

新课标初中数学

第一模块教材

Han Shu Si Xiang

Ji Qi Ying Yong

函数思想 及其应用

总主编：毛文凤

本册编著：陈小红 尤国兴 周敏泽

Han Shu Si Xiang
Ji Qi Ying Yong



中国大百科全书出版社

课标初中数学模块教材

函数思想及其应用

《新课标数学模块教材》丛书编委会

总主编:毛文凤 博士

执行主编:李君华 教授

执行副主编:肖柏荣(江苏教育学院数学系教授,江苏省中学数学教学专业委员会副理事长)

袁 桐(扬州新东方中学数学特级教师,江苏省名教师)

周敏泽(常州高级中学数学特级教师,全国模范教师)

徐沥泉(无锡市教学研究中心数学特级教师,全国数学学科方法论研究中心常务副主任兼秘书长)

丛书编委:	李君华	肖柏荣	袁 桐	周敏泽	徐沥泉
	刘云章	马永培	朱平天	杨润生	葛福生
	周冠廷	孙志人	刘国祥	何继刚	卫 岗
	蔡伟元	周公贤	刘威伯	顾曼生	管义桂
	顾继玲	方彩云	张新华	陈小红	徐德同

本册编著:陈小红(江苏省常州高级中学高级教师)

尤国兴(江苏省常州高级中学一级教师)

周敏泽(江苏省常州中学数学特级教师,全国模范教师)

中国大百科全书出版社

总编辑:徐惟诚

社 长:田胜立

图书在版编目(CIP)数据

函数思想及其应用/毛文凤主编.-北京:中国大百科全书出版社,2005

新课标初中数学模块教材

ISBN 7-5000-7229-5

I.函... II.毛... III.数学课—初中—教学参考资料

IV.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 142234 号

策划设计:可一图书 (<http://www.keyibook.com>)

责任编辑:简菊玲

新课标初中数学模块教材

函数思想及其应用

* * *

中国大百科全书出版社出版

全国新华书店经销

<http://www.ecph.com.cn>

北京阜成门北大街 17 号 邮编:100037 电话:010-88390797

山东省沂源县教育印刷厂

* * *

2005 年 7 月第 1 版 2005 年 7 月第 1 次印刷

890×1240 毫米 32 开本 10 印张 177 千字

ISBN 7-5000-7229-5/G·827

定 价:14.00 元

序

李君华

普通中学数学课程标准的颁布引发了一场教学内容的大改革。与时俱进地审视数学课程教学的内涵,已成为人们关注的问题。人们开始正视传统的教材构成、传统的教学模式、传统的评价标准所产生的负面影响——学生缺乏学习数学的兴趣。

本模块教材系列的编写其旨意就是要在纷繁杂乱的数学读物中,编出一套能体现数学独特的知识和能力、历史和人文、情感和价值观的数学用书,从而最大限度地调动学生对数学的兴趣。数学作为一门科学,应注重概念清晰、计算正确、论证有据;数学作为一种文化,应让人在数学读物中体会到它的文化价值。因此适当地介绍数学文化的演绎过程及它对推动社会发展的作用与展望它的发展趋势是十分必要的,是符合新课标理念的。当然,归根结底,针对中学生的任一数学读物都是有着教育功能的,在这套模块教材中我们特别着重做到三个结合:适度的形式化与启发兴趣形式相结合,发展学生的思维能力与增强数学的应用能力相结合,掌握扎实的基础知识与拓展数学视野、培养创新精神相结合。

纵观每一分册的写作均分三个层次：第一层次为引论，背景资料、数学史话、名人轶事或自撰小品等简洁地勾画出通往所述数学模块专题内容的千年路径或近代畅想，使读者产生“登高望远”的感觉或“源远流长”的体会。第二层次为主体构架，与新课程相伴，通过解惑的方式，深入浅出地讲解数学，着重思维训练、方法积累与能力提高。第三层次为提高延伸部分，与新课标的选修内容（指高中）相配合，这是特地为对数学有浓厚兴趣的青少年朋友安排的，希望同学们能喜欢它。

