高等数学习题集

题 解

下
[redacted]册）

南京师范学院数学系编印

目　录

第十八章 级　　数

在题18.1——18.7中，写出已给级数的前五项：

18.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

解 $$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots\cdots。$$

18.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$.

解 $$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{7\cdot 2^7}+\frac{1}{9\cdot 2^9}+\cdots\cdots。$$

18.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$.

解 $$\frac{1+1}{1+1^2}+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\frac{1+4}{1+4^2}+\frac{1+5}{1+5^2}+\cdots\cdots。$$

18.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

解 $$\frac{1!}{1}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{4^4}+\frac{5!}{5^5}+\cdots\cdots。$$

18.5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.

解 $$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots\cdots。$$

18.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots\cdots(2n)}$.

解 $$\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}+\cdots\cdots。$$

18.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$.

解 $\dfrac{1}{\sqrt{1\cdot2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3\cdot4}}-\dfrac{1}{\sqrt{4\cdot5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5\cdot6}}-\cdots\cdots$。

在题18.8——18.17中，写出已给级数的一般项：

18.8. $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}+\cdots\cdots$。 $u_n=\dfrac{1}{2n-1}$。

18.9. $\dfrac{1}{2\ln2}+\dfrac{1}{3\ln3}+\dfrac{1}{4\ln4}+\cdots\cdots$。 $u_n=\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$。

18.10. $\dfrac{2}{1}-\dfrac{3}{2}+\dfrac{4}{3}-\dfrac{5}{4}+\dfrac{6}{5}-\cdots\cdots$。 $u_n=(-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n}$。

18.11. $-\dfrac{1}{2}+0+\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{6}+\cdots\cdots$。 $u_n=\dfrac{n-2}{n+1}$。

18.12. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{10}+\dfrac{4}{17}+\cdots\cdots$。 $u_n=\dfrac{n}{n^2+1}$。

18.13. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1\cdot3}{2\cdot4}+\dfrac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}+\cdots\cdots$。 $u_n=\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots(2n)}$。

18.14. $1+\dfrac{1\cdot3}{1\cdot4}+\dfrac{1\cdot3\cdot5}{1\cdot4\cdot7}+\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{1\cdot4\cdot7\cdot10}+\cdots\cdots$。 $u_n=\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}{1\cdot4\cdot7\cdots\cdots(3n-2)}$。

18.15. $\dfrac{2}{1}+\dfrac{2\cdot5}{1\cdot5}+\dfrac{2\cdot5\cdot8}{1\cdot5\cdot9}+\dfrac{2\cdot5\cdot8\cdot11}{1\cdot5\cdot9\cdot13}+\cdots\cdots$。 $u_n=\dfrac{2\cdot5\cdot8\cdots\cdots(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdots\cdots(4n-3)}$。

18.16. $\dfrac{\sqrt{x}}{2}+\dfrac{x}{2\cdot4}+\dfrac{x\sqrt{x}}{2\cdot4\cdot6}+\dfrac{x^2}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\cdots\cdots$。 $u_n=\dfrac{x^{\frac{n}{2}}}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots(2n)}$。

18.17. $\dfrac{a^2}{3}-\dfrac{a^3}{5}+\dfrac{a^4}{7}-\dfrac{a^5}{9}+\cdots\cdots$。 $u_n=(-1)^{n+1}\dfrac{a^{n+1}}{2n+1}$。

在题18.18——18.32中，利用几何级数、调和级数的敛散性，以及无穷级数的基本性质，判定已给级数的敛散性：

18.18. $-\dfrac{8}{9}+\dfrac{8^2}{9^2}-\dfrac{8^3}{9^3}+\cdots\cdots$。

解 此级数是一几何级数，其公比 $|r|=\left|-\dfrac{8}{9}\right|<1$，

$\therefore$ 此级数收敛(根据几何级数的敛散性)。

18.19. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{12}+\cdots\cdots$。

解 $u_n=\dfrac{1}{3n}$：故原级数为：

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\cdots\cdots+\frac{1}{3n}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots\right)$$

∵ 括号内为发散的调和级数，∴ 原级数发散。

18.20. $\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\cdots\cdots$.

