函数逼近：理论与数值方法

[德] G. Meinardus 著

赵根榕
赵　冰　译

高等教育出版社

函数逼近: 理论与数值方法

[德] G. Meinardus 著
赵根榕
赵 冰
译

高等教育出版社

内 容 提 要

本书分为两篇. 第一篇讲线性逼近，包括一般线性逼近问题、线性Чебышев逼近、数值方法及多项式与有关函数的逼近；第二篇讲非线性逼近，包括非线性 Чебышев 逼近、分段逼近等. 本书收集了逼近论最本质的结果，并且书中全部定理都有证明，对学习逼近论与数值方法的有关人员是一本较好的参考书.

函数逼近：理论与数值方法

［德］ G. Meinardus 著

赵根榕
赵 冰 译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北 京 印 刷 一 厂 印 装

*

开本 850×1168 1/32 印张 7.875 字数 184,000

1986 年 7 月第 1 版 1986 年 7 月第 1 次印刷

印数 00,001—4,650

书号13010·01115 定价 1.80 元

德文第一版序

逼近论有些部分能应用于数值问题，这些部分的迅猛发展只不过是最近几年的事.由于电子计算机的应用，求函数(在某种意义之下)的最佳逼近的思想受到相当大的重视，然而,实用问题所必要的一些理论基础仅散见于为数不多的几本书中．绝大部分理论与实用的研究只能在原始论文中获取．这规定了本书的目的：收集逼近论的最本质的结果，一方面使得有可能很快地介绍这一领域的现代发展；另一方面给 Чебышев 逼近问题的领域提供一定的完备性——但这绝不是说要搞成一个文献综述．材料的取舍根据其对应用来说是否重要这一主观的看法而定．这也适用于，例如，§3 的渐近研究，因为我认为：即使就数值逼近来说，至少也应当考虑能够预期达到怎样的渐近精度．本书几乎只限于一致逼近理论，因为它在实用上最为重要.

第一篇论述线性逼近．第三章包含目前必然会被认为是通向线性理论的捷径．多项式逼近的古典情形的细节(§6)知道的并不多，而且结果的处理也常常是麻烦的，所以我决定给以全面的解说．专设一章(§7)讲述线性逼近的数值方法，而在个别节次中，还包括非线性逼近的构造方法与理论．第二篇大部分跟我与 **D. Schwedt** 所进行的较新研究有关．在此，我们发展了能应用于各种数值问题的非线性逼近的理论.

除去少数例外，用正常字排印的定理都有证明，并且有一部分证明是新的.进一步研究的参考资料用小字排印.

遗憾的是，由于篇幅所限，未能完全考虑到逼近论的各个方面，其中包括，例如，所谓 L_p 逼近，Бернштейн 逼近问题(在实直

线上用某些整函数的逼近)与 J. L. Walsh 关于在复平面上逼近的富有情趣的研究.

(致谢的话译略).

Günter Meinardus

1964 月 3 月于汉堡

英 文 版 序

这一英文版是 Larry Schumaker 博士按德文版的增订版翻译的. 除去许多小的补充、更正和少数新证明(例如, Jackson 定理的新证明)之外, 与第一版的详细区别是加进了在所谓正则 Haar 组的情形中的比较定理(§6)与分段逼近(§11)的新工作的讨论. (以下感谢的话略).

Günter Meinardus

1967 年 5 月

于 Glausthal-Zellerfeld

目 录

第一篇　线性逼近

§1　一般线性逼近问题

1.1　问题的提法. 存在定理. 设 R 是元素 $f, g, \cdots$ 的于实数或复数域上的线性赋范空间，而且 f 的范数用记号 $\|f\|$ 表示. 进而，设 V 为 R 的有限维线性子空间. 一般线性逼近问题如下所述:

对于事先给定的 $f \in R$，试求元素 $g \in V$，使对于所有的 $h \in V$ 有

$$\|g-f\| \leqslant \|h-f\| \tag{1.1}$$

定理 1　对于任何已知的 $f \in R$，恒存在一个 $g \in V$，有性质 (1.1).

证明(R. C. Buck[1]; Н. И. Ахиезер[1]第 18 页)　命

$$\rho_V(f) = \inf_{h \in V} \|h-f\|$$

则对所有满足 $\|h\| > 2\|f\|$ 的 h，不等式

$$\|h-f\| > \|f\| \geqslant \rho_V(f)$$

成立. 因此只须考虑满足 $\|h\| \leqslant 2\|f\|$ 的所有 $h \in V$ 的集上的连续函数 $\|h-f\|$ 即可. 因为这个集是有限维空间 V 的闭有界子集，故它是**紧致的**，因此 $\|h-f\|$ 取得它的极小.

