北京大学现代数学丛书

PEKING UNIVERSITY SERIES IN CONTEMPORARY MATHEMATICS

黎曼曲面导引

梅加强 著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

北京大学现代数学丛书

PEKING UNIVERSITY SERIES IN CONTEMPORARY MATHEMATICS

黎曼曲面导引

梅加强 著

安徽大学图书馆
藏书
www.lib.ahu.edu.cn

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

黎曼曲面导引/梅加强著. —北京：北京大学出版社，2013.10
(北京大学现代数学丛书)
ISBN 978-7-301-20053-7

Ⅰ.①黎… Ⅱ.①梅… Ⅲ.①黎曼面-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.①O174.51

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 006875 号

书　　　名：黎曼曲面导引
著作责任者：梅加强　著
责 任 编 辑：曾琬婷
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-20053-7/O・0862
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　　址：http://www.pup.cn
电 子 信 箱：zpup@pup.cn　　新浪官方微博：@北京大学出版社
电　　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62767347
　　　　　　出版部 62754962
印　刷　者：北京大学印刷厂
经　销　者：新华书店
　　　　　　965mm×1300mm　16 开本　15.5 印张　221 千字
　　　　　　2013 年 10 月第 1 版　2013 年 10 月第 1 次印刷
定　　　价：65.00 元

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容.
版权所有，侵权必究
举报电话：010-62752024　电子信箱：fd@pup.pku.edu.cn

"北京大学现代数学丛书"
编 委 会

主　编：田　刚

编　委：田　刚　张继平　鄂维南　刘小博
黄一知　韩　青　郭　岩　夏志宏
许进超　范辉军

执行编辑：范辉军

内 容 简 介

本书介绍黎曼曲面的基本理论. 对于一般黎曼曲面主要讨论单值化定理, 对于紧致黎曼曲面则主要围绕 Riemann-Roch 公式的证明和应用展开讨论. 全书共分五章. 第一章介绍复分析中的一些预备知识并证明 Riemann 映照定理. 第二章利用 Perron 方法给出单连通黎曼曲面的分类, 即单值化定理. 第三章给出 Riemann-Roch 公式的经典证明, 并讨论这个公式的大量应用. 第四章引入全纯线丛, 层和层的上同调的概念, 并利用这些概念重新将 Riemann-Roch 公式解释为一个指标公式. 第五章讨论黎曼曲面以及全纯线丛上 Hermite 度量的几何性质, 并介绍 Hodge 定理, 对偶定理和消没定理. 这些定理都可以推广到高维的复流形上.

本书结合了几何和分析的观点, 语言简洁, 内容丰富, 适合自学. 在引进抽象的概念时, 往往辅以许多具体的实例来说明问题. 掌握了黎曼曲面上的这些抽象概念以后读者可以自然地过渡到一般复流形的学习. 同时, 本书可以作为研究复几何和代数几何相关领域的入门读物.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

序

经过近 20 年的发展, 中国数学取得了长足的进步。中国在数学后备人才培养和学术交流等方面做出了不少突出的成绩, 成为国际数学界不可忽视的力量。每年, 全国各大高校、科研院所举办的各类数学暑期学校、讲座、讨论班, 既有基础数学知识的讲授, 也有最新国际前沿研究的介绍, 受到师生、学者的热烈欢迎。这些学术活动不仅帮助广大师生、科研人员进一步夯实数学基础, 也为他们提供了一个扩展视野、接触数学前沿的绝佳机会, 对中国现代数学的发展起到了重要的推动作用。

在中央政府和北京大学的支持下, 北京国际数学研究中心于 2005 年成立。北京国际数学研究中心借助自身的独特优势, 每年邀请众多国际一流数学家前来参加或主持学术活动, 在国内外产生了广泛影响。北京国际数学研究中心与北京大学数学科学学院密切合作, 每年通过"特别数学讲座"、教育部"拔尖人才"计划等形式, 邀请国际著名数学家前来做系列报告, 讲授基础课程, 与师生互动交流, 反响热烈。2009 年, 北京国际数学研究中心启动"研究生数学基础强化班", 在全国各大高校挑选优秀研究生和高年级本科生到北京大学进行一个学期的集中学习, 这亦是我们人才培养的一个新的尝试。目前, 已有不少"强化班"的学生取得了前往世界著名院校学习的机会。毋庸置疑, 北京大学数学学科在学术交流和人才培养方面取得了很多卓有成效的经验, 做出了令人瞩目的成绩。