解 $u_n=\frac{1}{\sqrt[n]{3}}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{3}}=1\neq 0$,

∴ 此级数发散(不满足级数收敛的必要条件)。

18.21. $1!+2!+3!+4!+\cdots\cdots$.

解 $u_n=n!$

∵ $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}n!=+\infty$，∴ 此级数发散。

18.22. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$.

解 $u_n=\frac{1}{2n}$，原级数可写成：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots\right),$$

∵ 括号内为发散的调和级数，∴ 原级数发散。

18.23. $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\cdots\cdots$.

解 $u_n=\frac{n+1}{n+2}$,

∵ $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1\neq 0$，∴ 此级数发散.

18.24. $\frac{3}{2}+\frac{3^2}{2^2}+\frac{3^3}{2^3}+\cdots\cdots$.

解法一 $u_n=\left(\frac{3}{2}\right)^n$,

$\because \quad \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty$，$\therefore$ 此级数发散。

解法二：此级数为一几何级数，其公比 $r=\frac{3}{2}>1$，$\therefore$此级数发散。

18.25. $\frac{1}{11}+\frac{2}{12}+\frac{3}{13}+\cdots\cdots$。

解 $$u_n=\frac{n}{10+n},$$

$\because \quad \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{10+n}=1 \neq 0$，$\therefore$ 此级数发散。

18.26. $\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln^2 2}{2^2}+\frac{\ln^3 2}{2^3}+\cdots\cdots$。

解 原级数为一几何级数，其公比 $r=\frac{\ln 2}{2}=\ln\sqrt{2}<\ln e=1$，$\therefore$ 此级数收敛。

18.27. $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\cdots\cdots$。

解 $$u_n=\frac{n}{2n-1},$$

$\because \quad \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}$，$\therefore$ 此级数发散。

18.28. $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots\cdots$。

解 在原级数的前面加上三项"$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$"后即为发散的调和级数：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots,$$

根据无穷级数的基本性质3°，$\therefore$ 原级数发散。

18.29. $2+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\cdots\cdots$。

解 $$2+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\cdots\cdots。$$

$$=2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots\right)$$

$\because$ 括号内为发散的调和级数，$\therefore$ 原级数发散。

18.30. $\left(\frac{1}{6}+\frac{8}{9}\right)+\left(\frac{1}{6^2}+\frac{8^2}{9^2}\right)+\left(\frac{1}{6^3}+\frac{8^3}{9^3}\right)+\cdots\cdots$。

解 $\because$ 级数 $\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^3}+\cdots\cdots$收敛$\left(\text{为公比 } r=\frac{1}{6}<1 \text{ 的几何级数}\right)$，

级数$\frac{8}{9}+\frac{8^2}{9^2}+\frac{8^3}{9^3}+\cdots\cdots$亦收敛$\left(\text{为公比 } r=\frac{8}{9}<1 \text{ 的几何级数}\right)$，

收敛级数可以逐项相加，

$\therefore$ 级数$\left(\frac{1}{6}+\frac{8}{9}\right)+\left(\frac{1}{6^2}+\frac{8^2}{9^2}\right)+\left(\frac{1}{6^3}+\frac{8^3}{9^3}\right)+\cdots\cdots$收敛。

18.31. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\cdots\cdots$。

解 $\because$ 级数 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots$收敛$\left(\text{为公比} r=\frac{1}{2}<1 \text{的几何级数}\right)$，

级数$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots$亦收敛$\left(\text{为公比 } r=\frac{1}{3}<1 \text{ 的几何级数}\right)$。

根据无穷级数的基本性质2°，

$\therefore$ 逐项相加后的级数$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\cdots\cdots$也收敛。

18.32. $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{10\cdot n}+\cdots\cdots$。

解

$$S_{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{10n}$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}\right)+\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots\cdots+\frac{1}{10n}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}\right)+\frac{1}{10}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\right),$$

$\because$ 部分和 S_{2n} 的后一项为发散的调和级数的部分和，$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}$ 不存在，