满足

$$\|g-f\| = \rho_V(f)$$

的元素 $g \in V$ 叫 f 关于 V 的**最佳逼近**. 显然，最佳逼近的集是凸的. 上述存在定理已在更一般的假设之下，由 G. Köthe[1, 第 347 页]所证明.

泛函 $\rho_V(f)$ 是半范数，而且因为

$$|\rho_V(f_1)-\rho_V(f_2)|\leqslant\rho_V(f_1-f_2)\leqslant\|f_1-f_2\|$$

故它也是 f 的连续函数.

1.2 严格凸空间. Hilbert 空间. 依照 M. Крейн[1], 如果

$$\|f+g\|<2, \text{当} \|f\|=\|g\|=1 \text{且} f\neq g \text{时} \tag{1.2}$$

成立, 则空间 R 叫**严格凸的**(或严格赋范的). 这时下述唯一性定理成立:

定理 2 若 R 是严格凸的, 则对于每个 $f\in R$ 与每个有限维子空间 $V\subset R$ 恰有 f 关于 V 的一个最佳逼近.

请参阅 R. C. Buck[1]; H. И. Ахиезер[1] 第 20 页; G. Köthe[1] 第 347 页.

证明 若 g_1 与 g_2 都是最佳逼近, $g_1\neq g_2$, 则由(1.2)推得

$$\left\|\frac{1}{2}(g_1+g_2)-f\right\|=\frac{1}{2}\|(g_1-f)+(g_2-f)\|<\rho_V(f)$$

与 $\rho_V(f)$ 的定义矛盾.

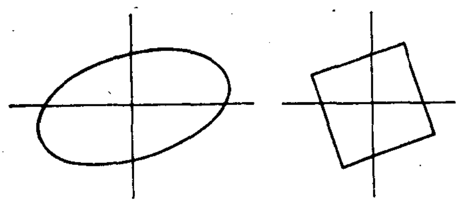

图 1 对应于二维严格凸与非严格凸范数的单位球体

定理 2 的逆定理也成立: 若 R 不是严格凸的, 则有某一个 $V\subset R$ 与 $f\in R$, 使得 f 关于 V 有多个最佳逼近. 关于这个结果的推广请参阅 G. Köthe[1].

Hilbert 空间与当 $1<p<\infty$ 时的空间 L_p 及 l_p 为严格凸空间的例子见 G. Köthe[1]. 在其它空间, 例如在范数为

$$\|f\|=\int_a^b|f(x)|dx \tag{1.3}$$

的，在区间$[a,b]$上可积函数 $f(x)$ 的空间 $L_1[a,b]$中，或在范数为

$$\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \tag{1.4}$$

的，在区间$[a,b]$上连续函数 $f(x)$的空间 $C[a,b]$中存在定理与所论的特殊子空间 V（见 §3.2），甚至常常与函数 f 本身的特殊性质有关（见 §3.3）.

若引进子空间V的基 $h_1,h_2,\cdots,h_n$ 则可见

$$\|h-f\| = \left\|\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu h_\nu - f\right\| = F(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$$

是（实或复）数 α_ν 的实值函数．这个函数关于 α_ν 为连续的．但一般并不是处处可微的．

在内积为(f,h)的 Hilbert 空间中，由平行四边形定律

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2\|f\|^2+2\|g\|^2$$

可以直接推出严格凸性．于是 f 关于V的最佳逼近 g 是 f 在V上的正投影，即对于所有 $h\in V$

$$(g-f,h)=0$$

这可以证明如下：若存在一个 $h_0\in V$，使

$$(g-f,h_0)=\beta\neq 0$$

则显然

$$\tilde{g}_1=g-\frac{\beta}{(h_0,h_0)}\cdot h_0$$

在V中，而且

$$\|\tilde{g}_1-f\|^2=\|g-f\|^2-\frac{|\beta|^2}{(h_0,h_0)}<\|g-f\|^2$$

但这与 g 是最佳逼近这一事实矛盾.