"北京大学现代数学丛书"主要面向数学及相关应用领域的高年级本科生、研究生以及科研人员, 以北京大学优秀数学讲座、暑期学校、"研究生数学基础强化班"等广受师生好评的项目活动的相应讲义

为基础内容, 同时也吸收了其他高校的优秀素材。我们希望 “北京大学现代数学丛书” 能帮助青年学生和科研人员更好地打实数学基础, 更深刻地理解数学前沿问题, 进而更有效地提高研究能力。

田 刚
2012 年 10 月 10 日
北京大学镜春园

前　　言

黎曼曲面的理论可以回溯到 Riemann (黎曼), Jacobi, Abel, Weierstrass, Hurwitz 等人所做的基础性贡献. 自从 H. Weyl 在 1913 年给出抽象黎曼曲面的近代定义以来, 微分流形以及基于微分流形的几何学和拓扑学取得了蓬勃的发展, 许多经典的结果以新的面目出现并得到了极大的推广, 近代的分析工具, 代数工具, 几何和拓扑工具在这个过程逐渐发展和融合. 通过学习黎曼曲面, 可以初步体会近代数学的思想和方法, 为进一步的专门化学习和研究提供有益的帮助.

本书是近若干年来作者在南京大学等地为数学系高年级本科生和研究生讲授黎曼曲面理论而逐渐积累起来的一份讲义. 黎曼曲面可以从好几个方面来学习和研究, 我们在本书中主要采用几何分析的观点, 同时也兼顾较初步的代数方法. 本书主要的结果是单值化定理, Riemann-Roch 公式及其应用. 围绕着这两个主要结果, 我们引入了近代几何与拓扑的若干概念. 这些概念以及我们所采用的证明方法大多数可以推广到高维的情形, 我们的想法是读者可以把本书作为通往复几何甚至代数几何的一个小小阶梯.

本书主要内容如下：第一章基本上是关于复变函数的简单复习, 其中给出了单值化定理的简单情形, 即 Riemann 映照定理的证明. 这一章也得到了调和函数的梯度估计和 Harnack 原理. 我们所采用的方法可以推广到一般的黎曼流形上. 第二章引入了抽象黎曼曲面的定义, 并给出了单连通黎曼曲面的分类 (单值化定理), 其中也对一类重要的紧致黎曼曲面 —— 黎曼环面加以了分类. 证明单值化定理的方法是通过调和函数 (可能带有奇点) 来构造特殊的全纯映射. 而调和函数的存在性是通过经典的 Perron 方法获得的. 第三章是本书的核心内容之一. 在这一章中, 我们给出了 Riemann-Roch 公式的证明, 并选择了若干有意思的应用加以介绍. 我们选择的 Riemann-Roch 公式的这个证

明也是经典的, 它涉及某些给定奇性的亚纯微分的存在性. 这种亚纯微分的存在性是通过 Hodge 定理获得的. 为了尽快地介绍 Riemann-Roch 公式的应用, 我们把重要的 Hodge 定理的证明放在本书的附录 B 中. 通过 Riemann-Roch 公式, 我们知道了紧致黎曼曲面上亚纯函数的丰富性, 也证明了亚纯函数域是一个一元代数函数域, 并且它唯一地决定了黎曼曲面本身. 作为例子, 我们简单介绍了黎曼环面上的亚纯函数, 它们就是经典的椭圆函数. 通过适当地挑选亚纯函数, 我们把黎曼曲面全纯地嵌入到复投影空间中, 因此可以从代数曲线的角度来研究它们. 我们还介绍了计算总分歧数的 Riemann-Hurwitz 公式, 并利用它简单研究了超椭圆型的黎曼曲面. 接下来我们介绍了曲面上的 Weierstrass 点, 得到了 Weierstrass 点的个数估计. 这些结果又被应用于曲面的全纯自同构群. 特别地, 我们证明了亏格大于 1 的紧致黎曼曲面全纯自同构群的阶的估计. 作为第三章的结束, 我们还介绍了重要的双线性关系和 Jacobi 簇, 证明了关于主要因子的 Abel 定理和 Jacobi 逆定理. 第四章和第五章可以看成是一维复几何的一些入门介绍, 主要的目的是将 Riemann-Roch 公式重新解释为一个指标公式. 围绕着这一目的, 我们引入了一维复几何的一些基本概念. 例如, 在第四章中, 我们介绍了曲面上的全纯线丛, 讨论了因子和全纯线丛之间的关系; 然后介绍了层的概念, 引出了层的上同调群, 分析了几种不同的上同调群之间的关系. 层的概念是在研究黎曼曲面和更一般的代数几何中自然出现的, 我们这里只做了简要介绍. 第五章研究全纯线丛的复几何, 介绍了重要的 Hodge 定理, Serre 对偶定理及消没定理. 对线丛的第一陈类也做了具体介绍, 并证明了重要的 Gauss-Bonnet 公式.