这三个层次，在本系列丛书不同的模块分册中，有的是以章节为标志，层次分明、一目了然，有的则是溶于章节之中相互渗透、各显特色。

这次参与丛书编写的作者，集中了目前数学普通教育的一些著名专家教授和教学一线的顶尖教师，尽管他们的认真负责精神和专业能力是毋庸置疑的，但由于编写时间仓促及作者对数学新课标的认识和实践水平有限，丛书在编写过程中难免有不足和疏漏之处，恳请广大读者批评指正。

（作者系南京师范大学数科院教授）

前 言

随着课程改革的不断深入和新课程标准的实施,广大教师和同学需要弄清许许多多学习和复习方面的问题,也需要掌握更科学、更有效的学习和复习方法,以利于提高学习质量,培养学科综合素质。

函数是初中数学的重要内容之一,函数的基础知识在数学和其他许多学科中有着广泛的应用;函数的概念是运动变化和对立统一等观点在数学中的具体体现;函数的概念及其反映出的数学思想方法已广泛渗透到数学的各个领域。本书是“初中数学模块教材”系列丛书之一,立足于新教材、新课标,以通过问题学数学的方式,深入浅出、形式活泼地讲数学,重视思维训练和方法积累。立意高远,选题经典,以能力发展为核心,使解题思维训练成为课堂教学的自然延伸和高层次发展。

本书主要从基本函数出发,研究函数思想及其应用,所选的例题和习题均为近年全国各地中、高考数学试题。通过“兴趣引入”,理论结合问题阐述函数思想,注重思维训练

与方法整理、积累。全书共分五章,除第一章外,每章均设立“兴趣引入”,每节均有“典型例题”和“习题”,每章结尾有一至两组总习题。其中例题部分设立了“思路点拨”、“解法”、“思维误区”和“举一反三”四个栏目,力争使读者触类旁通、举一反三,熟谙函数解题方法,提高数学思维能力。

书越学越薄,接受知识由难到易,通过本书你可以深刻领悟其中的内涵,领悟轻松学好函数的奥秘,并轻松地掌握函数思想,以点带面,推而广之。

由于编者的经验和水平有限,书中的疏漏和错误在所难免,敬请广大师生批评指正。

编者

目 录

第一章 引 论	(1)
第二章 直角坐标系与函数	(7)
§ 1 平面直角坐标系	(8)
§ 2 生活中的轴对称	(25)
§ 3 函 数	(37)
总习题二	(61)
第三章 一次函数	(65)
§ 1 一次函数的图像和性质	(66)
§ 2 一次函数的实际应用	(98)
总习题三	(122)
第四章 二次函数	(127)
§ 1 二次函数的图像	(128)
§ 2 二次函数的性质	(143)
§ 3 二次函数的解析式	(166)
§ 4 二次函数综合应用	(177)
总习题四(1)	(218)
总习题四(2)	(221)

第五章 反比例函数..... (225)

§1 反比例函数的图像和性质 (225)

§2 反比例函数的解析式及其综合应用 (245)

总习题五(1) (265)

(1) 总习题五(2) (268)

综合练习一..... (271)

综合练习二..... (275)

参考答案..... (281)

第一章 引 论

朋友,你知道什么是函数吗?函数在我们中学阶段的数学学习中有怎样的地位?函数知识在我们的现实生活中又有多少应用?让我们走近函数,了解函数概念的形成和发展的历史,明确函数的定义、图像和性质以及基本初等函数(如一次函数、正比例函数、反比例函数、二次函数)的概念、图像和性质,并能用学到的函数知识解决实际生活中的有关问题.

