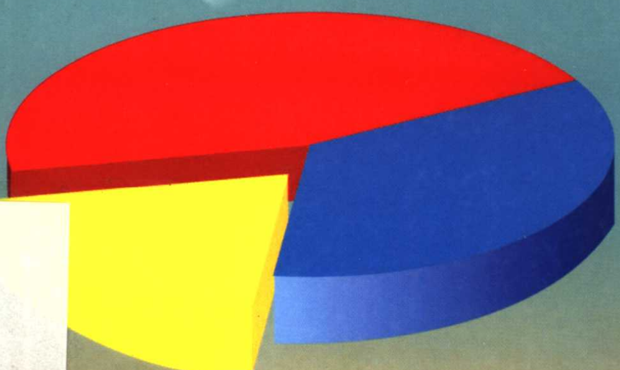
高等学校教材

GAILULUN YU SHULITONGJI

概率论与数理统计

孙海珍 刘宝友 刘响林 主编



中国铁道出版社

高等学校教材

概率论与数理统计

主编　孙海珍　刘宝友　刘响林
编者　孙海珍　刘宝友　刘响林
王永亮　张文国

中国铁道出版社
2003年·北京

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

本系列教材为大学工科各专业公共课教材,共 5 册 高等数学(上 下册)、线性代数与几何、概率论与数理统计 计算方法 编者根据工科院校数学教改精神 多年教改课题研究和试验而编写,书中融入了许多新的教学思想和方法 本书为概率论与数理统计,内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征 大数定律和中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验 方差分析、回归分析 正交试验等。

本书除作为理工科院校各专业数学教材外,也适合作为大专 函授、夜大、自考计算方法教材。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/孙海珍,刘宝友,刘响林主编 —北京:中国铁道出版社,2003 1
高等学校教材
ISBN 7-113 05045 X

Ⅰ 概… Ⅱ ①孙 ②刘·· ③刘· Ⅲ ①概率论—高等学校—教材 ②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 103692 号

书　　名　高等学校教材
　　　　　概率论与数理统计
作　　者　孙海珍　刘宝友　刘响林　王永亮　张文国
出版发行　中国铁道出版社(100054,北京市宣武区右安门西街 8 号)
责任编辑·李小军
编辑部电话　市电 (010)63583214　路电 (021)73133
封面设计　冯龙彬
印　　刷　中国铁道出版社印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张　15 25　字数　275 千
版　　本　2003 年 1 月第 1 版　2003 年 1 月第 1 次印刷
印　　数·0001~4500 册
书　　号　ISBN 7 113 05045 X/O·106
定　　价　18 50 元

前　言

本书是铁道部部级课题、河北省“九五”教育学科规划重点课题“面向21世纪高等工科教育数学系列课程教学内容与课程体系改革的研究与实践”的研究成果，通过几年的教学实践，广泛征求意见，反复修改而成的高等数学系列教材《概率论与数理统计》分册.

本书内容的深度和广度与现行的“概率论与数理统计课程教学基本要求”大体一致 编写中力求做到：渗透现代数学思想，加强应用能力培养 考虑到该课程是高等院校教学计划中一门重要的基础理论课，因此，我们致力于讲清基本的概念和方法，注重培养分析问题和解决问题的能力，在例题和习题的选择上作了较大努力，力求说明其应用的广泛性

概率论与数理统计是研究随机现象客观规律性的数学学科.概率论是对随机现象统计演绎的研究，数理统计是对随机现象统计规律归纳的研究.虽然二者在方法上不同，但作为一门学科，它们是互相渗透互相联系的.本书分两部分：概率论部分(第一章至第五章)作为基础知识，为读者提供了必要的理论基础；数理统计部分(第六至第十一章)主要讲述了参数估计、假设检验，并介绍了方差分析、回归分析和正交试验等内容

本教材难易程度适中，适合作为高等工科院校本科的教材或教学参考书，也可作为工程技术人员的参考书

本书由孙海珍、刘宝友、刘响林主编 参加本书编写的有：刘响林、王永亮、孙海珍、刘宝友、张文国.