毫无疑问, 这样一本小册子无法囊括关于黎曼曲面的所有重要结果. 例如, 关于非紧的黎曼曲面只研究了单连通的情形. 从代数曲线的角度来理解黎曼曲面也只包含了零星的几个结果. 最重要的也许是没有介绍黎曼曲面上的双曲结构和复结构的模空间理论, 因此也没有引入 Teichmüller 空间. 我们希望今后能继续补充编写这些重要的结果.

阅读本书前如果具有微分流形和代数拓扑的基础可能会对读者更有帮助. 当然, 复分析是读者必备的预备知识. 作者在每一小节后均提

供了一定数量的习题, 个别习题的结论甚至在后面的正文中会用到, 因此习题是本书不可或缺的重要补充.

本书的部分内容曾在扬州大学的讨论班上讲过, 在此感谢王宏玉教授的大力支持. 作者也感谢南京大学数学系的历届同学们在教学过程中所提供的宝贵意见和建议. 本书在写作过程中得到了国家自然科学基金和南京大学的资助, 特致谢忱.

梅加强

2011 年 5 月于南京

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一章 Riemann 映照定理

在本章里, 我们将简单复习单复变函数的若干知识. 从 Schwarz 引理开始, 然后介绍调和函数的基本性质, 最后给出 Riemann 映照定理的证明.

§1.1 Schwarz 引 理

设 $D \subset \mathbb{C}$ 为开集. 如果 D 连通, 则称 D 为 $\mathbb{C}$ 中的**区域**. 这时 D 也是道路连通的.

设 $D \subset \mathbb{C}$ 为开集, $f: D \to \mathbb{C}$ 为复函数, $z_0 \in D$. 若极限

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

存在 (且有限), 则称 f 在 z_0 处**可导**, 并称此极限值为 f 在 z_0 处的导数, 记做 $f'(z_0)$.

如果 $f: D \to \mathbb{C}$ 在 D 中任何一点处均可导, 则称 f 为 D 中的**全纯函数**, 或称 f 在 D 内**全纯**. 记 f 的实部和虚部分别为 u, v, 则 f 为全纯函数的充分必要条件是 u, v 满足如下的 Cauchy-Riemann 方程:

$$\begin{cases} u_x = v_y, \\ u_y = -v_x. \end{cases}$$

全纯函数的定义还有许多其他的等价形式.

平均值公式 若函数 f 在圆盘 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < R\}$ 内全纯并连续到边界, 则

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta, \quad 0 < r \leqslant R,$$

即 f 在圆心处的值等于它在圆盘边界上的积分的平均值.

由此立即得到重要的最大模原理:

最大模原理 若函数 $f(z)$ 在区域 D 内全纯, 则 $|f(z)|$ 在 D 内取不到最大值, 除非 f 为常值函数.

关于单复变函数的一个特别简单而优美的结果是如下的 Schwarz 引理:

定理 1.1.1 (Schwarz 引理) 设 f 是从单位圆盘 $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$ 到自身的全纯函数, 且 $f(0)=0$, 则

(i) $|f'(0)|\leqslant 1$;