函数是数学中最基本、最重要的概念之一.在古代数学中已经知道一大类特殊的函数关系并加以系统研究,但函数中变量依赖的思想并没有明显地表达出来,函数也不是独立的研究对象.函数概念的雏形在中世纪才开始出现在科学文献中,与解析几何学的产生有密切联系.

在 14 世纪,法国数学家奥雷姆用图线表示依时间 t 而变化的量 x ,并称 t 为“经度”, x 为“纬度”,在平面上建立了点与点的对应.在 16 世纪,英国数学家哈理奥特用直角坐标的概念求出曲线的代数方程.后来费马取两相交直线,并以到两直线的距离来规定点的位置,从而导出圆锥曲线的方程.1637 年,笛卡儿出版了《更好地指导推理和寻求科学真理的方法论》,在其著名的附录《几何学》中,他引入了变量的思

想,称一些量为“未知和未定的量”,但他没有使用“变量”这一术语(在数学上最早使用“变量”这个词的是约翰·伯努利).笛卡儿把变量引入了数学,他指出了平面上的点与实数对 (x, y) 之间的对应关系.当动点作曲线运动时,它的 x 坐标和 y 坐标相互依赖并同时发生变化,其关系可由包含 x, y 的方程式给出.相应的方程式揭示了变量 x 和 y 之间的关系.以上这些工作都孕育了函数的思想.

“函数”作为数学术语是莱布尼茨首先采用的.他在1692年的论文中第一次提出函数这一概念,但其含义和现在不同.他起初用函数一词表示 x 的幂(即 $x, x^2, x^3, \dots$),后来他又用函数一词表示曲线上点的横坐标、纵坐标、切线长等几何量.现在一般把莱布尼茨引用的函数概念的最初形式看作是函数的第一个定义.把函数理解为幂的同义语,可以看作是函数概念的解析起源;用函数表示某些几何量,可以看作是函数概念的几何起源.

随着数学的发展,函数的定义不断地改进和明确.历史上的每一个阶段,函数都有它相应的定义.

约翰·伯努利(1718)的函数定义:“一个变量的函数是指由这个变量和常量以一定方式构成的一种量.”

18世纪,欧拉曾先后给出函数的三种定义:

1. 将函数定义为“解析表达式”.他在1748年写道:“变量的函数是一个解析表达式,它是由这个变量和一些常量以任何方式组成的.”

2. 将函数定义为“由曲线确定的关系”:“在 xy 平面上徒手画出来的曲线所表示的 y 与 x 间的关系.”

3. 将函数定义为“变量之间的依赖变化”. 1755 年他说:“如果某些变量,以这样一种方式依赖于另一些变量,即当后面这些变量变化时,前面这些变量也随之而变化,则将前面的变量称为后面变量的函数.”

拉格朗日(1797):“所谓一个或几个量的函数是指任意一个适于计算的表达式,这些量以任意方式出现在表达式中,表达式中可以有(也可以没有)其他一些被视为具有给定和不变的值的量.因此,在函数中,我们仅考虑那些假定是变化的量而不去关心可能包含在其中的常数……一般地,我们用字母 f 或 F 放在一个变量的前面以表示该变量的任意一个函数,即表示依赖于这个变量的任何一个量,它按照一种给定的规律随着那个变量一起变化.”

傅立叶(1822):“一般地,函数 $f(x)$ 代表一系列的值或纵坐标,它们中的每一个都是任意的,对于无限多个给定的横坐标 x 的值,有同样多个纵坐标 $f(x)$. 所有的纵坐标都有具体的数值,或是正数,或是负数,或是零.我们不假定这些纵坐标要服从一个共同的规律,它们以任意一种方式一个接一个地出现,其中的每一个都像是作为单独的量而给定的.”

柯西(1823):“如果在一些变量之间有这样的关系,使得当其中之一的值被给定时,便可得出其他所有变量的值.此时,我们通常认为这些变量由它们之中的一个表出,于是这一个量被称为独立变量,其他被独立变量所表示的量就被称为这个变量的函数.”

