数学分析中的问题和定理

第二卷

G.波利亚 G.舍贵 著

上海科学技术出版社

数学分析中的问题和定理

第二卷

函数论　零点　多项式
行列式　数论　几　何

G. 波利亚　G. 舍贵　著
张奠宙　宋国栋　魏国强　译
李锐夫　程其襄　陆洪文　校

上海科学技术出版社

数学分析中的问题和定理
第 二 卷
G. 波利亚　G. 舍贵　著
张奠宙　宋国栋　魏国强　译
李锐夫　程其襄　陆洪文　校
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路 450 号）
新华书店上海发行所发行　上海商务印刷厂印刷
开本 850×1156 1/32　印张 16　字数 421,000
1985 年 6 月第 1 版　1985 年 6 月第 1 次印刷
印数 1—14,800

统一书号：13119·1219　　定价：3.90 元

记号和缩写

在全书中应用下列记号和缩写：

$a_n \to a$ 表示当 $n \to \infty$ 时，a_n 趋于 a.

$a_n \backsim b_n$(读作：a_n 渐近等于 b_n)表示：对充分大的 n, $b_n \neq 0$，且当 $n \to \infty$ 时 $\frac{a_n}{b_n} \to 1$.

$O(a_n)$，这里 $a_n > 0$，表示与 a_n 的比保持有界的量，$o(a_n)$表示与 a_n 的比当 $n \to \infty$ 时趋于 0 的量.

这些记号同样可用于不是 $n \to \infty$ 的极限过程.

$x \to a+0$ 表示 x 从右边趋向于 a($x \to a-0$ 是从左边趋向于 a).

$\exp(x) = e^x$，e 是自然对数的底.

给定 n 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, $\max(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 表示 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的最大者(或最大者之一)，而 $\min(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 表示 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的最小者. $\max f(x)$ 和 $\min f(x)$ 对定义于区间 a, b 上的实函数 $f(x)$ 具有类似的意义，只要 $f(x)$ 在 a, b 上具有最大值或最小值. 另外我们分别对上确界和下确界采用同样的记号(在复变量情况中也是这样).

$\operatorname{sgn} x$ 代表符号函数

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0. \end{cases}$$

$[x]$ 表示不大于 x 的最大整数($x-1<[x]\leqslant x$). 然而在不致引起误会时，我们也常用方括号代替通常的括号(仅在第 I 篇，第 1 章，§ 5 中有它们在特殊意义下的用途).

$\bar{z}$ 是复数 z 的共轭复数.

对具有通项 $a_{\lambda,\mu}$, $\lambda, \mu = 1, 2, \cdots, n$ 的行列式，我们用缩写记

号

$$|a_{\lambda\mu}|_1^n \quad 或 \quad |a_{\lambda\mu}|_{\lambda,\mu=1,2,\cdots,n} \quad 或 \quad |a_{\lambda 1},\ a_{\lambda 2},\ \cdots,\ a_{\lambda n}|_1^n.$$

非空连通开集(仅含内点)称为区域. 区域的闭包(开集和它的边界的并集)称为域(这术语不大常用,有时要加以特别强调,并说是"开区域"或"闭区域").

一条连续曲线定义为区间 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 的单值连续象, 即点 $z=x+iy$ 的集合,这里 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都是区间 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上的连续函数.若 $\varphi(0)=\varphi(1)$, $\psi(0)=\psi(1)$,则称曲线是闭的,若由 $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$, $\psi(t_1)=\psi(t_2)$, $t_1<t_2$ 得到 $t_1=0$, $t_2=1$,称曲线无重点. 没有重点的曲线也称为简单曲线. 不闭的简单连续曲线常称为简单弧.

平面上无重点的闭连续曲线(约当曲线)确定了两个以它为公共边界的区域.

我们假定线积分和复积分的路径是连续的和可求长的.

(a, b) 表示开区间 $a<x<b$, $[a, b)$ 表示半开区间 $a \leqslant x<b$, $(a, b]$ 表示半开区间 $a<x \leqslant b$, $[a, b]$ 表示闭区间 $a \leqslant x \leqslant b$, 当不必区分这四种情况时,我们采用术语"区间 a, b".