最佳逼近能由这种投影性质直接得到．事实上，若元素 h_1, $h_2,\cdots,h_n$ 为V的正交基，则

$$g=\sum_{\nu=1}^{n}(f,h_\nu)h_\nu$$

进而

$$\|f-g\|^2=\|f\|^2-\sum_{\nu=1}^{n}|(f,h_\nu)|^2$$

若元素 $g_1,g_2,\cdots,g_n$ 为V的一个不必是正交的基，则

$$g=\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu g_\nu$$

其中 λ_ν 可由线性方程组

$$\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu(g_\nu,g_\mu)=(f,g_\mu),\ \mu=1,2,\cdots,n$$

确定．于是

$$\|f-g\|^2=(f,f)-(g,f)=(f,f)-\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu(g_\nu,f)$$

而且由这个关系连同上面 λ_ν 的线性方程组推得

$$\|f-g\|^2=\frac{D_{n+1}(f,g_1,g_2,\cdots,g_n)}{D_n(g_1,g_2,\cdots,g_n)} \tag{1.5}$$

其中 $D_m(z_1,z_2,\cdots,z_m)=\det((z_\nu,z_\mu))$；$\nu,\mu=1,2,\cdots,m$，是元素组 $z_1,z_2,\cdots,z_m$ 的 Gram 行列式．

1.3 极大线性泛函．保证线性泛函可以延拓的 Hahn-Banach 定理(Л. А. Люстерник 与 В. И. Соболев[1]第 173 页)在逼近论中也是非常重要的．当研究R上满足

$$\left.\begin{array}{l}1.\ L(h)=0,\ 对于所有的\ h\in V,\\ 2.\ \|L\|=\sup\limits_{\substack{h\in R\\ \|h\|=1}}|L(h)|\leqslant 1\end{array}\right\} \tag{1.6}$$

的线性泛函 L 时得到量 $\rho_V(f)$的下界：

$$|L(f)|\leqslant\rho_V(f) \tag{1.7}$$

现在借助于 Hahn-Banach 定理便得到(见 R. C. Buck[1])

定理 3 命R为线性赋范空间，V 为 R 的线性子空间．并且命

$$\rho_V(f)=\inf_{h\in V}\|h-f\|$$

则对于每个 $f\in R$,在 R 上存在具有性质(1.6)的线性泛函 L,使

$$\rho_V(f)=L(f) \tag{1.8}$$

证明 可以假设

$$\rho_V(f)>0$$

考察由 f 与 V 所张成的线性空间 V^*. 每个 $h\in V^*$ 有唯一的表示

$$h=\beta f+g$$

其中 $g\in V$. 现在

$$L_1(h)=\beta\rho_V(f)$$

是 V^* 上的线性泛函,而且有性质

$$L_1(g)=0 \text{ 对于 } g\in V \text{ 和 } L_1(f)=\rho_V(f)$$

进而,L_1 关于 V^* 的范数 $\|L_1\|^*$ 有值 1,因为对于 $\beta\neq 0$,关系

$$\|\beta f+g\|=|\beta|\cdot\|f+g/\beta\|\geqslant|\beta|\cdot\rho_V(f)=|L_1(\beta f+g)|$$

成立按 Hahn-Banach 定理,在 R 上存在线性泛函 L 使

$$L(h)=L_1(h) \qquad \text{对于所有的 } h\in V^*$$

且

$$\|L\|=\|L_1\|^*$$

证毕.

值得注意的是: 在定理 3 中,V 的维数并不要求是有限的.

当 $|L(f)|=\rho_V(f)$ 时,R 上具有性质(1.6)的线性泛函 L,叫关于 f 的**极大泛函**. 逼近问题常常可用构造极大泛函的方法加以处理(对偶问题). 常常可以只就具有性质(1.6)的泛函类 1 的一个特殊子集来求极大泛函. 在 Hilbert 空间中,除去绝对值为 1 的常因子外,对于每个元素 f,恰存在一极大泛函,即

$$L_f(h)=L(h)\equiv\begin{cases}0 & \text{对于 } f\in V\\ \dfrac{1}{\|g-f\|}(f-g,h) & \text{对于 } f\notin V\end{cases}$$

其中 g 为 f 关于 V 的最佳逼近. 但一般由逼近问题的唯一解能给出多个本质上不同的极大泛函.

§2 稠 密 组

2.1 Banach 一般准则. 设 $V_n\subset R$, $n=1, 2, \cdots$ 是 R 的线性子空间, 其中下标 n 表示 V_n 的维数, 并且对于所有的 n, 设 $V_n\subset V_{n+1}$. 设 M 为所有 V_n 的并, 置

$$\rho_n(f)=\rho V_n(f)$$

若对于每个 $f\in R$,

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n(f)=0 \tag{2.1}$$

则称组 M 在 R 中是稠密的.

定理 4(S. Banach[1]) 当且仅当 R 上每个在 M 为零的连续线性泛函恒等于零时, 组 M 在 R 中才是**稠密的**.