$\therefore$ 原级数为发散的。

在题18.33——18.40中，根据级数收敛的定义判定已给级数的敛散性：

18.33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$。

解

$$u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n},$$

$$S_n=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots\cdots+$$

$$+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sqrt{n+1}-\sqrt{1}=\sqrt{n+1}-1.$$

而 $$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=+\infty,\ \therefore\ \text{此级数发散。}$$

18.34. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[2n+1]{a}-\sqrt[2n-1]{a})$，其中$a>0$。

解 $$S_n=(\sqrt[3]{a}-a)+(\sqrt[5]{a}-\sqrt[3]{a})+(\sqrt[7]{a}-\sqrt[5]{a})+\cdots\cdots+$$
$$+(\sqrt[2n+1]{a}-\sqrt[2n-1]{a})=\sqrt[2n+1]{a}-a,$$

而 $$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt[2n+1]{a}-a)=1-a,\ \therefore\ \text{此级数收敛。}$$

18.35. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$。

解 $$S_n=(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)+(\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{5}-2\sqrt{4}+\sqrt{3})+$$
$$+\cdots\cdots+(\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2})+(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1})+$$
$$+(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1},$$

而 $$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})$$
$$=1-\sqrt{2}+\lim_{n\to\infty}\frac{n+2-(n+1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$$
$$=1-\sqrt{2}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=1-\sqrt{2},$$

$\therefore$ 此级数收敛$\left(\text{或将原级数化为}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)-\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right]\right.$ 考虑更方便些$\Big)$。

18.36. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots$。

解 $$\because\ u_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

$$\therefore\ S_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1},$$

而 $$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1, \therefore \text{ 此级数收敛.}$$

18.37. $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots\cdots$.

解 $\because\ u_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$,

$$\therefore\ S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1},$$

而 $$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}, \therefore \text{ 此级数收敛。}$$

18.38. $\frac{1}{1\cdot6}+\frac{1}{6\cdot11}+\frac{1}{11\cdot16}+\cdots\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots\cdots$.

[提示：将一般项分解为$\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)$.]

解 $\because\ u_n=\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)$,

$$\therefore\ S_n=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{16}\right)+\cdots\cdots+$$

$$+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right)=\frac{n}{5n+1},$$

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{5n+1}=\frac{1}{5}, \therefore \text{ 此级数收敛.}$$

18.39. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots\cdots$.

[提示：将一般项分解为 $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n(n+1)}-\frac{A}{(n+1)(n+2)}$.]

解 $\because\ u_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$,

$$\therefore\quad S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}\right)+$$

$$+\cdots\cdots+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right],$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{1}{4},$$

∴ 此级数收敛。

18.40. * $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\cdots\cdots+\sin\frac{n\pi}{6}+\cdots\cdots$.

[提示：先乘以 $2\sin\frac{\pi}{12}$，再将一般项分解为二余弦函数之差。]

解

$$S_n=\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\cdots\cdots+\sin\frac{n\pi}{6}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left(2\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{12}+2\sin\frac{2\pi}{6}\sin\frac{\pi}{12}+\cdots\cdots+2\sin\frac{n\pi}{6}\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left[\left(\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{3\pi}{12}\right)+\left(\cos\frac{3\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}\right)+\cdots\cdots+\right.$$

$$\left.+\left(\cos\frac{2n-1}{12}\pi-\cos\frac{2n+1}{12}\pi\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left(\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{2n+1}{12}\pi\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left(\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{2n+1}{12}\pi\right)$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}-\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{2n+1}{12}\pi}{2\sin\frac{\pi}{12}}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\lim_{n\to\infty}\cos\frac{2n+1}{12}\pi,$$

∵ $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{2n+1}{12}\pi$ 不存在，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在，

∴ 原级数发散。

在题18.41——18.49中，利用比较判定法，判定已给级数的敛散性：

18.41. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots\cdots$.