在本教材的编写过程中，得到了顾祝全教授、张保才教授和牟卫华教授的热情帮助.他们提出了很多宝贵意见，对此我们表示衷心的感谢

本书的初稿虽经过多次试用和修改，但由于编者水平有限，难免有错误和不当之处，敬请读者批评指正

编　者

2002年12月

目　　录

第一章 随机事件与概率

概率论源于17世纪中叶 当时,欧洲经济萧条,许多达官贵人沉迷于非常盛行的赌博之中 在赌博过程中,人们就提出一些问题,如投资一定的金钱参与赌博,在何时结束最好 针对这些问题和赌博中输赢的偶然性,数学家们进行了认真的思考和研究,在巴斯加尔、费尔马、贝努利等人的努力下,现在广泛应用于各个领域的概率论逐步建立起来了 同时,随着航海、航空、保险业的发展,这些领域中提出的问题也促使概率论得到了进一步的发展和完善 到19世纪,初等概率论已经走向成熟. 初期研究概率论的代表人物有欧美派的拉普拉斯(Laplace)、高斯(Gauss)、泊松(Poisson)等和原苏联的车贝谢夫、马尔可夫、柯尔莫哥洛夫、格涅坚科等 现在,概率论已经广泛应用到物理、数学、军事科学、天文学、经济和金融学、生物和医学、电子学等领域

数理统计的发展是19世纪中叶开始的,在其奠基阶段,主要的代表人物有英国的统计学家K. Pearson和R. A. Fisher Pearson主要研究利用一些数据来求频率曲线,从而描述所研究对象的特征的分布;而Fisher则开创了实验设计、估计理论和方差分析等统计理论. 自从1920年以来,J Neyman和E Pearson创立了假设检验理论后,数理统计开始蓬勃发展起来,逐步建立了统计判断理论、多元统计分析、方差分析、时间序列分析、随机模拟等数理统计分支 随着各学科不断提出新问题和数理统计在各个领域的不断应用,使数理统计和其他学科相互渗透,产生了各种各样的应用统计分支,如水文统计、地质统计、生物统计、工程统计、质量统计和计量经济等 从数理统计的特点和发展过程看,它是一门研究如何收集数据、整理数据和分析数据的应用数学学科,它在国民经济的各个领域中都有着重要的作用

第一节 随机事件和样本空间

1.1 随机试验

人们通常把自然界或社会中出现的现象分为两类:一类是必然的(或称为确定性的),如重物在高处总是垂直落到地面,水在摄氏100℃沸腾,气体在一定大

气压下满足状态方程 $pV = nRT$ 等,早期的科学就是研究这一类现象的规律性,所应用的数学工具有数学分析、几何、代数、微分方程等 另一类现象是事前不可预测的,即在相同条件下重复进行试验,每次的结果未必相同,这一类现象称为偶然现象或随机现象,如掷一枚硬币,其结果可能是正面,也可能是反面,其它如农作物在收获前的产量,射击时子弹的落点,新生婴儿在出生前是男是女都是不能事先确定的.这些偶然现象的发生表面上看是偶然的,但是,在偶然的表面下蕴含着必然的内在规律性 概率论就是研究这种偶然现象的内在规律性的一门学科.

在概率论研究中,我们把人们的某种活动称为试验 它包括做一个实验,也包括进行一次测量或进行一次抽样观察 注意与物理、化学等科学实验的区别

定义 1.1 将满足如下条件的试验称为**随机试验**(用 E 表示)

(1) 在相同的条件下可以重复进行;

(2) 每次试验的结果有多个,并且事先知道所有可能发生的结果;

(3) 每次试验的具体结果不能事先确定.

