第八章 向量代数与空间解析几何

第一节 空间直角坐标系和向量基本知识

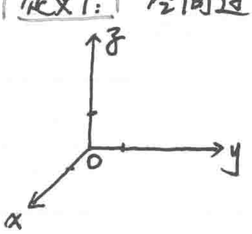
Ⅰ 新课导入

平面解析几何中，通过坐标把平面上的点与有序数对建立了一一对应关系，把平面上的图形与代数方程对应起来，利用代数方法来研究几何问题。本章用类似的方法建立空间中的点与三元有序数组，空间图形与代数方程之间的关系，并用代数方法来研究空间几何问题。正像平面解析几何对学习一元函数微积分是不可缺少的一样，空间解析几何知识对学习多元函数微积分也是十分必要的。

Ⅱ 授课内容

一 空间直角坐标系

定义1： 空间过定点O作三条互相垂直且单位长度相同的数轴。(x. y. z轴)

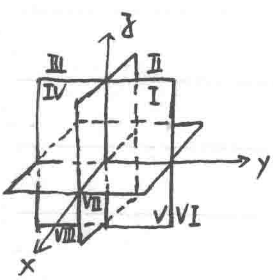


坐标轴：x轴（横轴）. y轴（纵轴）. z轴（竖轴）

坐标原点： O点

三轴正方向： 由右手法则确定。 记为Oxyz

坐标面： xOy面 xOz面 yOz面

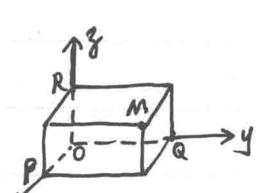


P45 三个两两垂直的坐标面把空间分成八个卦限：Ⅰ.Ⅱ.…Ⅷ.

xOy面上方，逆时针方向确定。

Ⅰ:	$x>0$.	$y>0$.	$z>0$	Ⅴ	$z<0$
Ⅱ:	$x<0$,	$y>0$.	$z>0$	Ⅵ	$z<0$
Ⅲ:	$x<0$,	$y<0$.	$z>0$.	Ⅶ	$z<0$
Ⅳ:	$x>0$,	$y<0$,	$z>0$.	Ⅷ	$z<0$.

在Oxyz中. 设M为空间中任一点，过M作三个平面分别垂直于x. y. z轴. 与坐标轴交点分别为P. Q. R，设此三点分别在x. y. z轴上的坐标为x. y. z.



则M唯一确定一个三元有序数组(x. y. z)；

反之：任一有序数组(x. y. z). 取x. y. z轴上的点P. Q. R，过此三点分别作x. y. z轴的垂直平面，三面交于一点M，则有序数组(x. y. z)确定空间中一点M.

三元有序数组(x. y. z)与空间中的一点建立一一对应关系。

三元有序数组称为M的直角坐标，记为$M(x,y,z)$.

显然：原点$O(0,0,0)$

x、y、z轴上点的坐标：$(x,0,0)$ $(0,y,0)$，$(0,0,z)$

xoy面、yoz面、zox面上的点：$(x,y,0)$，$(0,y,z)$，$(x,0,z)$

二 向量的基本概念

自由向量：大小 方向.(与起点无关). $\vec{a}$、$\vec{b}$等

模：向量的大小，记$|\vec{a}|$

单位向量：模为1.　零向量：模为0，记$\vec{0}$

向量相等：大小和方向都相同.　$\vec{a}=\vec{b}$

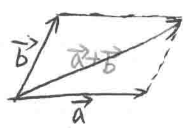
向量平行：方向相同或相反.　$\vec{a}\parallel\vec{b}$，也称共线.

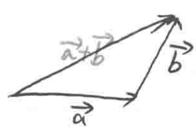
与向量$\vec{a}$同向的单位向量：记为$\vec{e}_a$，且$\vec{e}_a=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

与x轴、y轴、z轴同向的单位向量：记为$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$

线性运算

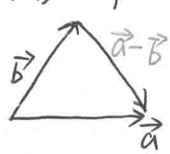
向量加法：平行四边形法则或三角形法则





交换律
结合律

向量减法：三角形法则

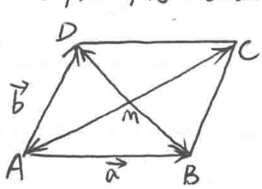


向量数乘：$\lambda\vec{a}$ 仍为向量：模$=|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$　　结合律 分配律

$\lambda>0$ 方向与$\vec{a}$同.　$\lambda<0$，方向与$\vec{a}$反.

$\boxed{\text{定理1}}$：$\vec{a}\parallel\vec{b} \iff \vec{a}=\lambda\vec{b}$

例1. 平行四边形$ABCD$中，设$\vec{a}=\vec{AB}$，$\vec{b}=\vec{AD}$. 试用$\vec{a}$、$\vec{b}$表示$\vec{MA}$、$\vec{MB}$、$\vec{MC}$、$\vec{MD}$. 其中M为对角线交点.



解. 由 $\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{AD}=\vec{a}+\vec{b}$　$\vec{DB}=\vec{AB}-\vec{AD}=\vec{a}-\vec{b}$

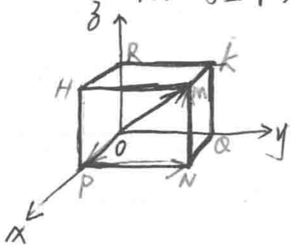
$\vec{MA}=\frac{1}{2}\vec{CA}=-\frac{1}{2}\vec{AC}=-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$　$\vec{MC}=\frac{1}{2}\vec{AC}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

$\vec{MB}=\frac{1}{2}\vec{DB}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$　$\vec{MD}=-\frac{1}{2}\vec{DB}=-\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$

三 向量的坐标.

