

什么性质，或者是整理实验数据以便作出经验方程。着眼点放在通过微积分作最基本的说明，使大家能理解这种方法对于解决发生在我们身边的许多问题是如何方便。因为打算讲解一些浅显易懂的问题，一般高等学校的学生应该不难理解。

第二部分想进一步叙述的是，用微积分的方法把我们所处理的对象模型化、用数学式子表示，然后再解这一系列步骤。这点正是本书的目的，希望读者无论如何也要对现象的模型化及其数学描述能有所体会。当然为了做到这一步，准备选择浅显的、其实际问题谁都知道、数学解法也很简单的问题。数学运算能力，不练习就容易生疏，不过复习一下早日学过的教科书，或翻阅一下公式集，很快就能恢复的。可能的话，本书还打算讲一讲稍微高级一点的函数关系及其运算方法。尽管如此，这第二部分还是没有超出入门讲座的范围，具有高等学校毕业水平的人，完全可以理解。

进入正文以前，费了不少话，目的就是想告诉大家切莫被‘化工数学’这个严肃的题名所吓倒而不想去学了。这本书里所讲的是所有数学书里都有的一些简单问题，不过是实际问题的基础。通过简单的说明，如果能使读者不再觉得自己所处理的数学式子是枯燥无味的，而是和日常现象息息相关的；如果读者在实际中，对自己所处理的现象能运用这些数学知识，这本书的目的就达到了。

河村祐治

## 译 序

随着化学工程特别是化工系统工程的发展,广大化工技术工作者甚至化学工业部门的各级领导干部都感到有提高自己数学水平的需要,加之过去化工专业的数学基础相对较为薄弱,这种需要就显得更为迫切。为适应这种需要,我们翻译了这本日文化工数学基础读物。

化学工程和数学发生密切联系,这本是非常自然的事,然而要在“化工数学”中反映出这种联系,兼收提高化工和数学水平之效,却颇为困难。河村祐治等人的“化工数学”,从数学的系统性出发,用化工的例子阐述,对化工问题作较深入的数学探讨,以从化工对象抽象数学模型为主旨,深入浅出,别具一格。作者具有相当的数学修养,对一般化工专业人员的数学困难颇有体会,难点解说明白,例题结合实际化工问题。全书分两部分,第一部分系统介绍了化工问题中常用的数学基础知识,包括数据处理、实验方程的制作、矩阵代数、微积分、微分方程等,第二部分则着重介绍用数学手段处理化工中的各类典型问题,包括物料衡算、流体流动、传热、传质、反应工程和过程控制等。

译稿曾请清华大学日语教研组林镐根同志、戴炳富同志,北京矿冶研究院赵连兴同志校阅,最后由清华大学化学工程教研组主任蒋维钧副教授审阅。另外,北京矿冶研究院王伟同志曾参加第十一章过程控制的翻译工作,清华大学数学教研组李克群教授、化工教研组童景山副教授、范治新同志、雷良恒同志、李有润同志等也都曾给予有益的指导和帮助,在此一并表示感谢。

译本对原书已发现的排印错误作了必要的修改,因这种地方较多,故未一一加以注释。由于译者水平有限,难免有错误及不妥之处,请各位读者批评指正。

张 克 孙登文

## 初 版 序

从前年二月到去年七月,《化学工程》杂志连载十四次的‘化工数学入门’汇集成册发行了。

作者河村、中丸两位先生是我的好友,杂志连载过程中,曾逐篇拜读,讲座结束后,我又劝他们尽早汇集成册,现在听说经过重新修改,就要出版了,我是非常高兴的。

正如在第一次连载时作者自己所说的那样,他们不是数学家,只是把自己在工作中不得已而苦心钻研出来的东西,奉献给苦于数学问题的同行们,而且以尝到了数学的甜头的快乐心情进行细致的阐述,所以通篇都表现了对读者无微不至的关怀。

在内容的布置上也下了许多功夫。特意把全书分为两部分,第一部分(前5章)为数据处理和基础数学;第二部分是化学工程中各种数学问题的研究,都有独到之处。例题又很丰富,这样使得所讨论的内容更易理解。我相信,不仅对于和化工有关的人,而且对于广大的工业化学专业的学生和青年技术工作者,这本书无疑都将成为最好的参考书。

## 修 订 版 序

从昭和41年本书出版以来,已经五年多了。由于得到一致好评,这次决定发行修订版,谨表庆贺。

修订版,特别是在第二部分中,增加了很多题目,使内容更加丰富。同时作为附录,又收录了数学公式集和数表,读者一定会十分高兴。还特别增添了电子计算机需要的有代表性的数学方法。作为学生们的教科书和各位青年技术员的参考书,在现阶段,我确信是最合适的版本。我愿对河村、中丸、今石诸位先生的工作表示敬意。