(ii) $|f(z)|\leqslant|z|,\quad\forall\, z\in\mathbb{D}$,

且等号成立时, 存在某个实数 θ, 使得

$$f(z)=e^{i\theta}z,\quad \forall\, z\in\mathbb{D}.$$

证明 在 $\mathbb{D}$ 上定义新的函数 g 如下:

$$g(z)=\begin{cases} f(z)/z, & z\neq 0,\\ f'(0), & z=0,\end{cases}$$

则 g 也是 $\mathbb{D}$ 中的全纯函数, 且对 $\rho<1$, 有

$$|g(z)|=\frac{|f(z)|}{|z|}\leqslant\frac{1}{\rho},\quad \forall\, z\in\{z\in D\mid |z|=\rho\}.$$

由最大模原理得

$$|g(z)|\leqslant\frac{1}{\rho},\quad \forall\, z\in\{z\in\mathbb{D}\mid |z|\leqslant\rho\}.$$

令 $\rho\to 1$ 就知 $|g(z)|\leqslant 1,\ \forall\, z\in\mathbb{D}$.

如果 $|f'(0)|=1$ 或 $|f(z)|=|z|$ (对某个 $z\neq 0$), 则 g 在 $\mathbb{D}$ 的内部达到最大模, 从而由最大模原理可知 $g(z)\equiv c$, 即

$$f(z)=cz.$$

显然, $|c|=1$. 因此, $c=e^{i\theta}$, $\theta\in\mathbb{R}$. □

从 Schwarz 引理可以得到如下推论, 其证明留作练习.

推论 1.1.2 (i) 设 $f: B_R(0)\to B_r(0)$ 是从半径为 R 的圆盘到半径为 r 的圆盘的全纯函数. 如果 $f(0)=0$, 则 $|f'(0)|\leqslant r/R$.

(ii) 设 $f : B_R(0) \to \mathbb{C}$ 为有界全纯函数, 则

$$|f'(0)| \leqslant \frac{2}{R} \sup |f|.$$

(iii) **(Liouville 定理)** 设 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 为有界全纯函数, 则 f 为常值函数.

作为 Schwarz 引理的进一步应用, 下面我们来找出单位圆盘 $\mathbb{D}$ 到自身的所有全纯的一一映射 (即全纯自同构).

任取 $z_0 \in \mathbb{D}$, $\theta \in \mathbb{R}$, 定义

$$\begin{aligned} f_{z_0} : \mathbb{D} &\to \mathbb{D}, \\ z &\mapsto e^{i\theta} \frac{z - z_0}{\bar{z}_0 z - 1}, \end{aligned}$$

则 f_{z_0} 是一一的全纯映射, 且 $f_{z_0}(z_0) = 0$. 这样的映射称为 **Möbius 变换**.

定理 1.1.3 如果 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 是一一的全纯映射, 则 f 必为一个 Möbius 变换.

证明 设 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 是一一的全纯映射. 记 $z_0 = f(0)$, 令 $g(z) = f_{z_0}(f(z))$, 则 $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 也是一一的全纯映射, 且 $g(0) = 0$. 由 Schwarz 引理, 有 $|g'(0)| \leqslant 1$. 另外, g 的逆映射 $h : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 也是全纯函数, 且 $h(0) = 0$, 从而同理有 $|h'(0)| \leqslant 1$. 由于 $h(g(z)) \equiv z$, 对 z 求导数, 有

$$h'(0) \cdot g'(0) = 1.$$

这说明必有

$$|g'(0)| = |h'(0)| = 1.$$

由 Schwarz 引理, 有 $g(z) = e^{i\theta} z$, $\theta \in \mathbb{R}$, 即

$$\begin{aligned} f_{z_0}(f(z)) &= e^{i\theta} z, \\ f(z) &= e^{i\theta} \frac{z - e^{-i\theta} z_0}{\bar{z}_0 e^{i\theta} z - 1}. \end{aligned}$$

这就证明了定理. □

类似地, 我们也可以决定 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{C}$ 的全纯自同构.

定理 1.1.4 如果 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是全纯自同构, 则 f 必为形如 $az+b$ 的线性映射, 其中 $a\in\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$, $b\in\mathbb{C}$.