1. 向量坐标表示.

任给向量 $\vec{r}$, 使起点为 O. 则有对应点 M. 使 $\vec{OM}=\vec{r}$



$$\vec{r}=\vec{OM}=\vec{OP}+\vec{PN}+\vec{NM}$$
$$=\vec{OP}+\vec{OQ}+\vec{OR}$$

设 $\vec{OP}=x\vec{i}$, $\vec{OQ}=y\vec{j}$. $\vec{OR}=z\vec{k}$ $\vec{r}$沿坐标轴方向上的分量

$\therefore \vec{r}=\vec{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ 坐标分解式

M点 $\longleftrightarrow \vec{r}=\vec{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k} \longleftrightarrow (x. y. z)$

有序数 x·y·z 称为向量 $\vec{r}$ 的坐标, 记 $\vec{r}=(x.y.z)$

2. 向量线性运算:

$\vec{a}=(a_x. a_y. a_z)$ $\vec{b}=(b_x. b_y. b_z)$

即 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$

则 $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x)\vec{i}+(a_y\pm b_y)\vec{j}+(a_z\pm b_z)\vec{k}$

$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x)\vec{i}+(\lambda a_y)\vec{j}+(\lambda a_z)\vec{k}$

即 $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x,\ a_y\pm b_y,\ a_z\pm b_z)$

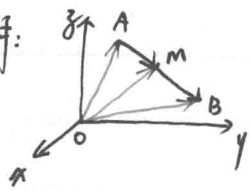
$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x.\ \lambda a_y.\ \lambda a_z)$

结论: $\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow a_x=b_x,\ a_y=b_y.\ a_z=b_z$

$\vec{a}\parallel\vec{b} \Leftrightarrow \vec{b}=\lambda\vec{a} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$ (若某个分母为0. 则分子也为0)

例2. 已知 $A(x_1.y_1.z_1)$. $B(x_2.y_2.z_2)$ 以及实数 $\lambda\neq-1$. 在AB上求点M 使 $\vec{AM}=\lambda\vec{MB}$.

解:



$\because \vec{AM}=\vec{OM}-\vec{OA}$ $\vec{MB}=\vec{OB}-\vec{OM}$

$\therefore \vec{OM}-\vec{OA}=\lambda(\vec{OB}-\vec{OM})$

$\therefore \vec{OM}=\frac{1}{1+\lambda}(\vec{OA}+\lambda\vec{OB})$

由 $\vec{OA}=(x_1, y_1, z_1)$. $\vec{OB}=(x_2.y_2.z_2)$

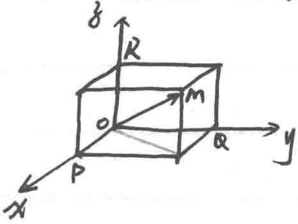
$\therefore \vec{OM}=\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$

即点M坐标.

$\lambda=1$时 即为中点.

四 向量的模、方向角、投影

1. 模与两点间距离公式



$\vec r = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$

$|\vec r| = |OM| = \sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2}$

由 $\overrightarrow{OP}=x\vec i$　$\overrightarrow{OQ}=y\vec j$　$\overrightarrow{OR}=z\vec k$

有 $|OP|=|x|$　$|OQ|=|y|$，$|OR|=|z|$

$\boxed{\therefore\ |\vec r| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

设 $A(x_1,y_2,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$ 则 A、B间距离 $|AB|$ 即为 $|\overrightarrow{AB}|$

由 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$

$\boxed{\therefore\ |AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$

例3. 求证：$M_1(4,3,1)$，$M_2(7,1,2)$，$M_3(5,2,3)$ 三点为顶点的三角形为等腰三角形.

证：∵ $|M_1M_2|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14$

$|M_2M_3|^2=(7-5)^2+(1-2)^2+(2-3)^2=6$

$|M_3M_1|^2=(5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2=6$

∴ $|M_2M_3|=|M_3M_1|$

∴ $\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰三角形.

例4. 已知 $A(4,0,5)$，$B(7,1,3)$ 求与 $\overrightarrow{AB}$ 平行的单位向量 $\vec e$

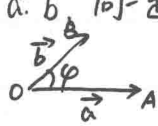
解：∵ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3,1,-2)$

∴ $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$

∴ $\vec e=\pm\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{14}}(3,1,-2)=\left(\pm\dfrac{3}{14}\sqrt{14},\ \pm\dfrac{\sqrt{14}}{14},\ \mp\dfrac{\sqrt{14}}{7}\right)$

2. 方向角与方向余弦

向量夹角：两向量 $\vec a$、$\vec b$ 同一起点O，终点为A、B.



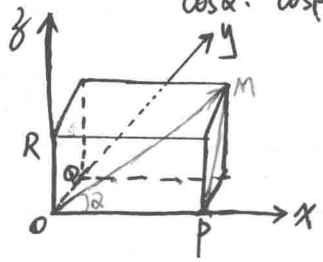
不超过π的∠AOB为夹角. 记 $(\widehat{\vec a,\vec b})$

$0\le\varphi\le\pi$

若有一个为零向量，夹角在0与π间任取.