解　$\because$　$u_n=\dfrac{1}{2n-1}>\dfrac{1}{2n}$，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，

$\therefore$　原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}$也发散。

18.42.　$\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots$。

解　$\because$　$u_n=\dfrac{1}{n(n+1)}<\dfrac{1}{n^2}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛（为－p级数，$p=2>1$），

$\therefore$　原级数收敛。

18.43.　$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{17}+\cdots\cdots$。

解　$\because$　$u_n=\dfrac{1}{n^2+1}<\dfrac{1}{n^2}$，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛，

$\therefore$　原级数也收敛，

18.44.　$1+\dfrac{1+2}{1+2^2}+\dfrac{1+3}{1+3^2}+\cdots\cdots$。

解　$\because$　$u_n=\dfrac{1+n}{1+n^2}>\dfrac{1+n}{1+2n+n^2}=\dfrac{1}{1+n}$，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+n}$发散，

$\therefore$　原级数发散。

18.45.　$1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{5}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{2n-1}+\cdots\cdots$。

解　$\because$　$u_n=\dfrac{n}{2n-1}>\dfrac{n}{2n}=\dfrac{1}{2}$，

而级数$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2}+\cdots\cdots$发散，

$\therefore$　原级数也发散。

18.46.　$\dfrac{1}{2\cdot 5}+\dfrac{1}{3\cdot 6}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(n+1)(n+4)}+\cdots\cdots$。

解　$\because$　$u_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+4)}<\dfrac{1}{(n+1)^2}$，

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)^2}$为收敛的 p 级数（$p=2>1$），

∴ 原级数收敛。

18.47. * $1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{4^4}+\cdots\cdots+\frac{n!}{n^n}+\cdots\cdots$.

解 ∵ $u_n=\frac{n!}{n^n}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots n}{n\cdot n\cdot n\cdots\cdots n}=\frac{1\cdot2}{n^2}\cdot\frac{3\cdot4\cdot5\cdots\cdots n}{n\cdot n\cdot n\cdots\cdots n}\leqslant\frac{2}{n^2}$,

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，

∴ 原级数也收敛。

18.48. $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2^2}+\sin\frac{\pi}{2^3}+\cdots\cdots$.

解 ∵ $\sin\alpha\leqslant\alpha(\alpha\geqslant0)$，∴ $u_n=\sin\frac{\pi}{2^n}\leqslant\frac{\pi}{2^n}$,

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛， ∴ 此级数一定收敛。

18.49. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$，设$a>0$.

解 $u_n=\frac{1}{1+a^n}$,

当 $0<a<1$时，∵ $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n}=\frac{1}{1+0}=1$,

∴ 级数为发散。

当 $a=1$时，∵ $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\frac{1}{2}$，∴ 级数为发散。

当 $a>1$时，∵ $u_n=\frac{1}{1+a^n}<\frac{1}{a^n}$，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$收敛，

∴ 原级数收敛，

∴ $\begin{cases}a>1\text{时原级数收敛,}\\0<a\leqslant1\text{时原级数发散.}\end{cases}$

在题18.50——18.57中，利用比值判定法，判定已给级数的敛散性：

18.50. $\frac{3}{2}+\frac{4}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{6}{2^4}+\cdots\cdots$.

解 $u_n=\frac{n+2}{2^n}$，$u_{n+1}=\frac{n+3}{2^{n+1}}$,

$$\because \quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n+3}{2^{n+1}}}{\dfrac{n+2}{2^n}}=\frac{1}{2}<1,$$

$\therefore$ 原级数收敛。

18.51. $\dfrac{5}{1!}+\dfrac{5^2}{2!}+\dfrac{5^3}{3!}+\cdots\cdots$.

解 $u_n=\dfrac{5^n}{n!}$, $u_{n+1}=\dfrac{5^{n+1}}{(n+1)!}=\dfrac{5\cdot 5^n}{(n+1)n!}$,

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+1}=0<1,$$

$\therefore$ 原级数收敛。

18.52. $\dfrac{1}{10}+\dfrac{2!}{10^2}+\dfrac{3!}{10^3}+\cdots\cdots$.

解 $u_n=\dfrac{n!}{10^n}$, $u_{n+1}=\dfrac{(n+1)!}{10^{n+1}}=\dfrac{(n+1)n!}{10\cdot 10^n}$,

$\because \quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{10}=+\infty>1$, $\therefore$ 级数发散。

18.53. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{9}{27}+\cdots\cdots$.