罗巴切夫斯基(1834):“函数的一般概念要求 x 的函数是一个数,它对每一个 x 是给定的并逐渐地随 x 变化.函数的值可以这样给出,

或者用一个解析式表达式或者用一个条件,使它能给出试验所有数的方法并选定其中之一;或者最后,存在一种依赖性,它的具体形式不必知道。”

狄利克雷(1837):“让我们假定 a 和 b 是两个确定的值, x 是一个变量,它顺序变化取遍 a 和 b 之间所有的值.于是,如果对每个 x ,有惟一的一个有限的 y 以如下方式与之对应:即当 x 连续地通过区间到达 b 时, $y=f(x)$ 也类似地顺序变化,那么 y 被称为该区间中 x 的连续函数.而且,完全不必要求 y 在整个区间中按同一规律依赖于 x ,确实没有必要认为函数仅仅是可以用数学运算表示的那种关系.按几何概念讲, x 和 y 可想像为横坐标和纵坐标,一个连续函数呈现为一条连贯的曲线, a 和 b 之间的每个横坐标,曲线上仅有一个点与之对应.”

著名的狄利克雷函数:
$$y = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

黎曼(1851):“我们假定 Z 是一个变量,它可以逐次取所有可能的实数值.若对它的每一个值,都有未定量 W 的惟一的一个值与之对应,则称 W 为 Z 的函数……”

汉克尔(1870):“ $f(x)$ 称作 x 的一个函数,如果对于某个区间内的每一个 x 的值都有惟一的和确定的 $f(x)$ 的一个值与之对应.而且, $f(x)$ 从何而来,如何确定,是否由量的解析运算或其他什么方式得到,这些都无关紧要,所需的只是 $f(x)$ 的值在各处都是惟一确定的.”

戴德金(1887):“系统 S 上的一个映射蕴含了一种规则,按照这种规则, S 中每一个确定的元素 s 都对应着一个确定的对象,它被称为 s

的映象,记作 $\phi(s)$.我们也可以说, $\phi(s)$ 对应于元素 s , $\phi(s)$ 由映射 ϕ 作用于 s 而产生或导出; s 经映射 ϕ 变换成 $\phi(s)$ 。”

皮亚诺(1911):“函数是一种特殊的关系.根据这种关系,变量的每一个值都对应着惟一的一个值.一个函数是一个关系 u ,使得当两对数 y, x 和 z, x (第二个元素相同)满足 u 时,必然有 $y=z$,无论 x, y, z 可能是什么.”

凯里(1917):“一般而论,两类数之间的一个对应可称作一个函数关系,如果第一类中的每一个数都有第二类中的一个数与之对应.跟第一类中的数相应的变量称为独立变量,跟第二类中的数相应的变量称为应变量.因此,我们可以说,独立变量和应变量之间存在一个函数关系,或像通常所说,称应变量是独立变量的函数……”

库拉托夫斯基(1921):“集合 $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ 称为一个序偶.设 f 是一个序偶的集合,如果当 $(x, y) \in f$ 且 $(x, z) \in f$ 时 $y=z$,则 f 称为一个函数.”

布尔巴基(1939):“设 E 和 F 是两个集合,它们可以不同,也可以相同. E 中的一个变元 x 和 F 中的变元 y 之间的一个关系称为一个函数关系,如果对每一个 $x \in E$,都存在惟一的 $y \in F$,它与 x 满足给定的关系.”

我国“函数”一词,是清代数学家李善兰在《代微积拾级》中最先使用的.这本书把函数定义为:“凡此变数中函彼变数,则此为彼之函数.”这里的“函”是包含的意思.这定义大致相当于欧拉的解析表达式定义,在一个式子中“包含”着变量 x ,那么这个式子就是 x 的函数.