定义2: 非零向量 $\vec{a}$ 与坐标轴的夹角 $\alpha.\beta.\gamma$ 称为向量 $\vec{a}$ 的方向角.

$\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma$ 称为 $\vec{a}$ 的方向余弦.



$\vec{OM}=\vec{r}=(x.y.z)$

$MP\perp OP.\quad \vec{OP}=(x.0.0)$

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{|OP|}{|OM|}=\frac{x}{|\vec{r}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$$

同理 $\cos\beta=\frac{y}{|\vec{r}|}\quad \cos\gamma=\frac{z}{|\vec{r}|}$

$$(\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma)=\left(\frac{x}{|\vec{r}|}.\frac{y}{|\vec{r}|}.\frac{z}{|\vec{r}|}\right)$$
$$=\frac{1}{|\vec{r}|}(x.y.z)=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}=\vec{e}_r$$

即 $\boxed{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1}$

例5. 已知 $M_1=(4.\sqrt{2}.1)$ 和 $M_2(3.0.2)$ 计算 $\vec{M_1M_2}$ 的模.方向余弦.方向角.

解: $\vec{M_1M_2}=(3.0.2)-(4.\sqrt{2}.1)=(-1.-\sqrt{2}.1)$

$|\vec{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=2$

$\cos\alpha=\frac{-1}{|\vec{M_1M_2}|}=-\frac{1}{2}\qquad \cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2}.\qquad \cos\gamma=\frac{1}{2}$

$\therefore \alpha=\frac{2}{3}\pi.\quad \beta=\frac{3}{4}\pi.\quad \gamma=\frac{\pi}{3}$

例6. 设点A位于第I卦限. $\vec{OA}$ 与x.y轴夹角分别为 $\frac{\pi}{3}.\frac{\pi}{4}$ 且 $|\vec{OA}|=6$. 求A坐标.

解: $\alpha=\frac{\pi}{3}.\beta=\frac{\pi}{4}.$ 由 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ 知

$$\cos^2\gamma=1-\cos^2\frac{\pi}{3}-\cos^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{4}$$

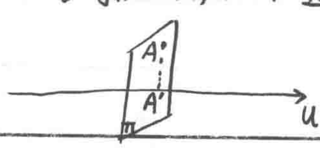
$\because$ 点A在第I卦限. 知 $\cos\gamma>0$ 故 $\cos\gamma=\frac{1}{2}$

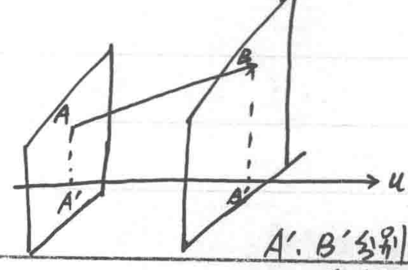
$\therefore \vec{OA}=|\vec{OA}|\cdot\vec{e}_{OA}=6\left(\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}\right)=(3.3\sqrt{2}.3)$

3. 向量在轴上的投影.

空间点A. 轴u. 过A作平面π⊥u轴

交点A′称为点A在u上的投影.



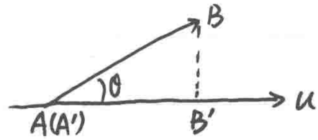


A′.B′分别为A.B在u轴上的投影.

轴u上 $A'B'$的量 称为 $\overrightarrow{AB}$ 在 u上的投影. 记 $Prj_u\overrightarrow{AB} = A'B'$.

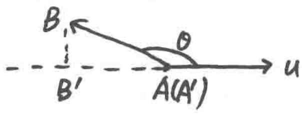
大小为线段$A'B'$长度. $A'B'$与u同向时为正, 反向时为负.

特别地



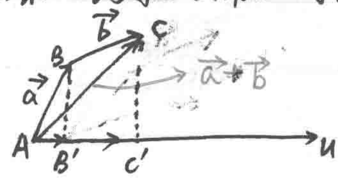
$A'B' = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta$

即 $Prj_u\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta$



定理2. 向量$\overrightarrow{AB}$在u轴上的投影等于该向量的模乘以它与轴u夹角θ的余弦.

$$Prj_u\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta$$

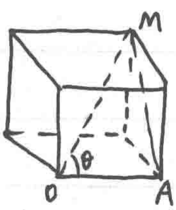


定理3. $Prj_u(\vec{a}+\vec{b}) = Prj_u\vec{a} + Prj_u\vec{b}$

$Prj_u(\lambda\vec{a}) = \lambda Prj_u\vec{a}$

如 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 则 $Prj_x\vec{a} = a_x$. $Prj_y\vec{a} = a_y$ $Prj_z\vec{a} = a_z$

例7. 立方体中一对角线OM. 一条棱OA. 且$|OA| = a$. 求$\overrightarrow{OA}$在$\overrightarrow{OM}$方向上的投影 $Prj_{\overrightarrow{OM}}\overrightarrow{OA}$.



解: 记 $\angle AOM = \theta$.

$$\cos\theta = \frac{|OA|}{|OM|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore Prj_{\overrightarrow{OM}}\overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}|\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

Ⅲ 本课小结

本节主要介绍了空间直角坐标系以及向量的一些基本知识, 建立空间中点与三元有序数组之间的关系, 为后面利用代数方法研究空间几何问题作铺垫.

Ⅳ 作业.

P51. 4. 6.