今后随机试验都简称为**试验**

1.2 随机事件

定义 1.2 进行一次试验总有其观察目的,试验中可能观察到多种不同的可能结果,在一次试验中可能出现也可能不出现的结果或事件叫**随机事件**,简称**事件**,用字母 $A,B,C,\cdots$ 表示;把不可能再分或没有必要再分的事件称为**基本事件**或**样本点**,用字母 ω 或 $\omega_1,\omega_2,\cdots$ 表示;全体基本事件组成的集合叫**样本空间**,用 Ω 表示,样本空间一定会发生,故也称**必然事件**;每次试验不可能发生的事件称为**不可能事件**,用 $\varnothing$ 表示

例 1.1 E_1:抽样检查产品的质量是一个随机试验 在检查前已知可能发现合格品,次品和废品,但是在每次检查一个产品前我们不知道它是哪一种.$\Omega = \{$合格品,次品,废品$\}$

例 1.2 E_2:在一批电视机中任取一台,测试其使用寿命 $\Omega = \{t \mid t \geqslant 0\}$

例 1.3 E_3:某电话总机在一段时间内接到的呼叫次数 $\Omega = \{0,1,2,\cdots\}$

例 1.4 掷一枚骰子所得点数大于 6 是不可能事件,所得点数小于或等于 6 是必然事件,所得点数为奇数是随机事件,所得点数是 3 是基本事件,$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

一次试验中有且只有一个基本事件出现;随机事件 A 出现或发生当且仅当 A 所含基本事件之一出现

1.3　随机事件的关系与运算

进行一次试验,会有这样或那样的事件发生,它们各有不同的特点,彼此之间又有一定的联系.下面我们引入一些事件之间的关系和运算,来描述这些事件之间的联系

1. 事件的关系

(1) 包含关系

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 A 包含于事件 B,或称事件 B 包含事件 A,或称事件 A 是事件 B 的事件,记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

显然,对任意事件 A,有 $\varnothing \subset A, A \subset \Omega$.

(2) 互斥(互不相容)

如果两个事件 A,B 不可能同时发生,则称事件 A 和事件 B 互斥或互不相容 必然事件和不可能事件互斥.

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为同一样本空间 Ω 中的随机事件,若它们之间任意两个事件是互斥的,则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互斥的

2. 事件的运算

(1) 事件的并(或和)

若 C 表示“事件 A 与事件 B 至少有一个发生”这一事件,则称 C 为 A 与 B 的并或和,记为 $C = A \cup B$. 当事件 A 与 B 互斥时,将并事件记为 $C = A + B$ 且称 C 为 A 与 B 的直和. 显然有 $A \cup A = A, A \cup \Omega = \Omega$.

(2) 事件的交(或积)

若 D 表示“事件 A 与事件 B 同时发生”这一事件,则称 D 为 A 与 B 的交或积,记为 $D = A \cap B$,也可简记为 $D = AB$ 显然 $A \cap A = A, A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap \Omega = A$,事件 A 与 B 互斥等价于 $AB = \varnothing$

(3) 事件的差

若 F 表示“事件 A 发生而事件 B 不发生”这一事件,则称 F 为 A 与 B 的差事件,记为 $F = A - B$ 显然有 $A - A = \varnothing, A - \varnothing = A, A - \Omega = \varnothing$.

(4) 事件的逆(对立事件,余事件)

称“事件 A 不发生”为事件 A 的逆事件,记为 $\bar{A}$ 显然 $A \cup \bar{A} = \Omega, A\bar{A} = \varnothing, A - B = A\bar{B} = A - AB$.

如果以平面内的某个正方形表示样本空间,用两个小圆表示事件 A 和 B,则事件的运算可以通过平面图形来表示,这种更加直观的表示方法被称为文图(Venn),见图 1.1.