"iff"常用作"当且仅当"的略语.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目　　录

第 IV 篇

单复变量函数　专题部分

第一章　最大项和中心指数，最大模和零点个数

第二章　单 叶 映 射

第三章　杂　　题

第 V 篇

零点的定位

第一章 Rolle 定理和 Descartes 符号法则

第二章 复平面的几何和多项式的零点

第三章 杂　题

第 VI 篇

多项式和三角多项式

第 VII 篇

行列式和二次型

第 VIII 篇

数　论

第一章　数论函数

第二章 整系数多项式和整数值函数

第三章 幂级数中的数论问题

第四章 关于代数整数的一些问题

第五章 杂 题

第 IX 篇

几 何 问 题

附 录

问　题

第 IV 篇

单复变量函数

专题部分

第一章　最大项和中心指数，最大模和零点个数

§1. $\mu(r)$与$M(r)$、$\nu(r)$与$N(r)$之间的类似

设 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 是不全为零的复数．设幂级数

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots$$

有收敛半径 R, $R>0$．若 $R=\infty$, 则$f(z)$称为整函数．设 $0\leqslant r<R$, 则序列

$$|a_0|,\ |a_1|r,\ |a_2|r^2,\ \cdots,\ |a_n|r^n,\ \cdots$$

趋于 0, 从而含有最大的项, 称为最大项, 其值记作 $\mu(r)$．于是, 对 $n=0, 1, 2, 3, \cdots, r\geqslant0$, 有

$$|a_n|r^n\leqslant\mu(r) \qquad [\text{I, 第三章, § 3}].$$

中心指数 $\nu(r)$ 是使 $|a_n|r^n$ 达到最大值的 n 值, 从而 $\mu(r)=|a_{\nu(r)}|r^{\nu(r)}$．如果有几个 $|a_n|r^n$ 等于 $\mu(r)$, 则 $\nu(r)$表示相应 n 中的最大者．

以上定义用于 $r>0$ 的情形; 对 $r=0$, 参照 **15**.

以 $M(r)$表示函数$f(z)$ 在圆 $|z|=r$ 上的最大模, 则 $M(r)$ 也是 $|f(z)|$ 在圆盘$|z|\leqslant r$ 上的最大值[III **266**]．对 $n=0, 1, 2, \cdots$, $r>0$, 我们有

$$|a_n|r^n\leqslant M(r).$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

当且仅当序列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 除 a_n 外的所有项都为零时，等号成立[III **122**].

零点个数 $N(r)$ 是在闭圆盘 $|z|\leqslant r$ 上的零点个数，按重数计数.

上述记号适用于整个一章.

1. 试对下列幂级数计算 $\mu(r)$ 和 $\nu(r)$：

$$1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots.$$

2. 试对下列幂级数计算 $M(r)$ 和 $N(r)$：

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots.$$

3. 试对下列幂级数计算 $\mu(r)$ 和 $\nu(r)$：

$$\frac{1}{1!}+\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{5!}+\cdots+\frac{z^n}{(2n+1)!}+\cdots.$$

4. 试对下列级数计算 $M(r)$ 和 $N(r)$：

$$\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}=\frac{1}{1!}-\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\cdots+\frac{(-z)^n}{(2n+1)!}+\cdots.$$

5. 试对下列几何级数计算 $\nu(r)$：

$$1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots.$$

6. 试对下列级数计算 $N(r)$：

$$1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots.$$

7. 对 n 次多项式 $a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$，$a_n\neq0$，我们有

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log\mu(r)}{\log r}=\lim_{r\to\infty}\nu(r)=n.$$

8. 对 n 次多项式 $f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$，$a_n\neq0$，我们有

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log M(r)}{\log r}=\lim_{r\to\infty}N(r)=n.$$

9. 对超越整函数，**7** 中的两个极限等于 ∞.

10. 对超越整函数，**8** 中第一个极限等于 ∞，第二个可为有限或无穷.