第二节 向量的数量积与向量积

I 复习引入

上节，主要介绍了空间直角坐标系以及向量的一些基本知识，线性运算等，本节将要介绍向量之间的乘法：数量积以及向量积.

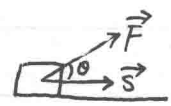
II 授课内容.

一 数量积

1. 定义与性质：

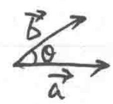
物理原型：物体受力 $\vec{F}$（矢量）作用产生位移 $\vec{s}$（矢量）. 则作功（标量）

$$W=|\vec{F}||\vec{s}|\cos(\widehat{\vec{F},\vec{s}})=\vec{F}\cdot\vec{s}$$



抽象总结归纳，引入向量数量积概念

定义1：设 $\vec{a}$. $\vec{b}$ 为空间向量，它们的模与其夹角余弦的乘积，称为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积. 记为 $\vec{a}\cdot\vec{b}$（内积）



即 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$

性质：① $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2\cos 0=|\vec{a}|^2$，特别地. $\vec{i}\cdot\vec{i}=1=\vec{j}^2=\vec{k}^2$

$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$

② $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,Prj_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\,Prj_{\vec{b}}\vec{a}$

③运算律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ 交换律

P12

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ 分配律.

$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$ 与数乘的结合律.

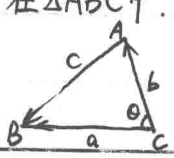
如：$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{c}|\,Prj_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{c}|(Prj_{\vec{c}}\vec{a}+Prj_{\vec{c}}\vec{b})$

$=|\vec{c}|\,Prj_{\vec{c}}\vec{a}+|\vec{c}|\,Prj_{\vec{c}}\vec{b}$

$=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

例1. 在 $\triangle ABC$ 中. $\angle BCA=\theta$. $|BC|=a$. $|CA|=b$. $|AB|=c$ 证明 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$

P15



证明：记 $\vec{CB}=\vec{a}$. $\vec{CA}=\vec{b}$. $\vec{AB}=\vec{c}$ 则 $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$

$|\vec{c}|^2=\vec{c}\cdot\vec{c}=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$$= \vec{a}\cdot\vec{a} - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b}$$
$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$$
$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

即 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$

2. 数量积坐标表示.

设 $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$， $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$

则 $\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$

$= a_xb_x\,\vec{i}\cdot\vec{i} + a_yb_y\,\vec{j}\cdot\vec{j} + a_zb_z\,\vec{k}\cdot\vec{k}$　　由 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ 互相垂直：有

$= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$　　$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$

3. 向量夹角与相互垂直的条件.

由 $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$，所以当 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 均为非零向量时

$$\boxed{\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}}$$

$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 互相垂直 $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow$ 即 $a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0$

例2. 已知 $M(1,1,1)$、$A(2,2,1)$，$B(2,1,2)$ 求 $\angle AMB$. 及 $\overrightarrow{MA}$ 在 $\overrightarrow{MB}$ 上的投影.

解：作向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$. $\angle AMB$ 为 $\overrightarrow{MA}$ 与 $\overrightarrow{MB}$ 夹角.

$\overrightarrow{MA} = (1,1,0)$，$\overrightarrow{MB} = (1,0,1)$

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 1\times1 + 1\times0 + 0\times1 = 1$

$|\overrightarrow{MA}| = \sqrt{2}$.　$|\overrightarrow{MB}| = \sqrt{2}$

$\cos\angle AMB = \dfrac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \angle AMB = \dfrac{\pi}{3}$.　$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{MB}}\overrightarrow{MA} = |\overrightarrow{MA}|\cos\angle AMB = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

13. 证 $\vec{c}$ 与 $(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$ 垂直

$[(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}]\cdot\vec{c}$

$= (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}\cdot\vec{c} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}\cdot\vec{c}$

$= (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{b}\cdot\vec{c})$

$= 0$

$\therefore [\ldots] \perp \vec{c}$

例2. 已知 $\vec{a} = (1,1,-4)$　$\vec{b} = (1,-2,2)$

求① $\vec{a}\cdot\vec{b}$　② $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角. ③ $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上投影

解 ① $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot1 + 1\cdot(-2) + (-4)\cdot2 = -9$

② $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{-9}{\sqrt{18}\sqrt{9}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \dfrac{3}{4}\pi$

③ $\because \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a} \Rightarrow \mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = -3$

例3. 已知 $M_1(1,-1,2)$. $M_2(3,3,1)$. $M_3(3,1,3)$ 求与 $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量.

解：$\overrightarrow{M_1M_2} = (2,4,-1)$　$\overrightarrow{M_2M_3} = (0,-2,2)$

设所求向量为 $\vec{r} = (x,y,z)$ 则 $\vec{r}\cdot\overrightarrow{M_1M_2} = 0 = \vec{r}\cdot\overrightarrow{M_2M_3}$ 且 $|\vec{r}| = 1$

$$\therefore \begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \mp\frac{3}{\sqrt{17}} \\ y = \pm\frac{2}{\sqrt{17}} \\ z = \pm\frac{2}{\sqrt{17}} \end{cases}$$

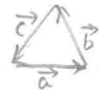
$\therefore$ 所求向量为 $\vec{r} = (\pm\frac{3}{\sqrt{17}}, \mp\frac{2}{\sqrt{17}}, \mp\frac{2}{\sqrt{17}})$

例4. 设 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 为单位向量且 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, 求 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$

解: 法一 ∵ $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}$

∴ $0 = 3+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})$

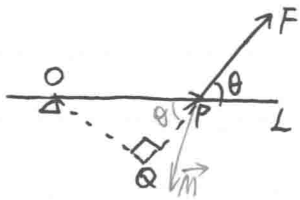
∴ $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a} = -\frac{3}{2}$

法二 由条件 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 所在边可构成正三角形. 

