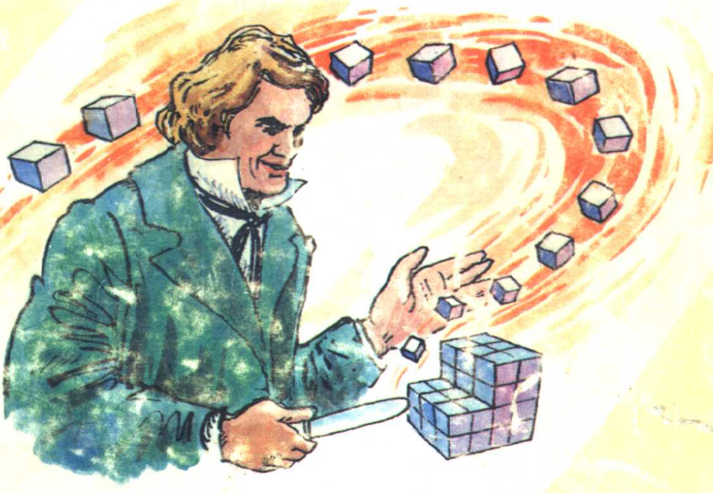
数学故事丛书

抽象中的形象



—图形的故事

上海科学普及出版社

抽 象 中 的 形 象

·图形的故事·

张 远 南

上海科学普及出版社

责任编辑　毕淑敏
封面设计　毛增南
责任出版　夏红义

数学故事丛书

张远南

上海科学普及出版社出版发行

（上海曹杨路500号）

各地新华书店经销　商务印书馆上海印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　印张24.5　字数539000

1990年4月第1版　1990年10月第2次印刷

印数：5001—25500

ISBN 7-5427-0241-6/O·10　定价：10.00元

内容提要

本书系数学故事丛书中的一册，全书用24篇生动有趣的小故事将读者引入各种抽象数学之门，如拓扑学、运筹学、图论和射影几何学等。展现了抽象与形象之间的生动关系。寓数学知识于趣味之中。主要目的是为提高中学生学习数学的兴趣，加深和扩展中学数学课堂知识。

序

数学最本质的东西是抽象，抽象是人类创造性思维最基本的特征。在数学上，假如没有超脱元素的"具体"，便不会有集合论的诞生；没有变元与符号的建立，便不可能有更深刻的方程和函数理论；没有形与数结合的解析几何，便没有微积分的发展；没有对"具体"的变换，便难以有抽象数学的产生；……

然而，数学教学并不同于数学研究。数学教学要求把抽象的东西形象化，又通过直观的形象来深化抽象的内容。这种抽象中的形象，正是数学教学的真谛！

本书讲述的是图形的故事，作者试图以此展现抽象与形象之间的生动的纽带。作者并不指望书中做到面面俱到。这是不可能的，而且也不必要！作者的目的只是希望激起读者的兴趣，并由此引发他们学习这些知识的欲望。因为作者认定：兴趣是最好的老师，一个人对科学的热爱和献身往往是由兴趣开始。然而人类智慧的传递，是一项高超的艺术。从教到学，从学到会，从会到用，又从用到创造，这是一连串极为能动的过程。作者在长期实践中有感于普通教学的局限和不足，希望能通过非教学的手段，实现人类智慧接力棒的传递。

基于上述目的，作者才计划尽自己的力量，写一套各自独立的趣味数学丛书。它们是：《偶然中的必然》、《未知中的已知》、《否定中的肯定》、《无限中的有限》、《变

量中的常量》和《抽象中的形象》。分别讲述概率、方程、逻辑、极限、函数、图形等故事。作者心目中的读者是广大的中学生和数学爱好者，他们是衡量本书最为精确的天平。

本书是这套丛书的最后一册，作者愿借此机会向所有为本丛书写作、出版中提供过帮助的同志致谢。还要特别提到的是：本丛书中数以百计的史料、故事、趣闻和游戏，分别取材并加工于为数众多的原始资料，因篇幅关系，恕本丛书未能一一罗列它们的出处与作者的姓名。谨此，特向有关作者表示深切的敬意和谢意！