事件的并和交可以推广到有限多个或无穷多个事件的情形:

“有限个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生”这一事件称为 $A_1, A_2, \cdots,$

A_n 的并,记为 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$;

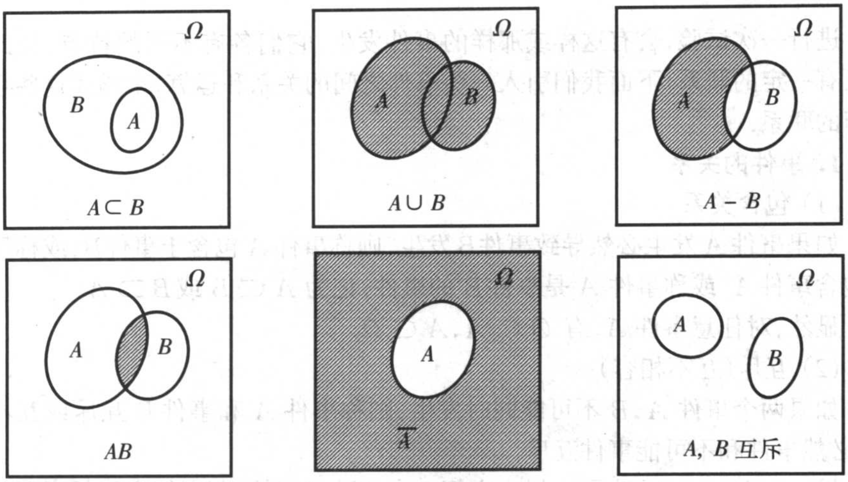


图 1.1

"有限个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生"这一事件称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交,记为 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$;

"无穷多个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 至少有一个发生"这一事件称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的并,记为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$;

"无穷多个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时发生"这一事件称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的交,记为 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

3. 事件的运算规律

随机事件的运算满足以下规律.

交换律:$A \cup B = B \cup A$,

$A \cap B = B \cap A$.

结合律:$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

分配律:$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

德·莫根律(De. Morgan):$\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \overline{A}_i$, $\overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \overline{A}_i$.

由于样本空间是以所有基本事件为元素的集合,随机事件是样本空间的一个子集,因而随机事件之间的相互关系和运算规律是集合论中集合之间相互关系和运算规律的平行移置.见表 1.1.

表 1.1　集合与随机事件对照表

符　号	集　　合	随　机　事　件
Ω	空间或全集	样本空间,必然事件
$\varnothing$	空集	不可能事件
$\omega \in \Omega$	Ω 中的元素	基本事件或样本点
$A \subset B$	集合 A 包含在集合 B 中	事件 A 是事件 B 的子事件
$A \cup B$	集合 A 与集合 B 的并	事件 A 与事件 B 至少有一个发生
$A \cap B$	集合 A 与集合 B 的交	事件 A 与事件 B 同时发生
$\bar{A}$	集合 A 的余集	事件 A 的逆事件或余事件
$A - B$	集合 A 与 B 之差	事件 A 发生而 B 不发生
$A \cap B = \varnothing$	集合 A 与 B 无公共元素	事件 A 与 B 互不相容(互斥)
$A = B$	集合 A 与 B 相等	事件 A 与事件 B 相等

下面举一些例子来说明上面的概念和运算.

例 1.5　在掷骰子试验中,事件 A 表示"点数小于 2",事件 B 表示"点数为奇数",显然有 $A \subset B$;事件"出现 1 点"和"出现 4 点"互斥;若 C 表示"出现点数小于 5",D 表示"出现点数是偶数",则 $C \cup D = \{$出现 1,2,3,4,6 点$\}$,$C \cap D = \{$出现 2,4 点$\}$,$\bar{C} = \{$出现 5,6 点$\}$.

例 1.6　简化下列各式:(1) $(A \cup B)(A \cup \bar{B})$;　(2) $(A \cup B) - A$

解　(1) $(A \cup B)(A \cup \bar{B}) = A \cup A\bar{B} \cup BA \cup B\bar{B} = A \cup (A\bar{B} \cup AB)$

$$= A \cup A(\bar{B} \cup B) = A;$$

(2) $(A \cup B) - A = (A \cup B)\bar{A} = A\bar{A} \cup B\bar{A} = B\bar{A} = B - A$

例 1.7　向指定目标射击 3 次,以 A_1, A_2, A_3 分别表示事件"第一、二、三次击中目标",试用 A_1, A_2, A_3 表示下列事件

(1) 只击中第一次;(2) 只击中一次;(3) 三次都未击中;(4) 至少击中一次

解　(1) 事件"只击中第一次"意味着第一次击中,第二次和第三次都未击中同时发生,所以事件"只击中第一次"可表示为 $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$.

