高等数学习题集

题 解

（中 册）

南京师范学院数学系编印

目　录

第二编　数学分析

第二编 数 学 分 析

第十章 函 数

绝 对 值 的 运 算

解不等式：

10.1. $|x|<5$

解 (i) 当$x\geq 0$时 $|x|=x$ 即 $x<5$

(ii) 当$x<0$时 $|x|=-x$ 即 $-x<5$ $\therefore$ $x>-5$

故原式的解为 $-5<x<5$

10.2. $|x-3|<4$

解 原式等价于解 $-4<x-3<4$

$\therefore$ 解为 $-1<x<7$

10.3. $x^2<9$

解 原式等价于解 $|x|<3$

$\therefore$ 解为 $-3<x<3$

10.4. $0<(x-2)^2\leq 4$

解 原式等价于解 $0<|x-2|\leqslant 2$

右边即为 $-2\leqslant x-2\leqslant 2$ 由于 $|x-2|>0$ 故 $x\neq 2$

$\therefore$ 解为 $0\leqslant x<2$ $2<x\leqslant 4$

10.5. $|x|>x$

解 ① 当$x\geqslant 0$时 有 $x>x$，无解

② 当$x<0$时 有 $-x>x$ 即 $2x<0$ $\therefore$ 原式的解为 $x<0$

10.6. $\left|\dfrac{x}{1+x}\right|>\dfrac{x}{1+x}$

解 原式等价于解 $\dfrac{x}{1+x}<0$

① 当$\begin{cases}x>0\\1+x<0\end{cases}$时，无解

② 当$\begin{cases} x<0 \\ 1+x>0 \end{cases}$时， 得 $-1<x<0$ ∴ 原式的解为 $-1<x<0$

10.7. $|x^2-3x+2|>x^2-3x+2$

解 原式等价于解 $x^2-3x+2<0$

或 $(x-2)(x-1)<0$

①$\begin{cases} x-2>0 \\ x-1<0 \end{cases}$ 无解

②$\begin{cases} x-2<0 \\ x-1>0 \end{cases}$ 得 $1<x<2$ 所以原式的解为 $1<x<2$

求下列方程的实根：

10.8. $|x|=x+1$

解 原式等价于解 $-x=x+1$，故解为 $x=-\dfrac{1}{2}$

10.9. $|x|=-x$

解 原式是一个在 $x\leqslant 0$ 范围内的恒等式，故原式的解为 $x\leqslant 0$

10.10. $|\sin x|=\sin x+2$

解 原式等价于解 $-\sin x=\sin x+2$

故解为 $x=-\dfrac{\pi}{2}\pm 2k\pi(k=0,\ 1,\ 2,\ 3\cdots\cdots)$

10.11. $|2x+3|=x^2$

解 ① 当$2x+3\geqslant 0$时，得 $2x+3=x^2$ $(x-3)(x+1)=0$

故解为 $x_1=3,\ x_2=-1$

② 当$2x+3<0$时，得 $-2x-3=x^2$，在实数范围内无解。

函数值的求法

10.12. 若 $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$，求 $f(2)$，$f(-2)$，$f(0)$，$f(a)$，$f(a+b)$。

解 $f(2)=0$，$f(-2)=-4$，$f(0)=2$，$f(a)=\dfrac{|a-2|}{a+1}$，$f(a+b)=\dfrac{|a+b-2|}{a+b+1}$

10.13. 若 $\varphi(x)=2^{x-2}$，求$\varphi(2)$，$\varphi(-2)$，$\varphi(0)$，$\varphi\left(\dfrac{5}{2}\right)$

解 $\varphi(2)=1$，$\varphi(-2)=\dfrac{1}{16}$，$\varphi(0)=\dfrac{1}{4}$，$\varphi\left(\dfrac{5}{2}\right)=\sqrt{2}$

10.14. 若$\varphi(t)=t^3+1$，求$\varphi(t^2)$，$[\varphi(t)]^2$

解 $\varphi(t^2)=t^6+1$，$[\varphi(t)]^2=t^6+2t^3+1$

10.15. 若 $f(x)=x^2-3x+7$，求 $f(x+\Delta x)$，$f(x+\Delta x)-f(x)$。

解 $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2-3(x+\Delta x)+7=(x^2-3x+7)+(2x-3)\Delta x+(\Delta x)^2$