东京都立大学教授 平田光穗

---

## 前 言

数学是科学中的一门基础学科，研究并确立较早，它比我们并非专门研究数学的人所想象的要更深奥和更严密，但也因此反而难以接近，若再有畏难情绪，便总想绕开它。我们每个人学习的课程，尽管在学的多少和深浅上可能有些差别，但都在各自专攻的课程当中，学过很难的数学，而且一般来说也是学懂了的。可是当用数学去解决实际问题时，总是不太会用。有时甚至无从下手，深深感到自己的数学能力太差，从而失去信心，觉得自己已经无能为力。这些问题现在虽然不能立即要求在数学基础课的教育当中都给与解决，但不能不承认这和数学教学脱离实践的做法，是有很大关系的。

但是，数学经过数学家和工程学家的努力，已经发展成为解决工程问题的最有力的武器。在机电、土木建筑等领域，数学的应用已无需赘述。不言而喻，没有数学解析就不会有工程学的研究和发展，而且今天如果说不深晓数学，就无法理解工程学和利用新技术，这也绝不是夸大其辞。

另一方面，对《化学工程》这门学问的研究，一般要比其它工程学领域落后，这也是事实。化学工程中的诸单元操作，例如把液体均匀混合搅拌，或者把洗涤物很好地干燥，从经验上说谁都懂得‘搅拌’、‘干燥’这些概念。这些经验知识所指出的方向多半与数学解析的结果相同。然而，如何设计像化工厂所使用的巨大装置，或者使装置高效率运转，要想弄清楚这些问题，就必须定量地准确给出理论和实验的解析结果。为此，就不得不采用较为复杂的数学方法。可是化工中数学的应用比其它领域要少。这是因为化学工程一方面在历史上还是比较年轻的学科；另外，有时即使是在很简单的操作中，都有难于用数学表示的复杂性。马歇尔和皮戈福特说

---

过<sup>①</sup>：“如要解决这类问题，化学工作者当然得求助于数学家，希望他们能把问题变成为用已知的方法可以解决的数学命题。可是这路子是行不通的。因为，数学家要把这个要求变为简单的数学假说，却没有必要的化工基础知识，而化学工作者要帮助对问题进行解析的数学家，自己又没有必要的数学基础”。我们也深有同感，觉得这正是说到我们的痛处了。

作者之所以用宝贵的篇幅写这冗长的序言，是因为有如下一些想法。首先感到置身于工程学科的人必须有一定程度的数学水平，否则无论如何也理解不了今后的工程学。可是，要学习数学，打开书本就头痛，即使硬着头皮干下去，结果学的也没有比以往从数学教科书中得到的知识超出一步。我想有这种经验和苦恼的人可能相当多。我自己就是有这种苦恼的一个人。数学家和精通数学的工程学者的著作，恐怕只会增加上述这些人对于数学的厌恶和自卑感，而不能消除这些东西。我和这些人因为可算是同病患者，写出来的东西，他们也许认为有一日之长，而收到意外的效果。

基于上述考虑，本书打算说明如何利用读者已有的数学知识解决化工中的问题。因此首要的还是必须理解和把握“应用数学”这门学问。阅读一部文学名著，就可能通过文字想像出其描述的情景；看到‘干燥’这个词，就可能把‘干燥’这一概念在头脑里描绘出来；看惯地图，通过用曲线和符号所表示的地形图，就可能把实际山脉的形象想象出来。所谓理解和把握，就是根据过去的经验按照这样一个方式进行的。可是数学的研究对象，不是五官所能感觉到的具体的东西，而是抽象的概念，所以就有些麻烦。不过，这也是一种训练，尽可能先从能具体用图形表示的命题入手，这样反复多次，就能逐渐理解颇为复杂的抽象概念。

因此，本书分成两部分。第一部分作为入门，主要叙述数据的处理，研究我们由实验所得到的数据及准备用在设计中的数据都有

---

① 马歇尔 (W. R. Marshall) 和皮戈福特 (R. L. Pigford) 是有名的工程学者，是《微分方程在化学工程中的应用》一书的作者。

# 目 录

## 第一部分 数据处理和运算入门

|                                                               |     |
|---------------------------------------------------------------|-----|
| <b>第一章 代表值(数值集合的描述方法)</b> .....                               | 1   |
| 1.1 频数分布(频率分布)(1)    1.2 代表值(5)    1.3 离散度(12)                |     |
| 1.4 分布函数(17)    1.5 统计和归纳统计(24)                               |     |
| <b>第二章 实验方程</b> .....                                         | 26  |
| 2.1 对数(26)    2.2 实验曲线和其数学表达式(29)    2.3 最小二乘法(40)            |     |
| 2.4 相关系数(43)    2.5 多变量情况(因次分析)(46)                           |     |
| 2.6 函数及其图形(55)    2.7 实验方程的直线化(63)    2.8 周期函数(68)            |     |
| <b>第三章 矩阵代数</b> .....                                         | 71  |
| 3.1 关于总和的规定(71)    3.2 矩阵(73)    3.3 行列式(73)    3.4 矩阵的运算(78) |     |
| 3.5 矩阵的阶(82)    3.6 变换矩阵(83)    3.7 矢量(84)                    |     |
| 3.8 矢量运算(87)    3.9 张量(91)                                    |     |
| <b>第四章 微分、积分</b> .....                                        | 94  |
| 4.1 微分的意义(94)    4.2 偏微分(98)    4.3 台劳级数(99)    4.4 图解微分(104) |     |
| 4.5 数值微分(106)    4.6 积分的意义(111)    4.7 线积分、面积分、体积积分(116)      |     |
| 4.8 全微分(118)    4.9 图解积分(126)    4.10 数值积分(128)               |     |
| <b>第五章 微分方程</b> .....                                         | 137 |
| 5.1 微分方程 I (137)    5.2 微分方程 II (146)    5.3 常微分方程解法 I (154)  |     |
| 5.4 常微分方程解法 II (181)                                          |     |

