中学生精典文库

初等数学解题方法研究

欧阳维诚 编著

湖南教育出版社

中学生精典文库

初等数学解题方法研究

欧阳维诚 编著

湖南教育出版社

初等数学解题方法研究

欧阳维诚　著
责任编辑：孟实华

湖南教育出版社出版发行
湖南省新华书店经销　常德滨湖印刷股份有限公司印刷

850×1168毫米　32开　印张：10　字数：260000
1985年8月第1版　1998年11月第2版第2次印刷
印数：9001--12000

ISBN7－5355－2569－5/G·2564
定价：12.00元

前　言

怎样提高中学生解数学题的能力而又不增加他们的负担，已经是中学数学教育中一个日益引起人们重视的课题．众所周知，在中学阶段，解数学题常常花费广大师生大量的时间与精力．为了训练提高中学生的解题能力，教师常常要让学生多作各种类型的练习题．"熟读唐诗三百首，不会吟诗也会吟．"熟能生巧，这当然有一定的效果．但是，数学题的变化无穷，而中学生的精力有限，还要学习许多别的功课，光凭"题海战术"，必然造成中学生负担过重，结果往往事与愿违．因此，中学生在加强数学基础知识和基本技能训练的同时，还必须读一点解题方法之类的参考读物，学一点方法论，双管齐下，才能收到事半功倍的效果．我国明朝著名学者徐光启说过："人具上资而意理疏莽，即上资无用；人具中材而心思缜密，则中材有用．"可见正确的思维方法对提高解题能力的重要性．

近年来，国外许多师范学院的数学系都陆续为学生开设了"解题演习"之类的课程，讲授初等数学的解题方法，以提高这些未来的中学数学教师的解题能力，使他们在自己今后的教学工作中能作出良好的示范，对学生起潜移默化的作用．另一方面，各国都出版了不少"解题方法"之类的参考读物．过去，中学数学教科书和习题集，一般都只有现成的解题程序，而把人们如何迂回曲折，摸索发现这些解题方法的思维过程省去了．至使一般读者只能看懂解答，却很难知道别人所用的方法是怎么想出来的．要举一反三而得

不到启发,要触类旁通而理不出头绪.如果能有一些课外读物,比较系统地、全面地总结一下初等数学解题的普遍技巧和思考方法,对广大中学生及自学者是大有助益的.因此,作者不揣浅陋,参阅百家的意见,结合千虑之一得,融会贯通,编辑成书,希望能起抛砖引玉的作用.

本书主要是向希望进一步提高解题能力的中学生们讲述一些解题的一般方法.全书共分五章:第一章是引论,讲述解数学题的一般要求;第二章介绍怎样审题;第三章研究怎样转化论题,使它变为易于处理的类型;第四章论述了各种常用的行之有效的探索解题途径的方法;最后一章谈谈怎样总结解题经验(此次重印增加了第五章,介绍了数学解题中的几个常用原理,原来的第五章仍为最后一章.——作者),全书着重于一般方法的研究而不是个别技巧的罗列.目的在于开拓学生的解题思路和培养学生的分析综合能力,希望能起到"锻炼思想的体操"的作用.全书是一个有机的整体,但各章节又是相对独立的,读者可根据自己的实际情况略去其中的某些部分(自己一时还难于理解的或已经比较熟悉的).所举例题(有些选自国内外一些数学竞赛试题)虽然都属于初等数学的范畴,但解决这些问题的思考方法对解一些高等数学的习题也是适用的.书中大多数例题都详尽地分析了思考方法却很少写出完整的解答过程,以便给读者留下一点思考的余地,作为练习去自己完成.每节后附有一定份量的习题,希望读者努力独立地完成,因而没有附给答案.

本书可作为中学生第二课堂读物,也可作为数学竞赛的培训材料,还可作为中学数学教师、师范院校数学专业的学生以及自学青年的参考书.

由于作者水平不高,经验缺乏,书中一些问题的提法和例题的分析都可能出现疏忽和错误,我们衷心地等待着指正和帮助.

作　者

1984年盛夏于长沙

目　录

第一章　绪论

纸上得来终觉浅，
绝知此事要躬行。
——陆　游

同学们几乎每天都要解数学题，不仅在学校里为获取知识要解题，将来升学或就业也往往要由解题（考试）来决定自己的"命运".许多同学尽管对数学课本上的公式、定理能倒背如流，但一碰上构思巧妙，不拘于现成格式的数学题目（例如国内外数学竞赛试题，高考的压台题等）就感到束手无策，连入门之径都找不到，白白地绞尽脑汁，浪费时间.但当老师或同学把解法告诉你时，你就会恍然大悟："啊！原来如此！这些方法我都知道，为什么我当时就没有想到呢？你是怎么想出来的？"因此，大家都迫切希望提高自己的解题能力.每一道较难的数学题都或多或少有一些障碍，本书的目的就是要帮助你发现这些障碍并找出克服它的办法.即使你最终未必能彻底解决这个问题，或者解决了而方法未必是最好的，但总可以找到一些入门的道路，不致于望题兴叹，一筹莫展.