由于作者水平有限，本丛书难免有许多疏漏和错误，敬请读者不吝指出。

但愿这套丛书能有助于人类智慧的接力！

张远南

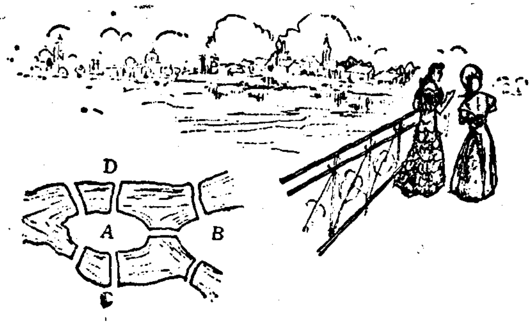
1988年12月

目　录

一、哥尼斯堡问题的来龙去脉

现今的加里宁格勒，旧称哥尼斯堡，是一座历史名城。在十八、十九世纪，那里是东普鲁士的首府，曾经诞生和培育过许多伟大的人物。著名的哲学家，古典唯心主义的创始人康德，终生没有离开过哥尼斯堡一步！二十世纪最伟大的数学家之一，德国的希尔伯特，也出生于此地。

哥城景致迷人，碧波荡漾的普累格河，横贯其境。在河的中心有一座美丽的小岛。普河的两条支流，环绕其旁汇成大河，把全城分为下图所示的四个区域：岛区（A），东区（B），南区（C）和北区（D）。著名的哥尼斯堡大学，傍倚于两条支流的河旁，使这一秀色怡人的区域，又增添了几分庄重的韵味！有七座桥横跨普累格河及其支流，其中五座把河岸和河心岛连接起来。这一别致的桥群，古往今来，吸引了众多的游人来此散步！



早在十八世纪以前，当地的居民便热衷于以下有趣的问

题：能不能设计一次散步，使得七座桥中的每一座都走过一次，而且只走过一次？这便是著名的哥尼斯堡七桥问题。这个问题后来变得有点惊心动魄：说是有一队工兵，因战略上的需要，奉命要炸掉这七座桥。命令要求当载着炸药的卡车驶过某座桥时，就得炸毁这座桥，不许遗漏一座！

读者如果有兴趣，完全可以照样子画一张地图，亲自尝试尝试。不过，要告诉大家的是：想把所有的可能线路都试过一遍是极为困难的！因为各种可能的线路不下于五千种，要想一一试过，真是谈何容易！正因为如此，七桥问题的解答便众说纷纭：有人在屡遭失败之后，倾向于否定满足条件的解答的存在；另一些人则认为，巧妙的答案是存在的，只是人们尚未发现而已，这在人类智慧所未及的领域，是很常见的事！

问题的魔力，竟然吸引了天才的欧拉（Euler，1707～1783）。这位年轻的瑞士数学家，以其独具的慧眼，看出了这个似乎是趣味几何问题的潜在意义。

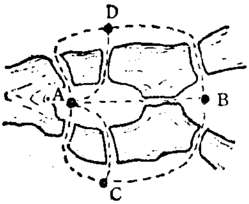
（1707～1783）

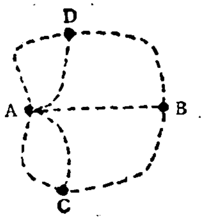
公元1736年，29岁的欧拉向圣彼得堡科学院递交了一份题为《哥尼斯堡的七座桥》的论文。论文的开头是这样写的：

“讨论长短大小的几何学分支，一直被人们热心地研究着。但是还有一个至今几乎完全没有探索过的分支；莱布尼兹最先提起过它，称之‘位置的几何学’。这个几何学分支讨论只与位置有关的关系，研究位置的性质；它不去考虑长短大小，也不牵涉到量的计算。但是至今未有过令人满意的定义，来刻划这门位置