## 第二部分 化工中常用的数学

|                                                        |     |
|--------------------------------------------------------|-----|
| <b>第六章 物料衡算及能量守恒</b> .....                             | 199 |
| 6.1 物料衡算(I)(贮槽排水)(201)    6.2 物料衡算(II)(伴有给水的贮槽排水)(204) |     |
| 6.3 物料衡算(III)(搅拌槽内浓度变化)(206)                           |     |
| 6.4 热力学(208)    6.5 化学平衡(212)    6.6 相律(215)           |     |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>第七章 流体力学</b> .....                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 226 |
| 7.1 机械能守恒 (226) 7.2 泵的动力计算 (230) 7.3 粘性阻力的计算 (231) 7.4 动量守恒(I) (233) 7.5 动量守恒(II) (235) 7.6 运动方程 (238) 7.7 纳维-斯托克斯方程的解(I) (243) 7.8 纳维-斯托克斯方程的解(II) (251) 7.9 纳维-斯托克斯方程的解(III) (254) 7.10 纳维-斯托克斯方程的因次分析 (256) 7.11 非牛顿型流体 (259) 7.12 非牛顿流体的管内流动 (261) 7.13 斯托克斯方程的近似解 (265) 7.14 球的沉降速度 (270) 7.15 边界层 (273) |     |
| <b>第八章 传热</b> .....                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 288 |
| 8.1 圆筒和球壁的热传导 (288) 8.2 翅片 (292) 8.3 稳定二维热传导及其温度分布的近似解 (301) 8.4 非稳定温度分布的近似解 (303) 8.5 解析热传导的例题 (307) 8.6 能量守恒方程 (339) 8.7 能量守恒方程式的解 (345) 8.8 冷凝传热 (365) 8.9 热交换器 (367) 8.10 热辐射 (375)                                                                                                                       |     |
| <b>第九章 质量传递</b> .....                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 400 |
| 9.1 精馏塔的计算 (400) 9.2 扩散 (410) 9.3 两组分体系的质量守恒方程式 (414) 9.4 质量传递方程的解 (418)                                                                                                                                                                                                                                      |     |
| <b>第十章 反应工程</b> .....                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 438 |
| 10.1 反应速度方程(定容间歇式反应釜) (438) 10.2 连续搅拌釜式反应器 (446) 10.3 均相流通反应体系 (448) 10.4 不等温操作 (449) 10.5 吸附操作 (453)                                                                                                                                                                                                         |     |
| <b>第十一章 过程控制</b> .....                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 464 |
| 11.1 线性传递元素 (464) 11.2 拉普拉斯变换 (466) 11.3 传递函数和方框图 (472) 11.4 动态特性的表示法 (475) 11.5 控制系统的解析 (481) 11.6 最佳控制(I) (482) 11.7 最佳控制(II) (499)                                                                                                                                                                         |     |
| <b>结束语</b> .....                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 517 |
| <b>参考文献</b> .....                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 517 |
| <b>数学公式集</b> .....                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 519 |
| <b>数表</b> .....                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 554 |

# 第一部分 数据处理和运算入门

## 第一章 代表值（数值集合的描述方法）

处理实验测定值时，所得到的数据全部为同一值的情况是很少见的。例如测量恒温槽温度，测温点不同，温度就未必相同，而且温度还可能或多或少地随时间变化；另外，由于温度计的误差和测量者的读数误差，得到的测量值总不会是唯一的量值，而是一个数值集合。我们从数值集合中求出一个代表值，使其“代表”恒温槽的温度。

自然现象也是如此。例如，每个气体分子的运动速度一般是不同的，有快的也有慢的；可是我们作和分子运动有关的计算时，往往用其大量分子的平均运动速度，而很少用其单个分子的运动速度。同样，在管内流动的流体，其各点的速度也是不同的，我们知道，管子中心部位的速度最快，管壁附近的速度较慢，然而在大部分计算中都是用其平均值较为方便，并且也没有什么妨碍。