§1. 提高解题能力的基本条件

怎样才能提高我们的解题能力？这不是一个三言两语就能使人得到满意回答的问题.一般地说，提高解题能力必须具备四个条件：

一、建立明确的基本概念；

二、掌握熟练的基本技能；

三、学会正确的思维方法；

四、养成良好的解题习惯.

也就是我们通常所说的“狠抓双基，培养能力”的意思.

首先，解题时对题中涉及的数学概念以及与这些概念紧密相关的定义、定理、公式、法则等都必须是明确的，清楚的.否则，解题时就只能瞎摸乱碰，或张冠李戴，似是而非；或缘木求鱼，离题万里.

其次，要熟练地掌握一些基本的论证方法和运算技巧.如数学归纳法，待定系数法，反证法等证明方法；因式分解，布列和解方程，三角恒等变换等基本技能.因为任何一个难题的解决，最后总还是要落实到运用一些基本方法，基本技能上去.没有这些基本功，解题时就会感到头重脚轻，根底浅薄，有力不从心之叹.

一、二两条都是要求我们掌握基础知识的，离开基础知识而侈谈提高解题能力是毫无意义的.但即使有了一定的基础知识和基本技能，也只是具备了解题的必要条件，要顺利地解题，还必须有正确而开拓的思维方法.对于那些难度较大，综合性较强，不拘于现成格式的数学问题，例如国内外中学生数学竞赛的某些试题，仅仅具有基础知识和基本技能，仍然是无能为力的.这就要求我们善于思考，或如俗话所说的要具有数学头脑.

最后，我们还要养成良好的解题习惯.首先要注意总结解题的经验，每解一题，都要争取得到尽可能多的收益.数学家波利亚说过：“一个大的发现可以解决一个大的问题，但在解决任何一个问题里都有一点点发现.”数学家之所以能解决一些大的问题，恰恰是“一点点发现”日积月累的结果.我们若能在解题中注意积累“一点点发现”，从量变到质变，慢慢地就可以培养出一种善于思考问题和解决问题的能力.另外，解题时还要注意逻辑的严密性和运算的准确性，力戒粗枝大叶的作风.我们不乏这样的经验：解题时由于粗心大意，算错一个数据或写错一个符号而使解题无法继续下

去,为山九仞,功亏一篑;或者弄错一个条件而导致荒唐的结论,差之毫厘,谬以千里.这都是提高解题能力的大敌.

§2. 研究解题方法的主要内容

本节主要介绍解题方法的几个重要环节:解题的步骤;探求解题思路的程序;提高解题能力的过程;总结解题经验的方法等等.

1. 解题步骤

大体上说,可以把解数学题的一般过程分为以下几个步骤:

第一步　仔细审查题意,发掘概念内涵;

第二步　比较分析条件,探求解题途径;

第三步　综合运用知识,进行推理计算;

第四步　回顾解题过程,总结解题经验.

审题是解题的起点,也是解题中最主要的一环,初等数学题目变化无穷,一道题中可能涉及各种各样的数学概念.在审题时首先要弄清这些概念的含义,然后分清哪些是已知的条件,哪些是要证的结论.还要做一些变形转化,疏通条件之间的相互关系等工作,使问题转化为比较容易处理的形式.有关这方面的方法与技巧,将在第三章中论述.

审题之后,紧接着就是探索解题的途径.这是关系到解题成败的最重要一环.本书在第四章中,比较详细地论述了各种探索解题思路的方法,它是打开解题之门的钥匙.有效地掌握和运用这些方法,需要更多的技巧和经验,是知识与能力的集中反映.

找到正确的解答途径之后,就进入第三步——正式解题.前两步是思考、分析过程,虽然很重要,但一般都不要求正式写出来.第三步是解题时要写出的一步.书写有一定的格式,必须逻辑严谨,层次分明,语言通顺,详略恰当,计算准确,图形规范.本书的例题绝大部分只有第一、第二两步分析思考的内容,而很少写出第三步

所要求的解答，这是为了给读者留下一点思考和练习的余地．

解完一题之后，我们还要强调加上总结经验这一步．千万不要以为一个题目解出来了就万事大吉，这样很难提高我们的解题能力，许多中学生还不习惯于总结解题经验，后面我们将专辟一章谈谈这个问题，对读者也许会有所裨益．

现在，我们来看一个解题的例子：

例 1 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 作倾角为 θ 的直线，交抛物线于 A、B 两点，试求线段 AB 的长 l．当 θ 为何值时，l 取得最小值?