(2) 事件"只击中一次"并不指定哪一次,三个事件"只击中第一次"、"只击中第二次"、"只击中第三次"中任意一个发生,都意味着事件"只击中一次"发生 而且,上述三个事件是两两互斥的,所以事件"只击中一次"可表示为 $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$

(3) 事件"三次都未击中"意味着"第一次、第二次、第三次都未击中"同时发生,所以它可以表示为 $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$

(4) 事件"至少击中一次"意味着三个事件"第一次击中"、"第二次击中"、"第三次击中"中至少有一个发生,故它可表示为 $A_1 \cup A_2 \cup A_3$,也可表示为 $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3 + A_1A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2A_3 + A_1A_2A_3$.

第二节 概率的定义

一个随机事件在一次试验中可能发生,也可能不发生,虽然我们在试验前不能确定它到底会不会发生,但是我们希望能够知道事件出现的可能性大小,并且希望用数来刻划这种可能性.用来刻划事件发生可能性大小的数,我们称其为事件发生的**概率**,在概率论发展初期,概率是用频率来定义的,这种定义被称为概率的统计定义.它的优点是比较直观,但是,通过频率来求概率,需要做的试验次数多,费时、费力、费财,并且不严格,也不利于理论上的推广.概率的另一个定义就是柯尔莫哥洛夫给出的公理化定义

定义 2.1 对于随机试验 E,随机事件 A 在一次试验中可能出现也可能不出现 在相同的条件下重复试验 n 次,观察事件 A 出现的次数 r,则称 $f_n(A) = \frac{r}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**

定义 2.2(概率的统计定义) 在相同条件下重复进行 n 次试验,当 n 很大时,事件 A 发生的频率在一个常数附近摆动,并且随着 n 的增大,这种摆动"大致上"越来越小,我们称这个常数为事件 A 的**概率**,记为 $P(A)$

概率的统计定义虽然很直观,但有理论上和应用上的缺点,不利于推广 我们希望能给出概率的一个一般性的定义,为此,我们先看一下频率具有什么性质

事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 的性质:

(1) $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$;

(2) $f_n(\Omega) = 1, f_n(\varnothing) = 0$;

(3) 若 $AB = \varnothing$,则 $f_n(A + B) = f_n(A) + f_n(B)$.

根据频率的性质及概率的统计定义,我们给出下面的公理化定义,使得它既可包括前面的特殊情况,又具有更广泛的一般性

定义 2.3(概率的公理化定义) 设 E 是一个随机试验,Ω 是基本事件空间,对于任意事件 $A \subset \Omega$,定义一个实的集函数 $P(A)$,它满足下面三条公理:

(1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

(2) $P(\Omega) = 1$;

(3) 对于可列个两两互斥的随机事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$,有

$$P(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n \ 1}^{\infty} P(A_n)$$

则称 $P(A)$ 为**事件 A 发生的概率**

由概率的公理化定义可得如下的性质：

性质 1　$P(\varnothing) = 0$

证　因为 $\Omega = \Omega \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots$，且 $\Omega, \varnothing, \cdots$ 两两互斥，由公理 3 知 $P(\Omega) = P(\Omega) + P(\varnothing) + P(\varnothing) + \cdots$，又由公理 2 知 $P(\Omega) = 1$，故 $P(\varnothing) = 0$

性质 2(有限可加性)　设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互斥的事件，则

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

证　令 $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \varnothing$，由公理 3 和性质 1 知结论成立

性质 3　对任意事件 A，有 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

证　由 $\Omega = A + \bar{A}$ 知 $P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) = 1$，得证

性质 4　若 $A \subset B$，则 $P(B - A) = P(B) - P(A)$

证　因 $B = A \cup (B - A)$ 且 $A(B - A) = \varnothing$，故

$$P(B) = P(A + (B - A)) = P(A) + P(B - A),$$

从而

$$P(B - A) = P(B) - P(A).$$

性质 5　$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

证　因 $A \cup B = A + (B - AB)$，故有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

性质 6　若 $A \subset B$，则 $P(B) \geqslant P(A)$

证　由 $P(B - A) \geqslant 0$ 和性质 4 可证.