证明 记 $f(0)=b$. 显然, $f-b$ 也是 $\mathbb{C}$ 的全纯自同构. 我们要证明 $f-b$ 是形如 az 的线性映射. 因此, 为了方便起见, 下设 $f(0)=0$. 令 $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 定义为

$$g(z)=\begin{cases} f(z)/z, & z\in\mathbb{C}^*,\\ f'(0), & z=0,\end{cases}$$

则 g 为 $\mathbb{C}$ 上全纯且处处非零的函数. 下面只需证明 g 必为常值函数. 这关键是证明 $\dfrac{1}{g}$ 为 $\mathbb{C}$ 上的有界全纯函数. 我们观察到:

(1) 存在 $c>0$, 使得 $|f(z)|\geqslant c$, $\forall\, z\in\mathbb{C}-\mathbb{D}$;

(2) $\lim\limits_{|z|\to\infty}|f(z)|=+\infty$.

(1) 的证明: 用反证法. 假设不然, 则存在一列 $z_i\in\mathbb{C}-\mathbb{D}$, 使得 $f(z_i)\to 0$. 注意到 f 在 0 处是一一可逆全纯的, 因此有

$$z_i=f^{-1}(f(z_i))\to f^{-1}(0)=0.$$

这和 $z_i\in\mathbb{C}-\mathbb{D}$ 相矛盾!

(2) 的证明: 用反证法. 假设存在 $A>0$, 以及一列 $z_i\to\infty$, 使得 $|f(z_i)|\leqslant A$ $(i=1,2,\cdots)$. 通过取子列, 不妨设 $f(z_i)\to w\in\mathbb{C}$. 类似 (1) 知 $z_i=f^{-1}(f(z_i))\to f^{-1}(w)$. 这和 $z_i\to\infty$ 相矛盾!

下面我们定义映射

$$\tilde{g}:\mathbb{D}\to\mathbb{D},$$

$$z\mapsto\begin{cases}\left[f\left(\dfrac{1}{z}\right)\right]^{-1}\cdot c, & z\neq 0,\\ 0, & z=0.\end{cases}$$

由 (2) 知 $\tilde{g}$ 是 $\mathbb{D}$ 上的连续函数, 且在 $\mathbb{D}^*=\mathbb{D}-\{0\}$ 上全纯. 因此, $\tilde{g}$ 是 $\mathbb{D}$ 上的全纯函数, 从而满足 Schwarz 引理的条件. 特别地, 有

$$|\tilde{g}(z)|\leqslant|z|,\quad \forall\, z\in\mathbb{D},$$

即有

$$|f(z)|\geqslant c|z|,\quad \forall\, z\in\mathbb{C}-\mathbb{D}.$$

这说明 $\dfrac{1}{g}$ 这个非零全纯函数在 $\mathbb{C}$ 上整体有界, 从而必为常值函数, 于是 g 为常值函数. □

从上面两个定理我们就得到了 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{C}$ 的全纯自同构群的完全刻画.

习 题 1.1

1. 设 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 为全纯函数且 $|f(z)|\leqslant|z|^{3/2}$, $\forall\ z\in\mathbb{C}$. 证明: f 恒为 0.

2. 设 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 全纯, 且存在自然数 n, 使得 $|z|$ 充分大时, $|f(z)|\leqslant c|z|^n$. 证明: f 必为某个次数不超过 n 的多项式.

3. 设 $f:\Omega\to\mathbb{C}$ 为非常值全纯函数, 其中 Ω 为 $\mathbb{C}$ 中的区域. 证明: f 为开映射, 即把开集映为开集.

4. 设 $f:\Omega\to\mathbb{C}$ 为单的全纯映射. 证明: $f:\Omega\to f(\Omega)$ 为全纯同构.

5. 试刻画 $\mathbb{C}^*$ 的全纯自同构.

6. 证明: $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{C}$ 的全纯单射必为满射, 从而是线性映射.

§1.2 调 和 函 数

设 Ω 为 $\mathbb{C}$ 中的区域, $h\in C^2(\Omega)$ 为实值函数. 如果 $\Delta h=0$, 则称 h 为**调和函数**, 这里 $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ 是 Laplace 算子.

记 u, v 分别为全纯函数 $f:\Omega\to\mathbb{C}$ 的实部与虚部, 则 u,v 满足 Cauchy-Riemann 方程:

$$\begin{cases} u_x=v_y, \\ u_y=-v_x. \end{cases}$$

由此立知

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=v_{yx}-v_{xy}=0,$$

$$\Delta v=v_{xx}+v_{yy}=-u_{yx}+u_{xy}=0,$$

即全纯函数的实部和虚部均为调和函数.

试读结束: 需要全本请在线购买: www.ertongbook.com