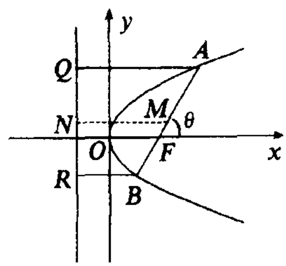

图 1－1

解题的步骤如下：

第一步 仔细审查题意．

这一步要求彻底弄清题中所涉及的一些概念，以及由这些概念直接导出的一些简单结果：

审 查 题 意	涉及的基本知识
1．画出正确的图形如图 1—1．	1．抛物线及其图形的概念．
2．设焦点的坐标为 $\left(\frac{p}{2},0\right)$，倾角 $\angle AFx=\theta$	2．焦点的概念，倾角的概念．
3．AB 直线的方程可用点斜式表示出来．	3．直线方程的概念，点斜式的概念．
4．求抛物线与直线 AB 的交点坐标．	4．两曲线的交点的概念．
5．A、B 的距离 l 可表为 θ 的函数：$l=f(\theta)$．	5．距离的概念，距离公式．
6．求 $f(\theta)$的最值．	6．最值的概念．

至此，审题这一步骤基本结束．由于本题比较简单，涉及的基本概念虽然不少，但只要象上面那样仔细审清题意之后，解题的思路也自然出来了，无须再做更多的探索，便得到下面的解题思路．

第二步　探求解题思路.

现在就可根据审题的结果,设计出下面的解题计划:

解　题　思　路	涉及的基本技能
1. 写出直线 AB 的方程.	1. 建立直线方程(点斜式)的技能.
2. 解由直线 AB 和抛物线方程联立而得的方程组,求交点 A、B 的坐标.	2. 解含有参数系数的二元二次联立方程组的技巧.
3. 利用距离公式把 AB 的长 l 表为 θ 的函数.	3. 运用距离公式以及开方、化简等技能.
4. 根据 l 的表达式求最值.	4. 求最值的方法(配方、判别式、导数等).

按照上述解题思路一步步做下去,只要两个表中涉及的基本概念和基本技能我们都已掌握,而且在论证和运算过程中不发生其它(非概念性的)错误,就一定能得出正确的答案.当以上两步在思想上酝酿成熟之后,即可进行论证和计算,这是需要清楚地写出的一步.

解　焦点 F 的坐标为 $\left(\frac{p}{2},0\right)$,直线 AB 的斜率为 $k_{AB}=\operatorname{tg}\theta$.故 AB 所在直线的方程为:

$$y=\operatorname{tg}\theta\left(x-\frac{p}{2}\right) \tag{1}$$

将(1)与抛物线 $y^2=2px$ 的方程联立:

$$\begin{cases} y=\operatorname{tg}\theta\cdot\left(x-\dfrac{p}{2}\right), & (1)\\ y^2=2px, & (2)\end{cases}$$

解之,得 A、B 两点的坐标分别为:

$$A\left(\frac{p(\cos\theta+1)^2}{2\sin^2\theta},p(\operatorname{ctg}\theta+\csc\theta)\right),$$

$$B\left(\frac{p(\cos\theta-1)^2}{2\sin^2\theta},p(\operatorname{ctg}\theta-\csc\theta)\right).$$

代入距离公式并化简后,即得 AB 的长为

$$l=\sqrt{\left[\frac{p(\cos\theta+1)^2-p(\cos\theta-1)^2}{2\sin^2\theta}\right]^2+}$$

$$\sqrt{[p(\operatorname{ctg}\theta+\csc\theta)-p(\operatorname{ctg}\theta-\csc\theta)]^2}=\frac{2p}{\sin^2\theta}.$$

由于 $2p$ 为定值,故当 $\sin\theta=1$ 时,即 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时,l 有最小值 $2p$,解完.

现在,我们来回顾一下解题过程,就会发现,上述解法的思路虽然很直,易于想到;但是解方程组和求距离时的计算却是比较麻烦的.这个解法是否算得上好的解法?如果不算,还有哪些解法?寻找新的解法从何入手?关键问题是寻找 AB 的长度 l 的新的表示方法.于是我们回过头来,重新审查题意.