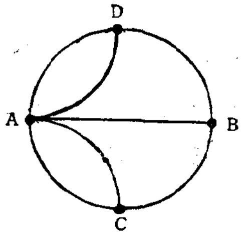
几何学的课题和方法。……”

接着，欧拉运用他那娴熟的变换技巧，如同下图，把哥尼斯堡七桥问题变为读者所熟悉的，简单的几何图形的“一笔画”问题：即能否笔不离纸，一笔画但又不重复地画完以下的图形？





读者不难发现：右图中的点A、B、C、D，相当于七桥问题中的四块区域；而图中的弧线，则相当于连接各区域的桥。

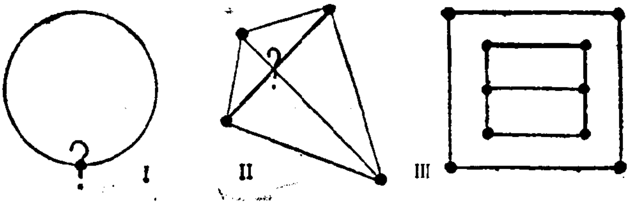


聪明的欧拉，正是在上述基础上，经过悉心研究，确立了著名的“一笔画原理”，从而成功地解决了哥尼斯堡七桥问题。不过，要弄清欧拉的特有思路，我们还得从“网络”的连通性讲起。

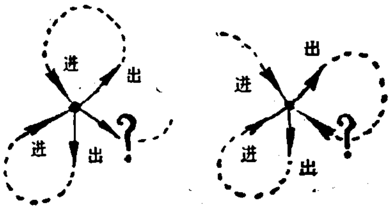
所谓网络，是指某些由点和线组成的图形，网络中的线弧都有两个端点，而且互不相交。如果一个网络中的任意两点，都可以找到网络中的某条弧线，把它们连接起来，那么，这样的网络就称为连通的。连通的网络简称脉络。

显然，下面的三个图中，图Ⅰ不是网络，因为它仅有的一条弧线只有一个端点；图Ⅱ也不是网络，因为它中间的两条弧线相交，而交点却非顶点；图Ⅲ虽是网络，但却不是连

通的。而七桥问题的图形，则不仅是网络，而且是脉络！



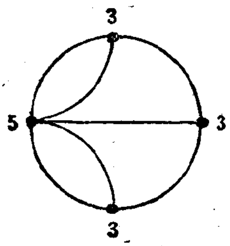
网络的点如果有奇数条的弧线交汇于它，这样的点称为奇点。反之，称为偶点。



欧拉注意到：对于一个可以“一笔画”画出的网络，首先必须是连通的；其次，对于网络中的某个点，如果不是起笔点或停笔点，那么它若有一条弧线进笔，必有另一条弧线出笔，也就是说，交汇于这样点的弧线必定成双成对，即这样的点必定是偶点！

上述分析表明：网络中的奇点，只能作为起笔点或停笔点。然而，一个可以一笔画画成的图形，其起笔点与停笔点的个数，要么为0，要么为2。于是，欧拉得出了以下著名的“一笔画原理”：

“网络能一笔画画成必须是连通的，而且奇点个数或为0，或为2。当奇点个数为0时，全部弧线可以排成闭路。”