由此可见，代表值在数据处理上是很重要的，而且常常遇到，所以准备首先叙述一下数值集合的形式和代表值的关系。

### 1.1 频数分布（频率分布）

假定有一组测量值，其对于给定的随机变数 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ，相应分别有 $f_1, f_2, \dots, f_n$ 个数值，则我们称随机变量 $X$ 和对应的数 $f$ （叫做频数或频率）之间的关系为频数（频率）分布<sup>①</sup>。把这种关系用表来表示，叫做频数分布表；用图形表示，叫做频数分

---

① 译注：频率为某事件出现的次数与总次数之比，而频率的稳定值就是概率。

布图，而把分布图表示的关系（分布曲线）用数学式子表示出来，则叫做（频数）分布函数。

这种称呼法，乍一看，好像很生硬，难于理解，但实际上它是很严谨简练的表示方法。其内容一看下面的例子，马上就可以明白。对于这种方法，有必要在一定程度上习惯它。之所以要逐渐熟悉和习惯，是因为数学式子是符号化了的最严密最简练的表示方法。

〔例 1.1〕 把15枚硬币抛出来，看看其中有几枚是正面朝上。反复抛掷180次，所得结果如表1.1所示。试画出其频数分布图。

〔解〕 若取随机变量( $X$ )为横轴，频数( $f$ )为纵轴，则可得出图 1.1 的图形。7 个或 8 个正面朝上的次数最多，其次是 6 个或 9 个，3 个以下和12个以上的正面朝上的情况，则非常稀少。另外，图形左右的形状大致一样，这说明以中间为界，左右频数或频率的大小趋于相等。

表 1.1

| 正面朝上的硬币数， $X$ （随机变量） | 0 | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|----------------------|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 次数， $f$ （频数）         | 0 | 0 | 0 | 3 | 10 | 19 | 29 | 32 | 31 | 30 | 16 | 7  | 2  | 0  | 1  | 0  |

这种情况从表 1.1 也可看出来，但用图表示则更明显。

在这个例子中，正面朝上的硬币数是 0，1，2……这样的整数，不可能有 0.8 枚，7.5 枚这样的数。但是我们处理的数量，一般都是连续量。因此，随机变量  $X$ ，实际上代表一个小区间，可以用其平均值表示。

〔例 1.2〕 假设表 1.1 是表示某天各地正午的气温分布。随机变量( $X$ )表示气温[℃]，频数( $f$ )表示测到这个气温的观测点数。由于温度本来是连续量，也包括象 5.3[℃]，7.5[℃]这样的数值（或者是位数更多的数），所以，例如表中 5[℃]这个值，实际上是包括了 4.5~5.4[℃]（更严格地讲是 4.50~5.49[℃]即四舍五入能成为 5[℃]的数值）。这种情况，一般多用图 1.2 那样的直方图表示。

各变量之间的间隔为 1[℃]，间隔大小，应根据观测值的精度和目的适当选择。用分布曲线表示更好些；也有用连结各矩形上边中点的曲线表示的，但如图所示，要注意使斜线部分的面积相等，同时用光滑的曲线连接起来即可。