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot1\cdot\cos120° = -\frac{1}{2} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a}$

二 向量积

物理原型: O为杠杆L的支点. 力$\vec{F}$作用在P点处. $\vec{F}$与$\vec{OP}$夹角为θ.



则$\vec{F}$对支点O的力矩为一向量$\vec{M}$:

$|\vec{M}| = |\vec{F}||OQ| = |\vec{F}||\vec{OP}|\sin\theta$ 力矩=力×力臂

$\vec{M}$方向垂直于$\vec{OP}$, $\vec{F}$所确定的平面.

$\vec{M}$指向由右手法则确定

1. 定义与性质

定义2. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, 若向量 $\vec{c}$ 由下列方式确定: (叉积)

向量积, $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$

(1) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$

(2) $\vec{c}$ 垂直于 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 所确定的平面, 其方向按右手法则确定. (右手并拢的四指由$\vec{a}$转向$\vec{b}$, 大拇指指向为$\vec{c}$方向)

则称$\vec{c}$为$\vec{a}$与$\vec{b}$的向量积. 记 $\vec{a}\times\vec{b}$

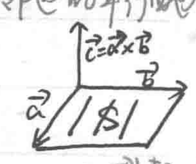
即 $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ 且 $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$

性质: ① $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$ (夹角0°) $|\vec{a}\times\vec{a}| = |\vec{a}|^2\sin0° = 0$

② $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$

$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$, $\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$, $\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$

⑤ $|\vec{a}\times\vec{b}|$ 表示以$\vec{a}$与$\vec{b}$为邻边的平行四边形面积.



$\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$ 表示三角形面积.

③ 运算律: $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ 反交换律

P15

$(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ 与数乘的结合律

不能互换

$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$ 分配律

$\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}$

④ $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}$

若$\vec{a}$, $\vec{b}$都不是零向量 $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = 0 \Longleftrightarrow \theta$为0或π $\Longleftrightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}$

若有零向量仍成立.

$\vec{a}$, $\vec{b}$ 非$\vec{0}$.

2. 坐标表示

设 $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$，$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$

则 $\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$

$= \cancel{a_xb_x\vec{i}\times\vec{i}} + a_xb_y\vec{i}\times\vec{j} + a_xb_z\vec{i}\times\vec{k}$

$+ a_yb_x\vec{j}\times\vec{i} + \cancel{a_yb_y\vec{j}\times\vec{j}} + a_yb_z\vec{j}\times\vec{k}$

$+ a_zb_x\vec{k}\times\vec{i} + a_zb_y\vec{k}\times\vec{j} + \cancel{a_zb_z\vec{k}\times\vec{k}}$

$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{k}\times\vec{k} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{0}$

$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k} = -\vec{j}\times\vec{i}$

$\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i} = -\vec{k}\times\vec{j}$

$\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j} = -\vec{i}\times\vec{k}$

$= (a_yb_z - a_zb_y)\vec{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\vec{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\vec{k}$

$\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}$

为方便记忆引入行列式：

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$ 按上式计算.

计算行列式：$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$　　$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

例5. 求同时垂直于向量 $\vec{a} = (2,1,-1)$，$\vec{b} = (1,-1,2)$ 的单位向量.

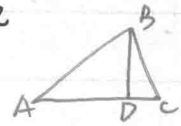
解：$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ 同时垂直于 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$.

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{35}$$

∴ 所求单位向量 $\vec{e} = \pm\dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{35}}(\vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k})$

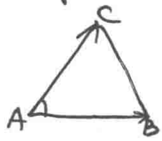
例6' $A(1,-1,2)$ $B(5,-6,2)$ $C(1,3,-1)$ 在△ABC中 求AC边上高BD长



解 $\vec{AC} = (0,4,-3)$
$\vec{AB} = (4,-5,0)$
$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\vec{AC}\times\vec{AB}|$
$= \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & -3 \\ 4 & -5 & 0 \end{vmatrix}\right\|$
$= \frac{1}{2}\sqrt{(-15)^2 + (-12)^2 + (-16)^2}$
$= \frac{25}{2}$
又 $|\vec{AC}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$
$S = \frac{1}{2}|\vec{AC}||BD| \Rightarrow |BD| = 5$

例6. 已知 $A(1,0,1)$，$B(-1,1,0)$，$C(2,-1,1)$ 求 $S_{\triangle ABC}$.

