形式与结构显得十分必要。

例 7　求数列的前 n 项和：$1+1$，$\frac{1}{a}+4$，$\frac{1}{a^2}+7$，…，$\frac{1}{a^{n-1}}+3n-2$，…

解　设 $S_n=(1+1)+(\frac{1}{a}+4)+(\frac{1}{a^2}+7)+\cdots+(\frac{1}{a^{n-1}}+3n-2)$，将其每一项拆开再重新组合得

$$S_n=(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\cdots+\frac{1}{a^{n-1}})+(1+4+7+\cdots+3n-2)$$

当 $a=1$ 时，$S_n=n+\frac{(3n-1)n}{2}=\frac{(3n+1)n}{2}$；

当 $a\neq1$ 时，$S_n=\frac{1-\frac{1}{a^n}}{1-\frac{1}{a}}+\frac{(3n-1)n}{2}=\frac{a-a^{1-n}}{a-1}+\frac{(3n-1)n}{2}$。

点评：体会一下笔者前一题目中的点评吧。

例 8　求数列 $\{n(n+1)(2n+1)\}$ 的前 n 项和。

解　设 $a_k=k(k+1)(2k+1)=2k^3+3k^2+k$，

$\therefore\ S_n=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(2k+1)=\sum_{k=1}^{n}(2k^3+3k^2+k)$。

将其每一项拆开再重新组合得

$$\begin{aligned}S_n&=2\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\\&=2(1^3+2^3+\cdots+n^3)+3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+(1+2+\cdots+n)\\&=\frac{n^2(n+1)^2}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}\\&=\frac{n(n+1)^2(n+2)}{2}\text{。}\end{aligned}$$

点评：本题在重新组合了项与项的顺序后，分别使用常用求和公式求和。

4. 裂项求和法

裂项求和法是分解与组合思想在数列求和中的具体应用。裂项法的实质是将数列中的每项（通项）分解，然后重新组合，使之能消去一些项，最终达到求和的目的。通项分解（裂项）如

（1）$a_n=f(n+1)-f(n)$；

（2）$\frac{\sin1°}{\cos n°\cos(n+1)°}=\tan(n+1)°-\tan n°$；

(3) $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$;

(4) $a_n=\dfrac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}=1+\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})$;

(5) $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}[\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}]$;

(6) $a_n=\dfrac{n+2}{n(n+1)}\cdot\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{2(n+1)-n}{n(n+1)}\cdot\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{1}{n\cdot 2^{n-1}}-\dfrac{1}{(n+1)2^n}$,则 $S_n=1-\dfrac{1}{(n+1)2^n}$。

例 9 求和:$\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}$。

分析:$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{(n+1)-n}{n(n+1)}=\dfrac{n+1}{n(n+1)}-\dfrac{n}{n(n+1)}$

$=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$。

解 原式$=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$=1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$。

点评:裂项求和通常应用在通项是分式结构的题目中,这点大家可以从例9前面罗列的(1)~(6)条通项式的形式中观察到。本题的裂项法是最常见的一种。$a_n=\dfrac{1}{f(n)\cdot g(n)}$,其中$f(n)$与$g(n)$均为一项因式,且$n$的系数相同。不妨设$f(n)-g(n)=d>0$,则$a_n=\dfrac{1}{d}(\dfrac{1}{g(n)}-\dfrac{1}{f(n)})$。

例 10 求数列$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$, …, $\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$, …的前$n$项和。

解 设$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$,则

$S_n=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\sqrt{n+1}-1$。

点评:裂项后要能够前后相消,因此,裂开的通项理应有正项有负项,

在求和式中呈现正负相间方能“相消”。本题通项 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ 在变形方向上首选分母有理化，方便出现一个差式($\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$)。另外，对于根式形式的式子，分子（母）有理化，也是常用的手法。

例 11　数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $a_1=1$，$2S_n=(n+1)a_n$。

（1）求 a_n 与 a_{n-1} 的关系式，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求和：$W_n=\dfrac{1}{a_2^2-1}+\dfrac{1}{a_3^2-1}+\cdots+\dfrac{1}{a_{n+1}^2-1}$，

解（1）$\because \begin{cases}2S_n=(n+1)a_n\\2S_{n-1}=na_{n-1}\end{cases}$，两式相减得 $a_n=\dfrac{n}{n-1}a_{n-1}$，$n\geqslant2$。

$$\therefore \frac{a_n}{a_1}=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{1}=n,$$

$\therefore$ $a_n=n$。

$$\begin{aligned}(2)\ W_n&=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n\ (n+2)}\\&=\frac{1}{2}\left[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})\right]\\&=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})。\end{aligned}$$

点评：①使用 S_n 与 a_n 的递推关系式应注意对项数 n 分别讨论，得到 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=f(n)$ 的递推式，首先用累积法求出 a_n。②由于通项裂出一正一负两项，使每一项均有一正一负项，因而前后相消时注意对移性，即“头剩几个正项，尾就剩几个负项”。

5. 错位相减求和法

例 12　求和：$1+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{4}{2^3}+\cdots+\dfrac{n+1}{2^n}$，$n\in\mathbf{N}^*$。