11. 以 $\mu_k(r)$ 和 $\nu_k(r)$ 分别表示级数

$$a_0+a_1z^k+a_2z^{2k}+\cdots+a_nz^{nk}+\cdots,\quad k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

的最大项和中心指数．试用 $\mu_1(r)$, $\nu_1(r)$ 表示 $\mu_k(r)$, $\nu_k(r)$.

12．以 $M_k(r)$和 $N_k(r)$表示$f(z^k)$在圆域 $|z|\leqslant r$ 上的最大模和零点个数，$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$．试用 $M_1(r)$, $N_1(r)$ 表示 $M_k(r)$, $N_k(r)$.

13．试对两个幂级数

$$1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\cdots+\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\frac{e^z+e^{-z}}{2},$$

$$1+\frac{2z^2}{2!}+\frac{2^3z^4}{4!}+\frac{2^5z^6}{6!}+\cdots+\frac{2^{2n-1}z^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$=\left(\frac{e^z+e^{-z}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{e^{2z}+e^{-2z}}{4}$$

分别计算极限 $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{\nu(r)}{\log\mu(r)}$.

14．和 **12** 中的记号相对照，我们用 $M_k(r)$ 和 $N_k(r)$ 分别表示 $(f(z))^k$ 在圆域 $|z|\leqslant r$ 上的最大模和零点个数．试证商 $\dfrac{N_k(r)}{\log M_k(r)}$ 与 k 无关.

15．若 $a_0=a_1=\cdots=a_{q-1}=0$, $a_q\neq0$, 令 $\nu(0)=q$．试证, $\nu(r)$ 为阶梯函数, 在其跳跃点上的跃度是递增的正整数, 且处处右连续 [I **120**].

16．若 $a_0=a_1=\cdots=a_{q-1}=0$, $a_q\neq0$, 则 $N(0)=q$．试证, $N(r)$ 为阶梯函数, 在其跳跃点上的跃度是递增的正整数, 且处处右连续.

17．若 $a_0=0$, $0<r_1<r_2<R$, 则

$$\frac{\mu(r_2)}{\mu(r_1)}\geqslant\frac{r_2}{r_1}.$$

18．若 $f(0)=0$, $0<r_1<r_2<R$, 则

$$\frac{M(r_2)}{M(r_1)}\geqslant\frac{r_2}{r_1}.$$

19．在直角坐标系 ξ, η 中, 函数 $\eta=\log\mu(e^\xi)$ 表示一条非减的凸曲线. [考虑一组直线

$$\eta=\log|a_0|,\ \eta=\xi+\log|a_1|,\ \ \eta=2\xi+\log|a_2|,\ \cdots,$$
$$\eta=n\xi+\log|a_n|,\ \cdots,$$
略去 $a_n=0$ 时无意义的项. 如何用这种图形来解释 $\mu(r)$ 和 $\nu(r)$?]

20. 在直角坐标系 $\xi,\ \eta$ 中, 函数 $\eta=\log M(e^{\xi})$ 表示一条递增的、严格凸的曲线(对某些特殊的多项式, 曲线退化为一条直线).

21. 设 α 为定数, $0<\alpha<1$, 则 r 增加时, 商 $\mu(\alpha r)/\mu(r)$ 非增.

22. 设 α 为定数, $0<\alpha<1$, 则除了对某些多项式外, 当 r 增加时商 $M(\alpha r)/M(r)$ 为严格递减[**20**].