19世纪70年代,康托的集合论出现之后,函数便明确地定义为集

合间的对应关系:设 A 、 B 是两个集合,如果按照某种对应法则 f ,对于集合 A 中的任何一个元素,在集合 B 中都有惟一的元素和它对应,那么这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的映射,记作 $f:A \rightarrow B$. 如果集合 A 、 B 都是非空的数集合,那么 A 到 B 的映射 $f:A \rightarrow B$ 就叫做从 A 到 B 的函数. 这是目前我们采用的人民教育出版社的全日制普通高级中学教科书上的定义.

设在一个变化过程中有两个变量 x 与 y ,如果对于 x 的每一个值, y 都有惟一的值与它对应,那么就说 x 是自变量, y 是 x 的函数. 这是目前我们采用的初中课本上的定义.

北京师范大学出版社出版的“义务教育课程标准实验教科书”《数学》(八年级上册)中的函数定义为:“一般地,在某个变化过程中,有两个变量 x 和 y ,如果给定一个 x 值,相应地就确定了一个 y 值,那么我们称 y 是 x 的函数(function),其中 x 是自变量, y 是因变量.”

函数是初中数学的重要内容之一,函数的基础知识在数学和其他许多学科中有着广泛的应用;函数与代数式、方程、不等式、三角函数等内容的联系非常密切,是进一步学习数学的重要基础知识;函数的概念是运动变化和对立统一等观点在数学中的具体体现;函数的概念及其反映出的数学思想方法已广泛渗透到数学的各个领域. 学好函数知识,还为高中进一步学习函数知识作好铺垫.

本书主要介绍函数的悠久历史,直角坐标系,函数与函数的图像,生活中的轴对称,一次函数、二次函数、反比例函数的图像与性质及其应用.

第二章 直角坐标系与函数

第二章 直角坐标系与函数

一个能容纳几千人的电影院，为什么人们会很容易地持票找到自己的位置坐好，保持院里秩序井然呢？

如果你是一个地质勘探员，在西北某地发现一种稀有矿石，那么你该如何向上级报告该地的位置呢？

这些都是生活中确定位置的实例，大家还可以举出许多这样的例子。电影票上的两个数字——排数和座号，确定了每个人在电影院中的位置；向上级报告位置的最好的和最常用的办法就是测出该地的经度和纬度，那么即使收到报告的人远在千里之外，他也会非常确切地知道该地的位置。

§1 平面直角坐标系

笛卡儿是法国 17 世纪伟大的科学家,他的兴趣非常广泛,在哲学、物理学、数学等方面取得了很多成绩.尤其是他的数学成就令人瞩目,他是解析几何学的奠基人之一.

笛卡儿出生于一个贵族家庭,从小母亲就去世了,父亲非常溺爱他.他自幼体弱多病,养成了在床上思考问题的习惯.有一天,笛卡儿生病躺在床上,无意中看到一只蜘蛛在屋顶上爬来爬去,他灵机一动,想:如果把蜘蛛看作一个点,那么能不能用一组有序的实数组来确定蜘蛛的位置呢?在蜘蛛爬行的启示下,笛卡儿创建了坐标系.坐标系如同架在代数和几何之间的一座桥梁,将几何中的图形和代数中的方程建立了一种对应关系,我们可以把几何图形通过坐标系化成方程来研究,也可以通过画图形来研究方程的性质.

现在我们所说的坐标系指的是几何对象(如点、直线、平面等)的集合与有序数组集合之间建立的一套对应法则,与点对应的有序数组称为该点的坐标.有序数组为一个数的坐标系称为一维坐标系;有序数组为 n 个独立的数的坐标系称为 n 维坐标系.常用的是一维坐标系(如直线坐标系数轴)、二维坐标系(如平面直角坐标系).

在平面内,两条互相垂直且有公共原点的数轴组成平面直角坐标系.通常,两条数轴分别置于水平位置与铅垂位置,取向右与向上的方向分别为两条数轴的正方向.水平的数轴叫做 x 轴或横轴,铅直的数