解 $u_n=\dfrac{n^2}{3^n}$, $u_{n+1}=\dfrac{(n+1)^2}{3^{n+1}}=\dfrac{n^2+2n+1}{3\cdot 3^n}$,

$\because \quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n+1}{3n^2}=\dfrac{1}{3}<1$, $\therefore$ 级数收敛。

18.54. $\dfrac{3}{1\cdot 2}+\dfrac{3^2}{2\cdot 2^2}+\dfrac{3^3}{3\cdot 2^3}+\cdots\cdots$.

解 $u_n=\dfrac{3^n}{n\cdot 2^n}$, $u_{n+1}=\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}=\dfrac{3\cdot 3^n}{(n+1)\cdot 2\cdot 2^n}$,

$\because \quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{(n+1)\cdot 2}=\dfrac{3}{2}>1$, $\therefore$ 级数发散。

18.55. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$.

解 $u_n=\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$, $u_{n+1}=\dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}=\dfrac{2\cdot 2^n(n+1)n!}{(n+1)(n+1)^n}=\dfrac{2\cdot 2^n n!}{(n+1)^n}$,

$$\because \quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^n}{(n+1)^n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{e}<1,$$

$\therefore$ 原级数收敛。

18.56. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot5}{1\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{2\cdot5\cdots\cdots(3n-1)}{1\cdot5\cdots\cdots(4n-3)}+\cdots\cdots$。

解 $u_n=\frac{2\cdot5\cdots\cdots(3n-1)}{1\cdot5\cdots\cdots(4n-3)}$, $u_{n+1}=\frac{2\cdot5\cdots\cdots(3n-1)(3n+2)}{1\cdot5\cdots\cdots(4n-3)(4n+1)}$,

$\because \quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{4n+1}=\frac{3}{4}<1$, $\therefore$ 原级数收敛。

18.57. $\sum_{n=1}^{\infty}n\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$。

解 $u_n=n\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$, $u_{n+1}=(n+1)\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}}$,

$$\because \quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}}}{n\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\dfrac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+2}}}\cdot\dfrac{\pi}{2^{n+2}}}{\dfrac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}\cdot\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}=1\cdot\frac{1}{1\cdot2}=\frac{1}{2}<1,$$

$\therefore$ 原级数收敛。

在题18.58——18.73中，用适当的方法判定已给级数的敛散性：

18.58. $\frac{3}{4}+2\left(\frac{3}{4}\right)^2+3\left(\frac{3}{4}\right)^3+4\left(\frac{3}{4}\right)^4+\cdots\cdots$。

解 $u_n=n\left(\frac{3}{4}\right)^n$, $u_{n+1}=(n+1)\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$,

$$\because \quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}<1,$$

$\therefore$ 级数收敛。

18.59. $\frac{1^4}{1!}+\frac{2^4}{2!}+\frac{3^4}{3!}+\frac{4^4}{4!}+\cdots\cdots$.

解 $u_n=\frac{n^4}{n!}$, $u_{n+1}=\frac{(n+1)^4}{(n+1)!}=\frac{(n+1)^4}{(n+1)n!}=\frac{(n+1)^3}{n!}$,

$\because$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{n^4}=0<1$, $\therefore$ 级数收敛。

18.60. $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{3a+b}+\cdots\cdots$, $(a>0,\ b>0)$.

解 $\because$ $u_n=\frac{1}{na+b}$, 又 $\because$ $n\geqslant 1$, $na+b\leqslant na+nb=n(a+b)$,

$\therefore$ $\frac{1}{na+b}\geqslant\frac{1}{n(a+b)}$,

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(a+b)}=\frac{1}{a+b}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,

$\therefore$ 原级数发散。

18.61. $\frac{2}{3}+\frac{3}{6}+\frac{4}{11}+\cdots\cdots+\frac{n+1}{n^2+2}+\cdots\cdots$.