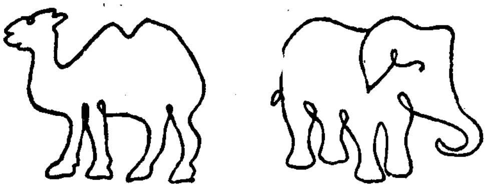


现在读者看到，七桥问题的奇点个数为4（见右图）。因而，要找到一条经过七座桥，但每座桥只走一次

的路线是不可能的！

想不到轰动一时的哥尼斯堡七桥问题，竟然与孩子们的游戏，想用一笔画画出“串”字和“田”字这类问题一样，而后者并不比前者更为简单！

下图画的两只动物世界的庞然大物，都可以用一笔画完成。它们的奇点个数分别为0和2。这两张图选自《智力世界》一刊，也算一种别有风趣的例子！



需要顺便提到的是：既然可由一笔画画成的脉络，其奇点个数应不多于两个，那么，两笔划或多笔划能够画成的脉络，其奇点个数应有怎样的限制呢？我想，聪明的读者完全能自行回答这个问题。倒是反过来的提问需要认真思考一番：即若一个连通网络的奇点个数为0或2，是不是一定可以用一笔画画成？不过，要告诉读者的是：结论是肯定的！一般地，我们有：

“含有2n（n>0）个奇点的脉络，需要n笔划画成。”

二、迷宫之"谜"

唐朝贞观年间，国势强盛，四海升平。

公元641年（贞观14年），吐蕃国国王松赞干布，派使臣到长安向当时的皇帝唐太宗请求联姻。唐王是个十分精细的人，他认为汉、藏联姻对于睦邻边疆是件好事，但必须考一考辅佐藏王的使臣的智慧，于是便出了几道难题要求使者回答。没想到使者对所提问题对答如流，竟使太宗皇帝深感满意，毅然决定举行最后一场测试。

一天晚上，唐王在宫中宴请使者。宴后突然提出要求，让使者自行出宫。而此时此刻的宫室是经过特殊布置了的，四处道路扑朔迷离！唐王想看一看，藏王的使臣在醉酒的情况下，是否仍然具备智慧，以摆脱眼下四处碰壁的困境。

不料使者聪明过人，当他进宫的时候，便已留心观察四周环境，做下记号。出宫时，居然未经多大周折，便就顺利步出宫门！

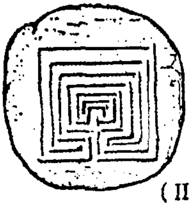
吐蕃的使者终于以自己的才智，赢得了唐王的信赖，并答应把美丽而贤惠的文成公主嫁给藏王，从而为我国民族团结的史诗，谱写了可歌的一章。

上面故事中，唐王的最后一道试题，实际上是一种迷宫。古往今来，迷宫被很多人所津津乐道，并被看成是聪明和智慧的象征！

在《三国演义》中有这样一则故事，大意是：东吴大将陆逊被诸葛亮八卦阵困于江边，但见怪石嵯峨，槎枒似剑，

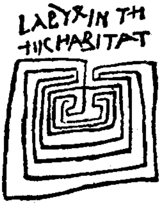
横沙立土，重叠如山，无路可出。实在写得神乎其神！想来那也不过是一种用巨石垒成的迷宫罢了。


（I）

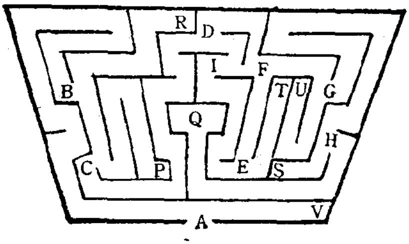

（II）

国外的迷宫更是常见。左图（I），宛如人的指纹，那是南非出土的，祖鲁族人的迷宫；图（Ⅱ）是希腊克里特岛出土的货币，币上的迷宫清晰可辨！下图（Ⅲ）是意大利出土的酒瓶迷宫，图案古朴优美，使人看去别有一番情趣；图（Ⅳ）是在庞贝城遗址发现的。庞贝城曾是古罗马相当繁荣的一座城市，约建于公元前七世纪。公元79年8月，邻近的维苏威火山爆发，致使全城惨遭湮没。自十八世纪中叶起，考古学家开始断断续续地发掘庞贝遗迹，使火山灰下的庞贝城，得以重见天日！左图（Ⅳ）的迷宫，就是在那以后找到的。