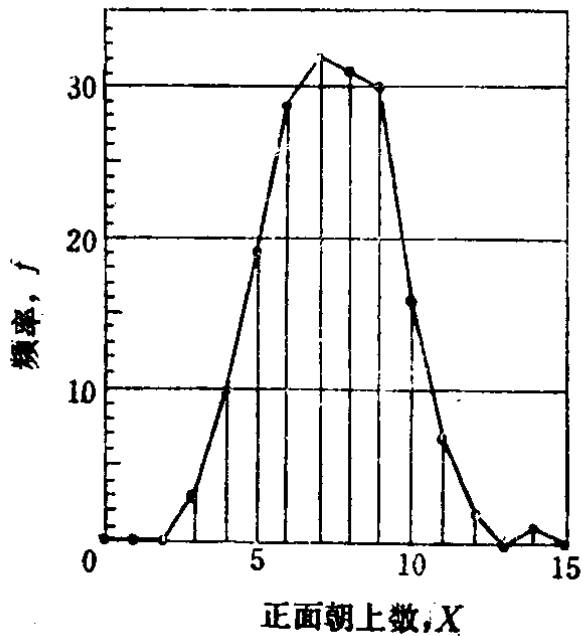


图 1.1

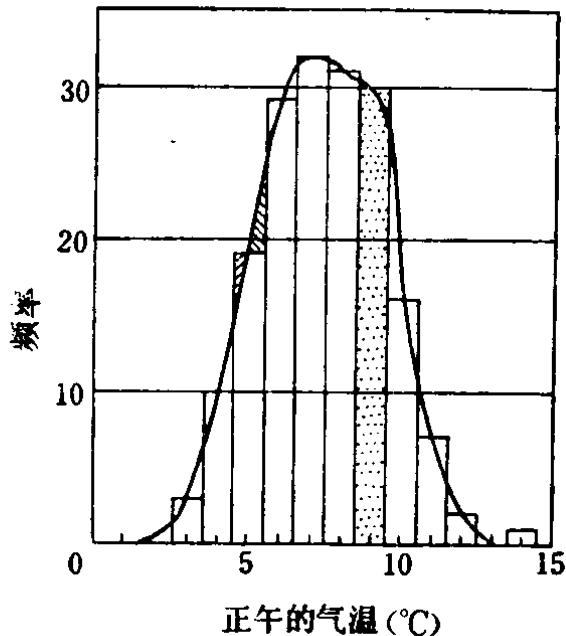


图 1.2

在这些例子中，纵轴都是用频数表示的。频数是相对于总次数来说的（总次数又叫项数，如投掷硬币的次数，气温观测点的数目）。显然，表 1.1 中的频数是随着总次数的变化而变化的，例如投掷15枚硬币其中有 9 枚是正面朝上的这个事件，“在 180 次中占30次的比例”这点就很重要。我们称这个比例为“概率”。

$$\text{概率}(P) = \frac{\text{某事件发生的次数}}{\text{全部事件数}} = \frac{f}{\sum f} \tag{1.1} \textcircled{1}$$

在上一例中，投掷15枚硬币 9 枚正面朝上时的概率为

$\textcircled{1} \sum$  是加和记号， $\sum_{i=1}^n f_i$  的意义是把  $f_1, f_2, \dots, f_n$  这一连串数值从第一个（下面的记号）一直加到第  $n$  个（上面的记号）。问题很明显的时候，注码  $i$  可以省略，式 (1.1) 即表示省略了注码的加和符号。

$$p = \frac{30}{180} = \frac{1}{6}$$

意思是在 6 次中能有一次。可是实际上若试投 6 次，9 枚正面朝上的次数不一定是一次，说不定连一次也没有，相反也可能有二次，偶尔还会有三次。概率的意思是可靠性最大的比例，所以在实验时必须用正确的方法反复进行多次。

这个问题涉及到统计学和归纳统计，质量控制等方法与我们的工作也有联系，可是在这里不可能详细讨论。这里要指出的就是常用频率代替前面所说的频数。

我们还回到例 1.2 上来，在图 1.2 中，表示温度为 9[°C] 的观测点数的比例，根据表 1.1 是  $30/180 = \frac{1}{6}$ ，可是从图上来说，是对

应变量为 9 的矩形面积（阴影部分）占总面积的比例。一般说，取值在  $X_1$  与  $X_2$  之间的频数，可以用从  $X_1$  和  $X_2$  引出的垂线与曲线围成的面积来表示，而其概率则是由它所占的面积与曲线围成的总面积之间的比例来表示。如果纵轴不是用频数而是用频率表示，那么曲线围成的总面积则相当于 1。

〔例 1.3〕 根据气体分子运动论，空间里的气体分子各以不同的速度运动着，其中以某速度  $v$  和  $v + dv$  之间的速度运动的分子的比例  $p$ ，可以用下式表示：

$$dp = F(v)dv = 4\pi \left( \frac{M}{2\pi RT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} dv \quad (1.2)$$

这个  $F(v)$  就是有名的马克斯韦尔分布函数。式中的

$M$ ：分子量[g/mol]；

$R$ ：气体常数[g·cm<sup>2</sup>/mol·°K·sec<sup>2</sup>]；

$T$ ：温度[°K]。

为了方便，单位用 C.G.S. 制表示，但不一定非用 C.G.S. 制不可，也可以适当换算。以分布函数  $F(v)$  对  $v$  作图，可得如图 1.3 所示的分布曲线。此图是 273[°K](0°C) 和 373[°K](100°C) 下的氧气速度分布图，和图 1.2 一样是较陡的凸形曲线。从图形可以知道，具有和

顶点相对应的速度( $v_p=378\text{m/sec}$ )的分子最多,而速度比 $v_p$ 大的和比 $v_p$ 小的分子数都急剧减少。速度超过 $1000\text{[m/sec]}$ 的高速分子就非常稀少了。假设 $v_1=500\text{[m/sec]}$ , $v_2=600\text{[m/sec]}$ ,则图中画斜线部分(阴影)的面积,就表示速度介于 $500\text{[m/sec]}$ 和 $600\text{[m/sec]}$ 之间的分子在全部气体分子数中所占的比例。计算面积时,要用到纵轴和横轴的单位,这个问题将在以后介绍。此面积就等于式(1.2)从 $v_1$ 到 $v_2$ 的定积分值。