解:



$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\vec{AB}||\vec{AC}|\sin\angle A=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|$$

$\vec{AB}=(-2,1,-1)$　$\vec{AC}=(1,-1,0)$

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-2&1&-1\\1&-1&0\end{vmatrix}=-\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$$

$$\therefore |\vec{AB}\times\vec{AC}|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}$$

$$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

例8. 设 $\vec{m},\vec{n},\vec{p}$ 两两垂直, 符合右手法则, 且 $|\vec{m}|=4$, $|\vec{n}|=2$, $|\vec{p}|=3$, 求 $(\vec{m}\times\vec{n})\cdot\vec{p}$

解 $|\vec{m}\times\vec{n}|=|\vec{m}||\vec{n}|\sin(\widehat{\vec{m},\vec{n}})=4\times2\times1=8$

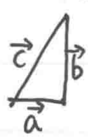
由题意知 $\vec{m}\times\vec{n}$ 与 $\vec{p}$ 同向

$\therefore \theta=(\widehat{\vec{m}\times\vec{n},\vec{p}})=0$

$\therefore (\vec{m}\times\vec{n})\cdot\vec{p}=|\vec{m}\times\vec{n}||\vec{p}|\cos\theta=8\times3=24$

例7. 设 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $|\vec{c}|=5$, 且满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, 求 $|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}|$

解 由题意知 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 构成一直角三角形, 且 $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\pi}{2}$　$|\vec{a}\times\vec{b}|$ 可求出, 找出另两个与它之间的关系.



$$\vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}=\vec{0}\implies\vec{c}\times\vec{a}=\vec{a}\times\vec{b}$$

$$\vec{b}\times(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{b}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{c}=\vec{0}\implies\vec{b}\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$$

$$\cancel{\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}=\vec{0}}$$

$$\therefore|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}|=3|\vec{a}\times\vec{b}|=3|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=36$$

III 本课小结

本节内容主要介绍了两向量之间两种类型的乘积, 相应的概念性质, 计算方法等, 两种积产生完全不同的结果, 注意区别.

IV 作业

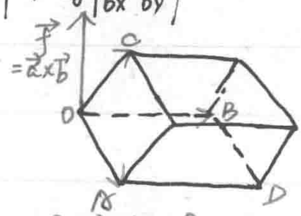
P55. 3, 5

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\vec{k}$$

混合积 $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=c_x\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}-c_y\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}+c_z\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$$

$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=[\vec{b},\vec{c},\vec{a}]=[\vec{c},\vec{a},\vec{b}]$



以 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为棱的平行六面体体积 $V=|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|$

$|\vec{a}\times\vec{b}|$ 表示 $S_{▱OADB}$.

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面 $\iff[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=0\iff\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}=0$

$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta$　底面积×高

第三节 平面与空间直线的方程

I 复习引入

前面两节，主要介绍了空间直角坐标系下，向量的基本概念，基本运算（线性），以及两向量之间的乘积——数量积与向量积。本节以向量为工具，用代数的方法来研究空间中最基本的图形——平面与直线。

II 授课内容

~~第五节~~ 平面及其方程

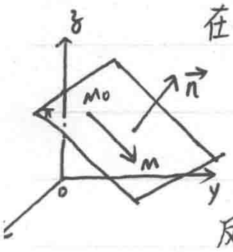
一、平面的点法式方程。

法向量：与平面垂直的非零向量。（平面上任一向量与法向量垂直）

结论：过空间一点有且只有一个平面垂直于已知直线。

因此，给定平面的一个法向量及平面上一点，平面就完全确定了。

设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为平面 Π 上一定点，平面法向量 $\vec{n} = (A, B, C)$，求平面方程。



在平面 Π 上任取一点 $M(x, y, z)$，则 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\vec{n}$ 垂直，即 $\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0$

$\overrightarrow{M_0M} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$，$\vec{n} = (A, B, C)$

$$\therefore\ A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (1)$$

反之，满足(1)式的点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，都有 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M_1}=0$

即 $\vec{n}$ 与 $\overrightarrow{M_0M_1}$ 垂直，从而 M_1 在平面 Π 上。

由此：平面 Π 的点法式方程：$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$

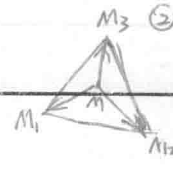
例1. 求过三点 $M_1(2, -1, 4)$、$M_2(-1, 3, -2)$、$M_3(0, 2, 3)$ 的平面方程。

解：$\overrightarrow{M_1M_2} = (-3, 4, -6)$　$\overrightarrow{M_1M_3} = (-2, 3, -1)$

取平面法向量 $\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 14\vec{i}+9\vec{j}+(-1)\vec{k}$

$\therefore$ 所求平面方程为 $14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0$　除此外还可利用 ① 一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$

即 $14x+9y-z-15=0$



② 三点式

$(\overrightarrow{MM_1}\times\overrightarrow{MM_2})\cdot\overrightarrow{MM_3}=0$

$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \end{vmatrix}=0$

点法式方程变形即得一般式方程：

2. 平面的一般式方程

平面：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

$\Rightarrow Ax+By+Cz-Ax_0-By_0-Cz_0=0$ 取 $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$

$\Rightarrow Ax+By+Cz+D=0 \qquad (2)$

反之，设有三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$

任取一点 (x_0, y_0, z_0) 满足 (2)，即 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$

两式相减，得 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

∴ (2) 表示一平面.

平面的一般式方程：$\boxed{Ax+By+Cz+D=0}$

系数即为法向量坐标. $\vec{n}=(A, B, C)$

☆ 特殊的平面：(1) 过原点 $D=0$. $Ax+By+Cz=0$

P57 P37 同济6版 (2) 平行于 x 轴 法向量 $\vec{n}=(A, B, C)$ 垂直于 x 轴 $(\vec{i}=(1, 0, 0))$

∴ $A=0$. $By+Cz+D=0$

平行于 y 轴 $Ax+Cz+D=0$

平行于 z 轴 $Ax+By+D=0$

(3) 通过 x 轴，同 (2)，且过原点 $A=D=0$ $By+Cz=0$

通过 y 轴 $Ax+Cz=0$

通过 z 轴 $Ax+By=0$

(4) 平行于 xoy 面. 法向量 $\vec{n}$ 垂直于 xoy 面. 即 $\vec{n} \parallel \vec{k}=(0, 0, 1)$

∴ $A=B=0$ $Cz+D=0$

平行于 yoz 面：$Ax+D=0$

平行于 zox 面：$By+D=0$

例2. 求通过 x 轴和点 $M_0(4, -3, -1)$ 的平面方程.