23. 设 $R=\infty$, 则对固定的 α, $0<\alpha<1$, 有

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\mu(\alpha r)}{\mu(r)}=0,\ \text{当幂级数有无穷多项时},$$
$$=\alpha^n,\ \text{当幂级数退化为 } n \text{ 次多项式时}.$$

24. 设 $f(z)$ 为整函数. 对固定的 α, $0<\alpha<1$, 有

$$\lim_{r\to\infty}\frac{M(\alpha r)}{M(r)}=0,\ \text{当 } f(z) \text{ 为超越整函数时},$$
$$=\alpha^n,\ \text{当 } f(z) \text{ 为 } n \text{ 次多项式时}.$$

我们将中心指数 $\nu(r)$ 的跳跃点, 按其大小排列, 记作

$$\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3,\ \cdots,\ \rho_n,\ \cdots;$$
$$\rho_1=\rho_2=\cdots=\rho_q=0,\ \rho_{q+1}>0,\ q\geqslant 0,$$
其中, 若一跳跃点的跃度为 m, 则使它出现 m 次; 在点 $r=0$ 上, 我们把 $\nu(0)$ 看作跳跃[**15**]. 该序列可在有限项以后终止.

我们将 $f(z)$ 的零点按其绝对值增加的次序排列, 当绝对值相等时按其幅角增加的次序排列, 记作

$$w_1,\ w_2,\ w_3,\ \cdots,\ w_n,\ \cdots;$$
$$w_1=w_2=\cdots=w_q=0,\ \ w_{q+1}\neq 0,\ q\geqslant 0,$$
其中 m 重零点要出现 m 次.

设 $|w_n|=r_n$, $n=1, 2, 3, \cdots$, 从而有

$$r_1\leqslant r_2\leqslant r_3\leqslant\cdots\leqslant r_n\leqslant\cdots.$$

这个序列可在有限项以后终止.

上述记号应用于整个一章.

25. 若 $\rho_n<\rho_{n+1}$, 则在半闭区间 $[\rho_n, \rho_{n+1})$ 内

$$\nu(r)=n.$$

26. 若 $r_n<r_{n+1}$, 则在半闭区间 $[r_n, r_{n+1})$ 内

$$N(r)=n.$$

27. 试对下列幂级数计算数 ρ_n:

$$1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots,$$

$$1+\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{5!}+\cdots+\frac{z^n}{(2n+1)!}+\cdots,$$

$$1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots+\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots.$$

28. 试对下列函数计算数 r_n:

$$e^z+i,\quad \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}},\quad \cos z.$$

29. 如果存在无穷多个 ρ_n, 则

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n=R.$$

30. 如果存在无穷多个 r_n, 则

$$\lim_{n\to\infty}r_n=R.$$

31. 设 $a_0\neq 0$, 则当 $\rho_n\leqslant r\leqslant\rho_{n+1}$ 时,

$$\mu(r)=\frac{|a_0|r^n}{\rho_1\rho_2\cdots\rho_n}.$$

32. 设 $a_0\neq 0$, 则

$$M(r)\geqslant\frac{|f(0)|r^n}{r_1r_2\cdots r_n}.$$

[III **120**.]对哪些整函数,此不等式中的等号成立?

33. 设 $a_0\neq 0$. 我们有

$$\log\mu(r)-\log|a_0|=\int_0^r\frac{\nu(t)}{t}dt.$$

34. 设 $a_0\neq 0$. 我们有

$$\log M(r)-\log|f(0)|\geqslant\int_0^r\frac{N(t)}{t}dt.$$

35. 对任意整函数，有

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\nu(r)}{\log r}=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log\mu(r)}{\log r}.$$

36. 对任意整函数，有

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log N(r)}{\log r}\leqslant\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log M(r)}{\log r}.$$

37. 考虑一处处收敛的幂级数并设 $k>0$. 无穷级数 $\sum_{n=q+1}^{\infty}\rho_n^{-k}$ 与无穷积分 $\int_1^{\infty}r^{-k-1}\log\mu(r)dr$ 同为收敛或同为发散.

38. 考虑一整函数并设 $k>0$. 如果无穷积分 $\int_1^{\infty}r^{-k-1}\log M(r)dr$ 收敛，则无穷级数 $\sum_{n=q+1}^{\infty}r_n^{-k}$ 也收敛(反之不成立!).

39. 考虑一个在单位圆内部收敛的幂级数，并设 $k>0$. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\rho_n)^{k+1}$ 与积分 $\int_0^1(1-t)^{k-1}\log\mu(t)dt$ 同为收敛或同为发散.