重新审查题意	**涉及的基本概念**
1. 因 AB 经过焦点 F, $\lvert AB\rvert=\lvert AF\rvert+\lvert FB\rvert$ 易见:$\lvert AF\rvert=\lvert AQ\rvert$,$\lvert FB\rvert=\lvert BR\rvert$.	1. 抛物线的定义.
2. $AQRB$ 为一梯形,设 MN 为中位线,则 AB 的长 $l=2MN$.	2. 梯形的概念,梯形的基本知识.
3. MN 的长度即等于 M 的横坐标 x 加上 $\frac{p}{2}$.	3. 准线的性质,距离的概念.
4. M 为 AB 中点,其坐标可以求得.	4. 中点公式.

于是,便得到了第二种解题思路:

解　题　思　路	涉及的基本技能
1. 写出 AB 所在直线的方程.	1. 建立直线方程(点斜式)的技能.
2. 将 AB 的方程与抛物线的方程联立,消去 y,化为 x 的方程.	2. 求交点坐标的基本知识;解方程组的(代入、加减、比较等)消元法.
3. 利用韦达定理定出 AB 的中点 M 的坐标 x_0.	3. 求中点坐标的方法,韦达定理的应用.
4. 根据 $l=x_0+\dfrac{p}{2}$,求 l 的最小值.	4. 求最值的方法.

根据第二种思路,可得另一种解法.

第三步　进行推理计算.

解　焦点 F 的坐标为 $\left(\dfrac{p}{2},0\right)$,$AB$ 所在直线的斜率

$k_{AB}=\mathrm{tg}\theta$,故 AB 所在直线的方程为:

$$y=\mathrm{tg}\theta\cdot\left(x-\frac{p}{2}\right), \tag{1}$$

与抛物线的方程联立,得方程组:

$$\begin{cases} y^2=2px, \\ y=\mathrm{tg}\theta\cdot\left(x-\dfrac{p}{2}\right), \end{cases} \tag{2}$$

消去 y,得

$$\mathrm{tg}^2\theta\cdot x^2-(2p+p\,\mathrm{tg}^2\theta)x+\frac{p^2\mathrm{tg}^2\theta}{4}=0. \tag{3}$$

设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$为方程组(2)的两曲线的交点,则由韦达定理:

$$x_1+x_2=\frac{2p+p\,\mathrm{tg}^2\theta}{\mathrm{tg}^2\theta}. \tag{4}$$

过 A、B 分别向抛物线的准线作垂线 AQ 和 BR,垂足为 Q、R(图 1—1),则依抛物线定义有:

$$l=|AB|=|AF|+|FB|=|AQ|+|BR|$$

$$= \left(x_1 + \frac{p}{2}\right) + \left(x_2 + \frac{p}{2}\right) = (x_1 + x_2) + p$$

$$= \frac{2p + p\mathrm{tg}^2\theta}{\mathrm{tg}^2\theta} + p = \frac{2p}{\sin^2\theta}.$$

因 $0 < \sin^2\theta \leqslant 1$, $2p$ 为定值.故当 $\theta = \frac{\pi}{2}$时,有

$$l_{最小} = 2p.$$

题目至此虽已解完,但我们还要认真总结一下经验.

第四步　总结解题经验.

本题虽然是一个十分简单的解析几何题,但善于解题的同学也会从中获得一些有益的经验.例如:

1. 我们在解几何题时容易出现一种偏向:一旦把几何问题代数化之后,往往忽视几何图形本身的作用而只在代数运算上下功夫,常使一些本来很简单的几何性质的导出,也要进行复杂的计算.本例的第一种解法就有这个缺点,因而是不足取的;解法二注意形数结合,使计算大为简化,并且更能揭露问题的实质.因而解法二要好一些.

2. 韦达定理在解析几何中有广泛的应用,例如在本题中求两曲线的交点的中点坐标时,就不必解方程.

如果我们在学习解析几何时注意总结这些解题经验,并注意积累资料.你就一定能写出一两篇很有份量的学习心得或"小论文",例如《在解析几何解题中怎样减少计算量》,《韦达定理在解析几何中的应用》等题目.

2. 探索程序

如前所述,在解题步骤中,探索解法是最关键的一环.让我们分析一下,中学生是通过怎样的程序来寻找解题思路的.一般地说是这样做的:仔细审查题意之后,分清条件和结论,尽量发掘题目中涉及的一些概念的内涵.接着就考虑这个问题能否归结为某种我们已经熟悉其解法的类型,向那种类型靠拢.如果把问题直接归