解：法一：设方程为 $Ax+By+Cz+D=0$ 则由平面过 $(0, 0, 0)$ $(1, 0, 0)$ $(4, -3, -1)$

有 $\begin{cases} D=0 \\ A+D=0 \\ 4A-3B-C+D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=D=0 \\ C=-3B \end{cases} \Rightarrow y-3z=0$

法二、根据方程特点直接设 $By+Cz=0$

代入 $(4,-3,-1)$ $\Rightarrow C=-3B \Rightarrow y-3z=0$

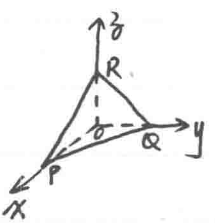
法三、平面过x轴,所以有 $\vec{n}\perp\vec{i}$，又 $\vec{n}\perp\vec{OM}$。

故可取 $\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 4 & -3 & -1\end{vmatrix}=\vec{j}-3\vec{k}$

$\therefore$ 平面方程为 $0(x-4)+(y+3)-3(z+1)=0$

即 $y-3z=0$

例3、设平面与x、y、z轴交点分别为 $P(a,0,0)$ $Q(0,b,0)$，$R(0,0,c)$，求平面方程。$(abc\neq 0)$



解：设平面方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 则有

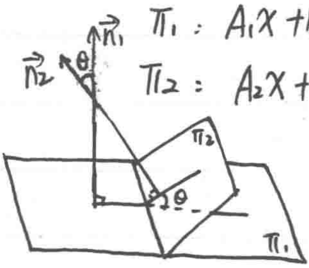
$$\begin{cases}Aa+D=0\\ Bb+D=0\\ Cc+D=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-\frac{D}{a}\\ B=-\frac{D}{b}\\ C=-\frac{D}{c}\end{cases}$$

$\therefore$ 平面方程为 $-\frac{D}{a}x-\frac{D}{b}y-\frac{D}{c}z+D=0$

即 $\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \quad (3)}$ 截距式方程.

3. 两平面的夹角

常用两平面法向量夹角来计算两平面夹角. 范围 $[0,\frac{\pi}{2}]$



Π_1: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$　　$\vec{n_1}=(A_1,B_1,C_1)$

Π_2: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$　　$\vec{n_2}=(A_2,B_2,C_2)$

Π_1、Π_2 夹角 $\theta=(\widehat{\vec{n_1},\vec{n_2}})$ 或 $\pi-(\widehat{\vec{n_1},\vec{n_2}})$ 中的锐角

$\therefore \cos\theta=|\cos(\widehat{\vec{n_1},\vec{n_2}})|$

$$=\left|\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}\right|=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

结论：

Π_1 与 Π_2 垂直 $\Longleftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

$\Pi_1 // \Pi_2$（或重合）$\Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\left(=\frac{D_1}{D_2}\right)$

例4. 求平面 $\pi_1: 2x-y+z=7$. $\pi_2: x+y+2z=11$ 的夹角 θ

解 $\cos\theta=\dfrac{|2\times1+(-1)\times1+1\times2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore\theta=\dfrac{\pi}{3}$ P39 例题.

例5. 一平面过 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(0,1,-1)$ 且垂直于平面 $x+y+z=0$，求方程.

解：设所求平面的法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$.

$\because$ 平面 $x+y+z=0$ 与所求平面垂直 $\therefore A+B+C=0$

又 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,0,-2)$ 在所求平面上

$\therefore \vec{n}\perp\overrightarrow{M_1M_2}$ $\quad\therefore -A-2C=0$

$\therefore A=-2C \quad B=C$

$\therefore$ 所求方程为 $A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0$

$-2C(x-1)+C(y-1)+C(z-1)=0$

即 $2x-y-z=0$

设 $Ax+By+Cz+D=0$

$\Rightarrow\begin{cases}A+B+C+D=0\\ B-\cancel{C}+D=0\\ A+B+C=0\end{cases}$

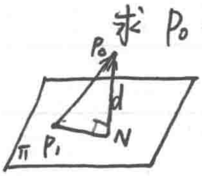
$\Rightarrow\begin{cases}A=-2C\\ B=C\\ D=0\end{cases}$

$\Rightarrow 2x-y-z=0$

4. 点到平面的距离.

平面 π: $Ax+By+Cz+D=0$. $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为平面外一点.

求 P_0 到 π 的距离 d.



过 P_0 作 π 垂线垂足为 N, 则 $d=|\overrightarrow{NP_0}|$

在 π 上任取一点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 则 $\overrightarrow{P_1P_0}=(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1)$

平面法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$

$$d=\left|\mathrm{Prj}_{\vec{n}}\overrightarrow{P_1P_0}\right|=\left|\,|\overrightarrow{P_1P_0}|\cos(\widehat{\overrightarrow{P_1P_0},\vec{n}})\right|$$

$$=|\overrightarrow{P_1P_0}|\frac{|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{P_1P_0}||\vec{n}|}=\frac{|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

又 $Ax_1+By_1+Cz_1=-D$

$$\boxed{\therefore d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

例如：$(2,1,1)$ 到 $x+y-z+1=0$ 的距离

$$d=\frac{|2+1-1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\sqrt{3}$$

例16. 一平面过 $(1,0,-1)$ 且平行于 $\vec{a}=(2,1,1)$ 与 $\vec{b}=(1,-1,0)$. 求平面方程.