40. 考虑一个在单位圆内部正则的函数，并设 $k>0$. 如果积分 $\int_0^1(1-t)^{k-1}\log M(t)dt$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-r_n)^{k+1}$ 也收敛.

§2. 关于 $\mu(r)$ 和 $\nu(r)$ 的进一步结果

41. 在一直角坐标系中标出以下各点：

$$(0,\ -\log|a_0|),\ (1,\ -\log|a_1|),$$
$$(2,\ -\log|a_2|),\ \cdots,\ \ (n,\ -\log|a_n|),\ \cdots$$

(删去 $a_n=0$ 时无意义的点)，从每一点垂直向上画一条射线. 包含所有这些射线的最小凸域 $\mathfrak{K}$ 伸展到无穷. 画出具有方向系数 $\log r$ 的支撑线(即至少包含 $\mathfrak{K}$ 的一个边界点而不含 $\mathfrak{K}$ 的内点，且与正实轴夹角的正切为 $\log r$ 的直线). 试在得到的图象中解释 $\log\mu(r)$, $\nu(r)$, $\log\rho_n$ 的意义.

42. 若 m 为 $\nu(r)$ 所取到的正整数值，$m>\nu(0)$，则

$$\rho_m=\max\left(\left|\frac{a_0}{a_m}\right|^{\frac{1}{m}},\quad \left|\frac{a_1}{a_m}\right|^{\frac{1}{m-1}},\ \cdots,\ \left|\frac{a_{m-1}}{a_m}\right|\right).$$

43. 设幂级数

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots$$

的每一项依次成为最大项，即对每一个指标 $n=0,1,2,\cdots$，至少有一个实数 r，$r>0$，使 $|a_n|r^n$ 不小于其它项．对此，充要条件是

$$0<\left|\frac{a_0}{a_1}\right|\leqslant\left|\frac{a_1}{a_2}\right|\leqslant\left|\frac{a_2}{a_3}\right|\leqslant\cdots\leqslant\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\leqslant\cdots.$$

[**31**, I **117**].

44. 设 $0<\alpha<1$．对于在 $|z|<1$ 内收敛的幂级数

$$1+e^{\alpha^{-1}1^\alpha}z+e^{\alpha^{-1}2^\alpha}z^2+\cdots+e^{\alpha^{-1}n^\alpha}z^n+\cdots,$$

其中心指数依次取所有的值 0, 1, 2, 3, …，其最大项满足

$$\mu(r)\sim\exp\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(-\frac{1}{\log r}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)\quad(\text{当 } r\to1).$$

45(续)．当 r 趋于 1 时，

$$\sum_{n=0}^{\infty}e^{\alpha^{-1}n^\alpha}r^n\sim\frac{\sqrt{2\pi\alpha}}{1-\alpha}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(\log\mu(r))^{\frac{1}{2}+\frac{1-\alpha}{\alpha}}\mu(r).$$

$\left[\text{考虑}\int_0^\infty e^{\alpha^{-1}x^\alpha r^x}dx;\ \text{II } \mathbf{208}.\right]$

46. 设 $\alpha>0$．对于对一切有限的 z 都收敛的幂级数

$$1+1^{-\alpha}z+2^{-2\alpha}z^2+\cdots+n^{-n\alpha}z^n+\cdots,$$

试计算 ρ_1, ρ_2, ρ_3, …，并证明其最大项满足

$$\mu(r)\sim\exp(\alpha e^{-1}r^{\frac{1}{\alpha}})\quad(\text{当 } r\to+\infty).$$

47(续)．对固定的 α，$\alpha>0$，当 r 趋于 $+\infty$ 时有

$$1+1^{-\alpha}r+2^{-2\alpha}r^2+\cdots+n^{-n\alpha}r^n+\cdots$$
$$\sim\frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha}[\log\mu(r)]^{\frac{1}{2}}\mu(r).$$

[II **209**.]

§3. $\mu(r)$, $\nu(r)$, $M(r)$ 和 $N(r)$ 之间的联系

48. 对整函数 $f(z)$，设

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com