注　性质 5 可推广到 n 个事件的并的情形，如三个事件的并的概率为

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC).$$

例 2.1　某厂有两台机床，机床甲发生故障的概率为 0 1，机床乙发生故障的概率为 0 2，两台机床同时发生故障的概率为 0.05，试求：

(1) 机床甲和机床乙至少有一台发生故障的概率；

(2) 机床甲和机床乙都不发生故障的概率；

(3) 机床甲和机床乙不都发生故障的概率

解　令 A 表“机床甲发生故障”，B 表“机床乙发生故障”，则

$$P(A) = 0\ 1,\quad P(B) = 0\ 2,\quad P(AB) = 0\ 05$$

(1) $A \cup B$ 表“机床甲与机床乙至少有一台发生故障”，故

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0\ 1 + 0\ 2 - 0\ 05 = 0\ 25;$$

(2) $\bar{A}\bar{B}$ 表“机床甲与机床乙都未发生故障”，故

$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1\quad 0\ 25 = 0.75;$$

(3) $\overline{AB}$ 表“机床甲与机床乙不都发生故障”，故

$$P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - 0.05 = 0.95$$

第三节　古典概型和几何概型

3.1　古典概型

古典概型是概率论发展过程中最早被研究的概率模型。它的计算公式虽然简单，但是许多类型的问题的概率计算却比较困难且富有技巧。对于初学者来说，困难在于对随机试验的内容理解不准确以及对排列组合掌握得不牢。

定义 3.1　称满足下列条件的概率问题为**古典概型**，也称为**等可能概型**：

(1) 所有可能结果只有有限个，即样本空间只含有有限个基本事件；

(2) 每个基本事件发生的可能性是相同的，即等可能发生。

设 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$，$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \cdots, \omega_{i_k}\} \subset \Omega$，由古典概型的定义可知 $P(\omega_i) = \dfrac{1}{n}, i = 1,2,\cdots,n$。从而 $P(A) = P(\omega_{i_1}) + \cdots + P(\omega_{i_k}) = \dfrac{k}{n}$。于是可得古典概型的计算公式为

$$P(A) = \frac{A\text{ 所含的基本事件个数}}{\Omega\text{ 所含的基本事件个数}}$$

此公式只适用于古典概型，因此在使用此公式前要正确判断你所建立的样本空间是否属于古典概型，即样本空间所含基本事件个数是否有限，每个基本事件是否等可能出现。例如，掷骰子试验，由于骰子是质地均匀的正六面体，所以各点数为 1,2,3,4,5,6 这六个面是等可能出现的。若骰子不是正六面体而是一个长方体，则这些面出现就不是等可能的。对于同一个试验，可以建立不同的样本空间，它可能属于古典概型，也可能不属于古典概型。例如，袋中装有大小相同的 4 个白球和 2 个黑球，分别标有号码 1,2,3,4,5,6，从中任取一球，若根据取到球的号码建立样本空间 $\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$，显然，它是属于古典概型的；若根据取到球的颜色建立样本空间 $\Omega_2 = \{$黑，白$\}$，则它不是古典概型问题，这是因为基本事件不是等可能出现的。