解：可取平面法向量 $\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&1\\1&-1&0\end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$

∴ 所求平面为 $x-1+y-3(z+1)=0$

即 $x+y-3z-4=0$

例17. 见后面.

第六节 空间直线及其方程

1. 直线的一般方程.

平面 Π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$.

平面 Π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

} Π_1 与 Π_2 的交线可看成空间直线的一般方程

直线一般方程：
$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}\qquad(4)$$

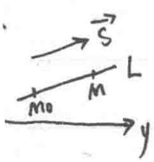
2. 直线的对称式方程.

方向向量：平行于已知直线的非零向量.

已知结论：过空间一点有且只有一条直线平行于已知直线.

因此：给定直线上一点及一个方向向量，直线就确定了.

设直线 L 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，一个方向向量 $\vec{s}=(m,n,p)$ 求直线 L 方程.



设 $M(x,y,z)$ 为 L 上任一点，则 $\overrightarrow{M_0M}\parallel\vec{s}$

从而有 $$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\qquad(5)$$

反之，满足(5)式的任一点 $M_1(x,y,z)$，有 $\overrightarrow{M_0M_1}\parallel\vec{s}$.

即 M_1 在直线 L 上.（过 M_0 平行 $\vec{s}$ 的直线唯一）

已知两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ $M_2(x_2,y_2,z_2)$

取 $\vec{s}=\overrightarrow{M_1M_2}$

直线方程(过 M_1M_2)为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

由此 直线的对称式方程：$$\boxed{\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}}$$

也称为点向式方程.　直线的一组方向数

方向向量的方向余弦也是直线的方向余弦.

P60 例7 求过 $M_0(1,-3,2)$，且与向量 $(4,2,1)$ 平行的直线方程.

解 取 $\vec{s}=(4,2,1)$ 则所求直线为 $\frac{x-1}{4}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-2}{1}$ P602 例8 8-6

3. 直线的参数式方程.

对称式 $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\ (=t)$

设比值为 t 则有

参数式方程：$\boxed{\begin{cases}x=x_0+mt\\ y=y_0+nt\\ z=z_0+pt\end{cases}}$ 参数式

例8. 将直线 $\begin{cases}x+y+z+1=0\\ 2x-y+3z+4=0\end{cases}$ 表示成对称式和参数式方程.

$\begin{cases}x-y+z=1\\ 2x+y+z=4\end{cases}$

解 ① 取 $y=0$ 则 $\begin{cases}x+z=1\\ 2x+z=4\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}x=3\\ z=-2\end{cases}$ $\therefore (3,0,-2)$ 为直线上一点

② $\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=(-2,1,3)$

$\therefore \frac{x-3}{-2}=\frac{y-0}{1}=\frac{z+2}{3}$

$\begin{cases}x=3-2t\\ y=t\\ z=-2+3t\end{cases}$

解：先求直线上一点 (x_0,y_0,z_0) 取 $x_0=1$ 代入方程组有 $\begin{cases}y+z=-2\\ y-3z=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_0=0\\ z_0=-2\end{cases}$

$\therefore (1,0,-2)$ 为直线上一点.

两平面法向量 $\vec{n_1}=(1,1,1)$，$\vec{n_2}=(2,-1,3)$. 直线与 $\vec{n_1}$、$\vec{n_2}$ 都垂直

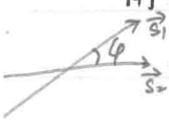
取 $\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 1&1&1\\ 2&-1&3\end{vmatrix}=4\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$

$\therefore$ 直线对称式方程为 $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{-3}$

参数式方程为 $\begin{cases}x=1+4t\\ y=-t\\ y=-2-3t\end{cases}$

四 两线的夹角.

用两直线方向向量夹角来计算直线夹角. 范围 $[0,\pi/2]$



设直线 L_1，L_2 方向向量为 $\vec{s_1}=(m_1,n_1,p_1)$，$\vec{s_2}=(m_2,n_2,p_2)$

L_1，L_2 夹角 $\varphi=(\widehat{\vec{s_1},\vec{s_2}})$ 或 $\pi-(\widehat{\vec{s_1},\vec{s_2}})$

$$\boxed{\therefore \cos\varphi=\left|\cos(\widehat{\vec{s_1},\vec{s_2}})\right|=\frac{|\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}|}{|\vec{s_1}||\vec{s_2}|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}}$$

结论：直线 $L_1 // L_2 \iff \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$

直线 $L_1\perp L_2 \iff m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$

$L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z+1}{1}$ $L_2:\begin{cases}x+y-1=0\\ y-2z+2=0\end{cases}$

$\vec{s_1}=(1,-4,1)$ $\vec{s_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 1&1&0\\ 0&1&-2\end{vmatrix}=(-2,2,1)$

$\cos\theta=\frac{|1\times(-2)+(-4)\times2+1\times1|}{\sqrt{1+16+1}\sqrt{4+4+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\theta=\frac{\pi}{4}$