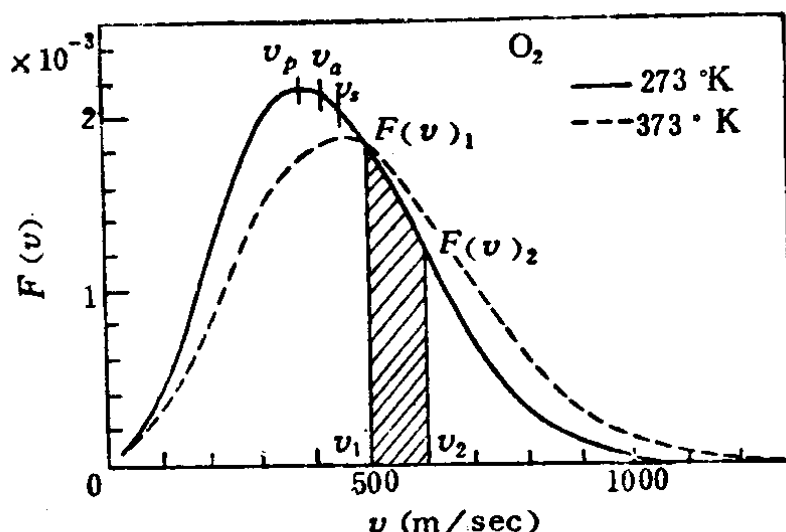


图 1.3 氧气的分子速度分布图

附带讲一下,如果考虑理想状态下的气体(一般可以认为在常压下难以液化的气体是理想气体),在容积为 $V$ 升,压力为 $P$ 大气压,温度为 $T^{\circ}\text{K}$ 的容器中的气体分子的总数 $N$ 可用下式表示:

$$N = (6 \times 10^{23}) \times \left( \frac{V}{22.4} \right) (P) \left( \frac{273}{T} \right)$$

因此,如果我们能照前述方法求出了速度在 $v_1 \sim v_2$ 之间的分子所占的比例 $p$ ,那么速度介于 $v_1 \sim v_2$ 之间的分子数 $N'$ 根据下式就很容易求出:

$$N' = N p$$

## 1.2 代 表 值

处理分布在一定区间上的数值集合时,有必要确定其代表值。

代表值有中位值，平均值，最大或然值等几种。

(1) 中位值 中位值就是把测定值按其大小顺序排列，取其位于正中间的数值，这是取代表值的最简单的方法。分布曲线左右对称时，当然没有问题；但是不对称而有偏向时却不能包括对它的修正。

〔例 1.4〕 把同一样品分成七份进行分析的结果，其浓度如表 1.2所示，这时其中位值为69.3%。

表 1.2

| 样 品 编 号      | 1    | 2    | 3    | <u>4</u>    | 5    | 6    | 7    | $\Sigma X$ | $M_a$ |
|--------------|------|------|------|-------------|------|------|------|------------|-------|
| 浓 度, $X[\%]$ | 69.8 | 69.5 | 69.4 | <u>69.3</u> | 68.9 | 68.5 | 68.3 | 483.7      | 69.1  |

表 1.3

| 区 间<br>[mm]    | 区间中位值<br>[mm] | 粒 数<br>$f$   | 偏 差            |               |                           |                             |
|----------------|---------------|--------------|----------------|---------------|---------------------------|-----------------------------|
|                |               |              | $\Delta$       | $\Delta f$    | $\Delta^2 \times 10^{-2}$ | $\Delta^2 f \times 10^{-2}$ |
| 0.270~0.279    | 0.275         | 1            | -0.09          | -0.09         | +0.81                     | +0.81                       |
| 0.280~0.289    | 0.285         | 1            | -0.08          | -0.08         | +0.64                     | +0.64                       |
| 0.290~0.299    | 0.295         | 1            | -0.07          | -0.07         | +0.49                     | +0.49                       |
| 0.300~0.309    | 0.305         | 3            | -0.06          | -0.18         | +0.36                     | +1.08                       |
| 0.310~0.319    | 0.315         | 8            | -0.05          | -0.40         | +0.25                     | +2.00                       |
| 0.320~0.329    | 0.325         | 10           | -0.04          | -0.40         | +0.16                     | +1.60                       |
| 0.330~0.339    | 0.335         | 19           | -0.03          | -0.57         | +0.09                     | +1.71                       |
| 0.340~0.349    | 0.345         | 34           | -0.02          | -0.68         | +0.04                     | +1.36                       |
| 0.350~0.359    | 0.355         | 52           | -0.01          | -0.52         | +0.01                     | +0.52                       |
| 0.360~0.369    | 0.365         | 62           | -0.00          | 0.00          | 0.00                      | 0.00                        |
| 0.370~0.379    | 0.375         | 56           | +0.01          | +0.56         | +0.01                     | +0.56                       |
| 0.380~0.389    | 0.385         | 40           | +0.02          | +0.80         | +0.04                     | +1.60                       |
| 0.390~0.399    | 0.395         | 37           | +0.03          | +1.11         | +0.09                     | +3.33                       |
| 0.400~0.409    | 0.405         | 24           | +0.04          | +0.96         | +0.16                     | +3.84                       |
| 0.410~0.419    | 0.415         | 10           | +0.05          | +0.50         | +0.25                     | +2.50                       |
| 0.420~0.429    | 0.425         | 3            | +0.06          | +0.18         | +0.36                     | +1.08                       |
| 0.430~0.439    | 0.435         | 1            | +0.07          | +0.07         | +0.49                     | +0.49                       |
| 中位平均值<br>0.355 |               | $\Sigma 362$ | 假设平均值<br>0.365 | $\Sigma 1.19$ |                           | $\Sigma 24.11$              |