解 $u_n=\frac{n+1}{n^2+2}$,

$\because$ $n^2+2<n^2+2n+1=(n+1)^2$,

$\therefore$ $\frac{n+1}{n^2+2}>\frac{n+1}{(n+1)^2}=\frac{1}{n+1}\quad(n\geqslant 1)$,

$\because$ 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$为发散的调和级数,

$\therefore$ 原级数也发散。

18.62. $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 2}{3\cdot 4}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6}+\cdots\cdots$.

解 $u_n=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n}{(n+1)(n+2)\cdots\cdots 2n}=\frac{(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdots n)(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdots n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdots 2n}=\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

$=\frac{(1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n)^2}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots\cdots(2n-1)\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots(2n)}=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2n-1)}\leqslant\frac{1}{2^n}$,

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$为收敛的几何级数$\left(r=\frac{1}{2}<1\right)$,

∴ 原级数收敛。

18.63. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{3\cdot2^3}+\frac{1}{5\cdot2^5}+\cdots\cdots$.

解 $$u_n=\frac{1}{(2n-1)\cdot2^{2n-1}},\quad u_{n+1}=\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}},$$

$$\because\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)2^{2n-1}}{(2n+1)2^{2n+1}}=\frac{1}{4}<1,$$

∴ 原级数收敛。

18.64. $\frac{1}{2\cdot1^2}+\frac{(2!)^2}{2\cdot2^2}+\frac{(3!)^2}{2\cdot3^2}+\cdots\cdots$.

解 $$u_n=\frac{(n!)^2}{2\cdot n^2}=\frac{n^2[(n-1)!]^2}{2n^2}=\frac{1}{2}[(n-1)!]^2,$$

$$\because\quad \lim_{n\to\infty}u_n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}[(n-1)!]^2=+\infty,\quad\therefore\quad \text{级数发散。}$$

18.65. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$.

解 $$u_n=\frac{3^n n!}{n^n},\quad u_{n+1}=\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}},$$

$$\because\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{3}{e}>1,$$

∴ 级数发散。

18.66. $\frac{1000}{1}+\frac{1000\cdot1001}{1\cdot3}+\frac{1000\cdot1001\cdot1002}{1\cdot3\cdot5}+\cdots\cdots$.

解 $$u_n=\frac{(999+n)!}{999!\ [1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)]},$$

$$u_{n+1}=\frac{(1000+n)!}{999!\ [1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n+1)]}=\frac{(1000+n)(999+n)!}{999!\ [1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)(2n+1)]},$$

$$\because\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1000+n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1,\quad\therefore\quad \text{级数收敛。}$$

18.67. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$.

解 $$u_n=\frac{n+1}{n(n+2)}=\frac{n+1}{n^2+2n}>\frac{n+1}{n^2+2n+1}=\frac{1}{n+1},$$

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$发散，∴ 原级数也发散。

18.68. $\frac{1000}{1!}+\frac{1000^2}{2!}+\frac{1000^3}{3!}+\cdots\cdots$.

解 $u_n=\frac{1000^n}{n!}$, $u_{n+1}=\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{1000\cdot 1000^n}{(n+1)\cdot n!}$,

∵ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1000}{n+1}=0<1$,

∴ 级数收敛。

18.69. $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\cdots\cdots+\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\cdots\cdots$.

解 ∵ $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}=1$, ∴ 级数发散。

18.70. $\frac{1}{1001}+\frac{2}{2001}+\cdots\cdots+\frac{n}{1000\cdot n+1}+\cdots\cdots$.

解 ∵ $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{1000\cdot n+1}=\frac{1}{1000}\neq 0$, ∴ 级数发散。

18.71. $\frac{1}{1+1^2}+\frac{2}{1+2^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{1+n^2}+\cdots\cdots$.

解 设 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$,

$I_n=\int_1^n\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}[\ln(1+n^2)-\ln 2]$,

∵ $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=+\infty$, ∴ 级数发散。

(或：$u_n=\frac{n}{n^2+1}>\frac{n}{n^2+n}=\frac{1}{1+n}$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n}$为发散的调和级数，

∴ 原级数发散。)

18.72. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$.

解 $u_n=2^n\sin\frac{\pi}{3^n}\leqslant 2^n\frac{\pi}{3^n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n\pi$,