证明(见 H. И. Ахиезер[1]第 60 页) 设 M 在 R 是稠密的, 且 L 为 R 上的一个连续线性泛函, 对于所有的 $h\in M$, 满足

$$L(h)=0$$

那么对于每个给定的 $\varepsilon>0$ 与 $f\in R$, 存在 $h\in M$, 使得

$$\|f-h\|<\varepsilon$$

于是

$$|L(f)|=|L(f-h)|\leqslant\|L\|\cdot\|f-h\|<\|L\|\varepsilon$$

所以 $L(f)=0$.

逆定理可以由定理 3 直接推出. 事实上, 若 f 为 R 的元素, 且

$$\rho_M(f)=\lim_{n\to\infty}\rho_n(f)=\beta>0$$

则依定理 3, 存在连续线性泛函, 它在 M 上等于零, 且满足

$$L(f)=\beta$$

有许多关于特殊空间中特殊稠密组的定理. 其大部分证明需

要复杂的分析方法. **我们在此主要谈论的是一致逼近**, 但大部分结果在别的空间也成立.

2.2 Weierstrass 与 Müntz 逼近定理. 我们需要 Коровкин 关于定义于实空间 $C[a,b]$, 而值域包含于空间 $C[a,b]$ 中的连续线性算子的一个引理. 这样的算子 $H(f,x)=H(f(t),x)$, 如果只要 f 与 g 属于 $C[a,b]$, 就由 $f(t)\geqslant g(t)$ 推出关系

$$H(f,x)\geqslant H(g,x), \text{对于 } x\in[a,b]$$

则叫做**单调的**.

定理 5(П. П. Коровкин[1]) 命 $H_n(f,x)$, $n=1,2,\cdots$是线性单调算子序列, 它们把实空间$C[a,b]$映射到自身. 若对于$\nu=0,1,2$, 关系

$$\|H_n(t^\nu,x)-x^\nu\|=o(1), \quad \text{当 } n\to\infty \text{ 时}$$

成立, 则对于每个函数 $f(t)\in C[a,b]$, 关系

$$\|H_n(f,x)-f(x)\|=o(1), \quad \text{当 } n\to\infty \text{ 时}$$

成立.

证明 对于任何预先给定的 $\varepsilon>0$, 和 t 与 x 在区间$[a, b]$的任意值, 存在一个 $\delta>0$, 使下列不等式成立:

$$-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2<f(t)-f(x)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2$$

此处

$$M=\|f\|$$

于是由算子的单调性推得

$$|H_n(f,x)-f(x)H_n(1,x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}H_n(1,x)+\frac{2M}{\delta^2}H_n((t-x)^2,x)$$

因而

$$\|H_n(f,x)-f(x)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\left[\|f\|+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{\delta^2}\|x\|^2\right]\|H_n(1,x)-1\|$$

$$+\frac{4M}{\delta^2}\|x\|\cdot\|H_n(t,\ x)-x\|+\frac{2M}{\delta^2}\|H_n(t^2,x)-x^2\|$$

$$<\varepsilon \quad 对于\ n>n_0(\varepsilon)$$

我们现在研究区间[0, 1]上的特别算子

$$B_n(f,\ x)=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}f\left(\frac{\nu}{n}\right)x^{\nu}(1-x)^{n-\nu},\quad n\geqslant 1 \tag{2.2}$$

(C. H. Бернштейн[1])关系

$$B_n(1,x)=1$$

$$B_n(t,x)=x$$

和

$$B_n(t^2,x)=x^2+\frac{x-x^2}{n}$$

容易证明. 此外, 算子是单调的. 因而依定理 5, 对任何 $f\in C[0,1]$, 推出

$$\|B_n(f,x)-f(x)\|=o(1)\quad (n\to\infty)$$

因为算子 $B_n(f,\ x)$是次数最高为 n 的多项式, 故(经过简短的变换, 将区间[0, 1]变为任意的有限区间$[a, b]$后)我们有

定理 6(K. Weierstrass[1]) 所有多项式的集在 $C[a,\ b]$中为稠密的.

在定理 6 中, 显然能把 $C[a, b]$理解为实区间$[a,\ b]$上的所有连续复值(不仅实值)函数的空间. Weierstrass 逼近定理有许多别证. 例如见 E. Borel[1]; D. Jackson[1], [2]; B. Л. Гончаров [1]; E. Landau[1]; H. Lebesgue[1]; O. Lerch[1]; A. Marchaud [1]; P. Montel[1]; J. L. Walsh[2]. 下面的定理叫 Weierstrass 第二定理:

定理 7 (K. Weierstrass[1]) 三角和的组

$$a_0+\sum_{\nu=1}^{n}(a_{\nu}\cos\nu\varphi+b_{\nu}\sin\nu\varphi)$$