(2) 算术平均值(相加平均值) 这是一般最常用的代表值, 计算也容易。

$n$ 个数值  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的算术平均值用下式表示:

$$M_a = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{\Sigma X}{n} \quad (1.3)$$

〔例 1.5〕 求例 1.4 中数据的算术平均值, 则如表 1.2 所示,  $\Sigma X = 483.7$ ,  $n = 7$ , 由式 (1.3) 得:

$$M_a = 483.7/7 = 69.1$$

一般把表 1.3 所示, 分布在一定区间的数值集合的算术平均值叫做加权平均值, 用下式表示:

$$M_a = \frac{X_1 f_1 + X_2 f_2 + \dots + X_n f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{\Sigma X f}{\Sigma f} \quad (1.4)$$

我们所处理的数值集合中, 其随机变量  $X$  值之间, 常常有如 1 或 10 这样的相等间隔, 这时可以用假设平均值, 其计算更为简单。如果对于  $X_1, X_2, \dots, X_n$  选定假设平均值  $A$ , 则式 (1.4) 可变为①

$$\left. \begin{aligned} M_a &= A + \frac{\Sigma \Delta f}{\Sigma f} \\ \Delta &= X - A \end{aligned} \right\} \quad (1.4')$$

其中  $\Delta$  叫做假偏差。这个数值选的好, 计算就很容易。

〔例 1.6〕 用显微镜测一种砂粒的大小, 所得结果如表 1.3 (1~3 栏) 所示, 试求其算术平均直径。

$$\begin{array}{l|l} \text{① 〔証明〕 } X_1 - A = \Delta_1 & X_1 f_1 = A f_1 + \Delta_1 f_1 \\ X_2 - A = \Delta_2 & X_2 f_2 = A f_2 + \Delta_2 f_2 \\ \vdots & \vdots \\ X_n - A = \Delta_n & X_n f_n = A f_n + \Delta_n f_n \\ \hline & \Sigma X f = A \Sigma f + \Sigma \Delta f \end{array} \quad (+)$$

$$\therefore M_a = \frac{\Sigma X f}{\Sigma f} = A + \frac{\Sigma \Delta \cdot f}{\Sigma f}$$

(解) 如表1.3的第四、五栏所表示, 如选取0.365作假设平均值, 依式(1.4')进行计算, 则得:

$$M_a = A + \frac{\Sigma \Delta f}{\Sigma f} = 0.365 + \frac{1.19}{362} = 0.368 [\text{mm}]$$

可以看出这和表中所示的中位值0.355[mm]有较大的差别。

(3) 其它的平均值 算术平均值是对各个数值都平等看待的一般性的平均值, 而平均值除此以外还有下面几种形式。由于这些平均值各自意义不同, 所以在使用时有必要适当地选择。它的例子在以后的章节中将会出现。

a) 几何平均值(乘积平均值)

$$M_g = \sqrt[n]{X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n} \quad (1.5)$$

或者

$$\begin{aligned} M_g &= (X_1^{f_1} \cdot X_2^{f_2} \cdot \dots \cdot X_n^{f_n})^{1/(f_1 + f_2 + \dots + f_n)} \\ &= (\prod X_i^{f_i})^{\frac{1}{\Sigma f_i}} \end{aligned} \quad (1.5')$$

b) 均方根平均值(自乘平均值)

$$M_r = \sqrt{\frac{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{n}} \quad (1.6)$$

或者, 对于对应于变量 $X_i$ 分别有 $f_i$ 个数值的数值集合, 则为:

$$M_r = \sqrt{\frac{X_1^2 \cdot f_1 + X_2^2 \cdot f_2 + \dots + X_n^2 \cdot f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}} = \sqrt{\frac{\Sigma X^2 \cdot f}{\Sigma f}} \quad (1.6')$$

c) 调和平均值

$$M_h = \frac{n}{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \dots + \frac{1}{X_n}} = \frac{n}{\Sigma \frac{1}{X}} \quad (1.7)$$

或者

$$M_h = \frac{f_1 + f_2 + \dots + f_n}{\frac{f_1}{X_1} + \frac{f_2}{X_2} + \dots + \frac{f_n}{X_n}} = \frac{\Sigma f}{\Sigma \frac{f}{X}} \quad (1.7')$$

## d) 对数平均值

$$M_l = \frac{X_1 - X_2}{\ln \frac{X_1}{X_2}} = \frac{X_1 - X_2}{2.303 \log \frac{X_1}{X_2}} \quad (1.8)$$