例 3.1　设有 4 个人都以相同的概率进入 6 间房子的每一间，每间房子可容纳人数不限，求下列事件的概率。

(1) A：“某指定的 4 间房中各有一人”；

(2) B：“恰有 4 间房子各有一人”；

(3) C：“某指定的一间房中恰有 k 人”($k = 1,2,3,4$)。

解　由于每人都可以进入 6 个不同的房间，且每个房间可容纳人数不限，

故 4 个人进入 6 个房间总共有 6^4 种方法，即样本空间所含基本事件个数为 6^4

(1) 因指定的 4 间房只能各进 1 人，因而第一人可以有 4 种选择，第二人只能选择剩下的 3 个房间，第三人有 2 种选择，第四人只有一种选择，故 A 包含的基本事件数为 $4!$. 所以

$$P(A)=\frac{4!}{6^4}$$

(2) 与(1)不同的是 4 间房没有指定，可以从 6 间房任意选出 4 间，有 C_6^4 种方法，所以事件 B 包含有 $C_6^4 4!$个基本事件 所以

$$P(B)=\frac{C_6^4 4!}{6^4}$$

(3) 要使指定房间恰有 k 人，只需从 4 个人中先选 k 人进入此房间，共有 C_4^k 种方法，其余$(4-k)$人任意进入其它 5 间房有 5^{4-k} 种进入法，故事件 C 包含的基本事件数为 $C_4^k 5^{4-k}$，所以

$$P(C)=\frac{C_4^k 5^{4-k}}{6^4}$$

注　此例题是一个古典概型典型问题的特殊情形，它的一般模型是：将 n 个球放入N个盒子中$(n\leqslant N)$，假设每个球都等可能地放入每个盒中，且每个盒子放入的球数目不限，则 $A=\{$某指定的 n 个盒子中各有一球$\}$ 的概率为 $P(A)=\frac{n!}{N^n}$，$B=\{$恰有 n 个盒子，其中各有一球$\}$ 的概率为 $P(B)=\frac{C_N^n n!}{N^n}$，$C=\{$某指定的一个盒子中有 m 个球$\}$ 的概率为$\frac{C_n^m(N-1)^{n-m}}{N^n}$ 许多实际问题都可以归结为这种典型模型，如3封信放入5个邮筒中，5只鸡放入10个笼子等. 希望通过这个例题的学习掌握此类古典概型的概率计算方法，达到举一反三的效果

例 3.2　十个号码 1,2,…,10 装于一个袋中，从中任取 3 个，问大小在中间的号码恰为 5 的概率

解　从十个号码中任取三个，共有 C_{10}^3 种取法，而三个数中，要想大小在中间的号码恰为5，必须一个小于5，一个等于5，一个大于5，这样的取样有 $C_4^1C_1^1C_5^1$ 种，所以所求的概率为

$$P=\frac{C_4^1C_1^1C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$$

上例更一般的提法是：一个袋中有 n 个球，其中 n_1 个标有号码“1”，n_2 个标有号码“2”，…，n_k 个标有号码“k”，$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$. 今从中任取 m 个球，求恰有 m_j 个标号为“j”的概率，$j=1,2,\cdots,k$，且 $m_1+m_2+\cdots+m_k=m$ 同理可得所求概率为

$$P=\frac{C_{n_1}^{m_1}C_{n_1}^{m_1}C_{n_2}^{m_2}\cdots C_{n_k}^{m_k}}{C_n^m}$$

上式称为超几何概率,实际问题中的许多问题都可以利用这一模型

例 3.3 100台同型号的电视机中,有40台一等品,60台二等品 从中任取3台,在下列两种抽取方法中求事件 $A=\{3$ 台都是二等品$\}$ 和事件 $B=\{2$ 台一等品,1 台二等品$\}$ 的概率

(1) 每次只抽取一台,检查后放回,然后再取下一台(这种抽取方法称为有放回抽样);

(2) 每次抽取一台,检查后不放回,在剩下的电视机中再取下一台(这种抽取方法称为无放回抽样)