（III）

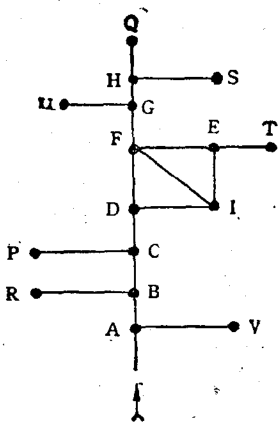

（IV）

右面是英国伦敦的Hampton court迷阵实图。



图中A为进出口，黑线表示篱笆，白的空

隙表示通路。迷阵的中央Q处有两根高柱，柱下备有椅子，可供游人休息。读者可别以为这一迷阵并不复杂，倘若身临其境，也难免要东西碰壁，左右受阻，陷于迷津！



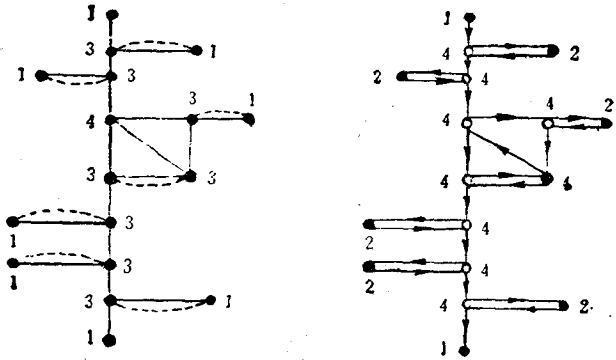
那么，迷宫之“迷”的谜底何在呢？让我们仍举Hampton court迷阵为例。如同上节中七桥问题那样，我们把该迷阵中所有的通路都用弧线予以表示，便能得到左图那样的脉络。

现在的问题是：如何从A点出发走到迷宫的中心Q；或从Q点回到入口处A？只是，从A到Q的通路，并不像左图那么笔直，实际上是弯弯曲曲回回转转的。走的时候，稍不小心便会进入死胡同，或者在某范围打转转，甚至于走回头路！

不过，有一种情况似乎例外，即迷宫的网络可以由“一笔画”沟通。这时只要不走重复的路，就一定能顺利走出迷宫！这无疑等于解决了迷宫问题。然而，倘若迷宫真是如同上述那样，其本身也就失去了“迷”的含义。

现实的迷宫往往要复杂很多。以Hampton迷阵为例，它的脉络中除F点外，几乎全是奇点。因而，不要说一笔画，即使五、六笔画也难以沟通整个脉络！

然而，我们并没有因此而“山穷水尽”。因为任何一个脉络都可以通过在奇点间添加弧线的办法，使它变成“一笔画”的图形。这是由于在奇点间添加一条弧线，可以一下子使脉络的奇点个数减少两个！



上图是把Hampton 迷阵脉络的奇点两两连接起来，所得新脉络的奇点已经只剩两个，因而可以用一笔画画出。

上述方法表明：要想走出迷宫，只须在岔道口做上记号，并对某些线路作必要的重复。这样，纵然我们多走了些路，却能稳当地走出迷宫！猜想当初聪明的吐蕃使者，大约就是这样做的！

最后我们似乎还须补充一点：即网络的奇点必定成双。这是图论中最早的一个定理，也是由欧拉发现的。

证明很简单：我们可以设想如同下图那样，拆去原来网络中的某条弧线。这样一来，要么奇点增加两个，偶点减少两个；要么偶点增加两个，奇点减少两个；要么奇偶点不增也不减，除此之外别无第四种可能！所有上述情形，网络奇点数目的奇偶性都不会改变。如此这般，我们可以把网络中的弧线一条又一条地拆去，直至最后只剩下一条弧线为止。这时奇点数目明显为2，从而推出原网络的奇点数目一定为偶数。

上述证明很容易使人想起以下有趣的魔术游戏：