算术平均值以及这里举出的各种平均值,一般都表现不同的值。

如关于 $X_1$ 及 $X_2$ 两个数值在 $X_1/X_2=1.0\sim 2.0$ 范围内的各种平均值,同算术平均值的对比情况表示在图1.4中。由图可知,当 $X_1/X_2=1$ ,即 $X_1=X_2$ 时,各平均值相等,但在其它情况下就不相同。比较起来,均方根平均值最大,其次是算术平均值,其它平均值都比算术平均值还小。然而, $X_1/X_2$ 在这样一个范围内,其它平均值在多数情况下同算术平均值之间的误差只不过百分之几,所以经常使用

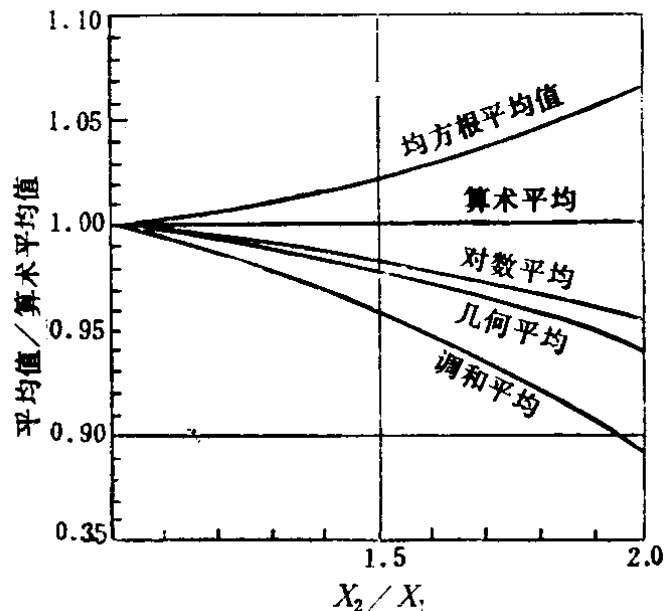


图 1.4 各平均值的比较

计算方便的算术平均值,而不使用其它平均值。

(4) 最大或然值 最大或然值即其频率最大的随机变量值,表示这种事件或现象(常用事件这个词)最容易出现;也可以说,它是可靠性最大的条件。它是同分布曲线的顶点(极大点)相对应的,所以如果知道分布密度函数,求其微分值等于0的值即可<sup>①</sup>。  
〔参考第四章〕。

〔例 1.7〕 求在 $0[^\circ\text{C}]$ 及 $100[^\circ\text{C}]$ 时,氧气分子的运动速度。

(解) 根据例1.3中所讲的马克斯威尔方程,求 $dF/dv=0$ 的值。

① 准备在第四章微分中再讲。 $y$ 对于 $x$ 的导数 $dy/dx$ 表示曲线 $y=f(x)$ 的斜率。能满足 $dy/dx=0$ 这一条件的点,恰好是曲线处于水平位置的点,但不一定就是最大值点,所以一般需要由这些点中分析选取最大值点。

$$F(v) = 4\pi \left( \frac{M}{2\pi RT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot v^2 e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} \quad (a)$$

$$\therefore \frac{dF(v)}{dv} = 4\pi \left( \frac{M}{2\pi RT} \right)^{\frac{3}{2}} v e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} \cdot \left( 2 - \frac{Mv^2}{RT} \right) = 0 \quad (b)$$

满足方程 (b) 的条件是:

$$v = 0 \quad (c_1)$$

$$\text{或者 } e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} = 0 \quad \therefore v = \infty \quad (c_2)$$

$$\text{以及 } 2 - \frac{Mv^2}{RT} = 0 \quad \therefore v = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \quad (c_3)$$

由图1.3可以看出, 分布曲线是在左右两侧的末端 (此图  $v = 0$  的一侧不很明显) 以及在最高点处成为水平, 这表明满足上述条件。在这里可以知道同最大点相对应的值, 显然是最后那个值, 即式(c<sub>3</sub>)。若以注码  $p$  表示最大或然值, 把式中的常数项用数值表示, 则:

$$v_p = 1.29 \times 10^4 \sqrt{\frac{T}{M}} \quad [\text{cm/sec}] \quad (d)$$

如果知道气体的种类和温度条件, 把其分子量 [g/mol] 和温度 [°K] 代入式(d)中即可求出  $v_p$ 。这个值一般就叫作最大或然速率。为了便于参考, 下面把求相当于前节(a)算术平均值和(b)均方根平均值的算术平均速度  $v_a$  和均方根速度  $v_s$  的算式和计算结果列出来。

平均速度

$$\begin{aligned} v_a &= \int_0^\infty v \cdot F(v) dv = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \\ &= 1.45 \times 10^4 \sqrt{\frac{T}{M}} [\text{cm/sec}] \\ &= 1.13 v_p \end{aligned} \quad (e)$$

均方根速度

$$v_s = \sqrt{\int_0^\infty v^2 F(v) dv} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$