解 (1) 有放回抽样情形

由于是有放回抽样,每次抽取都有 100 种选择,故从 100 台中抽取 3 台有 100^3 种可能方法,即样本空间总共含有 100^3 个基本事件,而 A 表示取得的 3 台都是二等品,它只能从 60 台二等品中取,共有 60^3 种取法,故

$$P(A)=\frac{60^3}{100^3}=0\ 216$$

B 表示 2 台一等品,1 台二等品,故有 2 台是从 40 台一等品中取,1 台从 60 台二等品中取,由于样本空间的建立考虑了顺序问题,所以 B 也应考虑 2 台一等品是在第一、二、三次抽取中的哪两次中取得,故 B 含有 $C_3^2\times 40^2\times 60$ 个基本事件,从而

$$P(B)=\frac{C_3^2\times 40^2\times 60^3}{100^3}=0\ 288$$

(2)无放回抽样情形

由于是不放回抽取,当从 100 台中取走一台之后,第二次只能从剩下的 99 台中取,第三次只能从 98 台中取,所以基本事件总数 $n=100\times 99\times 98=P_{100}^3$,同理 A 所含基本事件数为 $k=60\times 59\times 58=P_{60}^3$,所以

$$P(A)=\frac{P_{60}^3}{P_{100}^3}\approx 0\ 212$$

同样事件 B 包含的基本事件数为 $k=C_3^2P_{60}^1P_{40}^2$,所以

$$P(B)=\frac{C_3^2P_{60}^1P_{40}^2}{P_{100}^3}\approx 0\ 288$$

一般地,有放回抽样与无放回抽样所得的概率不同,特别是在抽取的对象数目不大时更是如此 但是,当抽取对象的数目较大时,有放回和无放回抽取所得的结果相差甚微,在实际应用中,人们经常利用这一点,把不放回抽样当作有放回抽样来处理,为解决实际问题带来许多方便

3.2　几何概型

古典概型是在试验结果的出现是等可能的情形下研究事件发生的概率. 但是它要求试验的结果必须是有限个,对于试验结果是无穷多个的情形,古典概型就无能为力了 为了克服这个局限性,我们仍然以基本事件等可能为基础,把研究的范围推广到试验结果有无穷多个的情形,这就是所谓的几何概型问题.

设某一随机试验的样本空间是欧氏空间的某一区域 Ω(Ω 可以是一维空间的一段线段,二维空间的一块平面区域,三维空间的某一立体区域甚至是 n 维空间的一区域),基本事件就是区域 Ω 内的一个点,且在区域 Ω 内等可能出现. 设 A 是 Ω 中的任一区域,基本事件落在区域 A 的概率为

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

其中 $\mu(\cdot)$ 表示度量(一维空间中是长度,二维空间中是面积,三维空间中是体积等等)

例 3.4　在时间间隔 $(0,T)$ 内的任何瞬间,两个不相关的信号均等可能进入收音机,当且仅当这两个信号进入收音机的时间间隔不大于 t 时,收音机才受到干扰,求收音机受到干扰的概率

解　以 x 和 y 分别表示两个信号进入收音机的瞬间时刻,由假定知 $0\leqslant x\leqslant T$,$0\leqslant y\leqslant T$,则样本空间是由点构成的边长为 T 的正方形 Ω,其面积为 T^2,如图1 2所示 依题意,收音机受到干扰的充要条件是 $|x-y|\leqslant t$,即如图1.2中的区域 A,这个区域位于区域 Ω 内直线 $x-y=t$ 和 $x-y=-t$ 之间,其面积为 $T^2-(T-t)^2$,由几何概率的定义知所求概率为

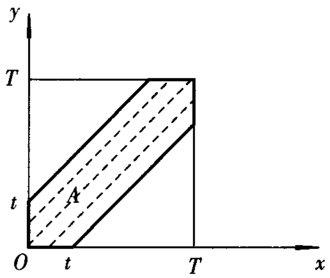


图1 2

$$P=\frac{T^2-(\Gamma-t)^2}{T^2}=1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^2$$

第四节　条件概率与全概率公式

4.1　条件概率

在许多实际问题中,除了要求事件 B 发生的概率外,还要求在已知事件 A 已经发生的条件下,事件 B 发生的概率,我们称这种概率为 A 发生的条件下 B 的条件概率,记为 $P(B|A)$.