分析：原式等价于 $2\times\dfrac{1}{2^1}+3\times\dfrac{1}{2^2}+4\times\dfrac{1}{2^3}+\cdots+n\times\dfrac{1}{2^{n-1}}+(n+1)\times\dfrac{1}{2^n}$，其中 $a_n=(n+1)\times\dfrac{1}{2^n}$。像这种由等差数列与等比数列组成的通项公式，求它的前 n 项和时，联系课本中等比数列前 n 项和公式的推导过程，可运用错位相减法。

解 令

$$S_n=2\times\frac{1}{2^1}+3\times\frac{1}{2^2}+4\times\frac{1}{2^3}+\cdots+n\times\frac{1}{2^{n-1}}+(n+1)\times\frac{1}{2^n} \quad ①$$

$$\frac{1}{2}S_n=2\times\frac{1}{2^2}+3\times\frac{1}{2^3}+4\times\frac{1}{2^4}+\cdots+n\times\frac{1}{2^n}+(n+1)\times\frac{1}{2^{n+1}} \quad ②$$

①－②得，$\frac{1}{2}S_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n+1}{2^{n+1}}$，

$\therefore S_n=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n+1}{2^n}$，

$\therefore S_n=2+\dfrac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n+1}{2^n}$，

$\therefore S_n=2+1-\frac{2}{2^n}-\frac{n+1}{2^n}$，

$\therefore S_n=3-\frac{n+3}{2^n}$。

点评：错位相减时请注意：

（1）该原式为①式，则将原式乘以公比 q 后的新式子记为②式，作差时建议使用①－②（想想有什么好处）。

（2）①－②后，最后一项的正负，你注意到了吗？

（3）①－②后一共有多少项？除去末项为负，前面共有多少项？若把首项也去掉，中间有多少项？（建议观察首项的特征）

（4）中间 $n-1$ 项利用等比数列求和公式合并，请问等比数列求和公式的使用条件是什么？注意到公比 q 是实数还是字母？若是字母，要讨论吗？

（5）别忘记 $(1-q)S_n$ 中 S_n 前的系数要除到右边，才能完成 S_n 的求解。

例 13 求和：$1+3a+5a^2+7a^3+\cdots+(2n-1)a^{n-1}(a\neq0)$。

解（1）当 $a=1$ 时，$S_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)=\frac{(1+2n-1)n}{2}=n^2$。

（2）当 $a\neq1$ 时，

$$S_n=1+3a+5a^2+\cdots+(2n-1)a^{n-1} \quad ①$$

$$aS_n=a+3a^2+5a^3+\cdots+(2n-3)a^{n-1}+(2n-1)a^n \quad ②$$

$\therefore$ ①－②得，$(1-a)S_n=1+2a+2a^2+\cdots2a^{n-1}-(2n-1)a^n$，

$\therefore (1-a)S_n = 1 + 2\dfrac{a(1-a^{n-1})}{1-a} - (2n-1)a^n$，

$\therefore S_n = \dfrac{2(a-a^n)}{(1-a)^2} + \dfrac{1-(2n-1)a^n}{1-a}$。

点评：通过这两个例题，想一想，为什么面对“等差×等比”形式的求和题目要用“错位相减”？如何转化成等比数列求和？

6. *反序相加法求和*

这是推导等差数列的前 n 项和公式时所用的方法，就是将一个数列倒过来排列（反序），再把它与原数列相加，就可以得到 n 个 (a_1+a_n)。

例 14　求$\sin^2 1°+\sin^2 2°+\sin^2 3°+\cdots+\sin^2 88°+\sin^2 89°$的值。

解　设

$$S=\sin^2 1°+\sin^2 2°+\sin^2 3°+\cdots+\sin^2 88°+\sin^2 89° \quad ①$$

将①式右边反序得

$$S=\sin^2 89°+\sin^2 88°+\cdots+\sin^2 3°+\sin^2 2°+\sin^2 1° \quad ②$$

又$\because \sin x=\cos(90°-x)$，$\sin^2 x+\cos^2 x=1$，

①+②得（反序相加）

$2S=(\sin^2 1°+\cos^2 1°)+(\sin^2 2°+\cos^2 2°)+\cdots+(\sin^2 89°+\cos^2 89°)=89$

$\therefore S=44.5$。

点评：面对有首尾“等距离”的项的和为定值这样特征的题目时，是将首尾等距离的项相加好些，还是将原式倒过来再写一遍，两列式对应项相加好些？为什么？

三、反馈练习

1. 已知 S_n 为等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和，公比 $q=2$，$S_{99}=77$，则 $a_3+a_6+\cdots+a_{99}=$______________。

2. 等差数列$\{a_n\}$中，公差 $d=\dfrac{1}{2}$，且 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}=60$，则 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=$______________。

3. 等比数列 1，2^1，2^2，2^3，…中的第 5 项到第 10 项的和为__________。

4. 求和：$S=1\times4+2\times7+3\times10+\cdots+(n+1)\cdot(3n+4)=$__________。

5. 数列$\{a_n\}$中，$a_1=-60$，且 $a_{n+1}=a_n+3$，则这个数列前 30 项的绝