$f(x+\Delta x)-f(x)=(2x-3)\Delta x+(\Delta x)^2$

10.16. 若 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 求 $f(x+\Delta x)-f(x)$

解 $f(x+\Delta x)-f(x)=\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$

10.17. 若 $\Psi(x)=\ln x$ 证明：$\Psi(x)+\Psi(x+1)=\Psi[x(x+1)]$

证 $\Psi(x)+\Psi(x+1)=\ln x+\ln(x+1)=\ln[x(x+1)]=\Psi[x(x+1)]$ 证毕

10.18. 若 $F(z)=a^z$

证明：(a) $F(-z)\cdot F(z)-1=0$ (b) $F(x)\cdot F(y)=F(x+y)$

证 (a) $F(-z)\cdot F(z)-1=a^{-z}\cdot a^z-1=a^0-1=0$

(b) $F(x)\cdot F(y)=a^x\cdot a^y=a^{x+y}=F(x+y)$ 证毕

10.19. 若 $\varphi(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$， 证明 $\varphi(y)+\varphi(z)=\varphi\left(\dfrac{y+z}{1+yz}\right)$

解 $\varphi(y)+\varphi(z)=\ln\dfrac{1-y}{1+y}+\ln\dfrac{1-z}{1+z}=\ln\left(\dfrac{1+yz-y-z}{1+yz+y+z}\right)$

又 $\varphi\left(\dfrac{y+z}{1+yz}\right)=\ln\dfrac{1-\dfrac{y+z}{1+yz}}{1+\dfrac{y+z}{1+yz}}=\ln\left(\dfrac{1+yz-y-z}{1+yz+y+z}\right)$

∴ 原式成立

10.20. 若 $\varphi(\theta)=\operatorname{tg}\theta$ 证明 $\varphi(a+b)=\dfrac{\varphi(a)+\varphi(b)}{1-\varphi(a)\cdot\varphi(b)}$

证 ∵ $\varphi(a+b)=\operatorname{tg}(a+b)=\dfrac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\cdot\operatorname{tg}b}$

又 $\dfrac{\varphi(a)+\varphi(b)}{1-\varphi(a)\cdot\varphi(b)}=\dfrac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\cdot\operatorname{tg}b}$ ∴ 原式成立

10.21. 若 $f(t)=2t^2+\dfrac{2}{t^2}+\dfrac{5}{t}+5t$ 证明 $f(t)=f\left(\dfrac{1}{t}\right)$

证 ∵ $f(t)=2t^2+\dfrac{2}{t^2}+\dfrac{5}{t}+5t$

又 ∵ $f\left(\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{2}{t^2}+2t^2+5t+\dfrac{5}{t}$ ∴ 原式成立

10.22. 若 $f(x)=x^5-x^3+2x$ 证明 $f(-2)=-f(2)$ $f(-x)=-f(x)$

证 ∵ $f(-2)=-32+8-4=-28$，$f(2)=32-8+4=28$ ∴ $f(-2)=-f(2)$

类似地 可证 $f(-x)=-f(x)$

10.23. 若 $F(x)=x^2+\cos x$ 证明 $F(x)=F(-x)$

证 ∵ $F(x)=x^2+\cos x$ 又 $F(-x)=(-x)^2+\cos(-x)=x^2+\cos x$

∴ $F(x)=F(-x)$

10.24. 若 $\varphi(z)=\sin z-5z^3$ 证明 $\varphi(-z)=-\varphi(z)$

证 ∵ $\varphi(z)=\sin z-5z^3$

又 $\varphi(-z)=\sin(-z)-5(-z)^3=-(\sin z-5z^3)$

∴ 有$\varphi(-z)=-\varphi(z)$

10.25. 若 $\Psi(x)=2\sin x-3\cos x$ 证明 $\Psi(x+2n\pi)=\Psi(x)$ 其中 n 为整数

证 ∵ $\Psi(x)=2\sin x-3\cos x$

又 $\Psi(x+2n\pi)=2\sin(x+2n\pi)-3\cos(x+2n\pi)=2\sin x-3\cos x$

∴ $\Psi(x+2n\pi)=\Psi(x)$

10.26. 若 $f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1\\ \dfrac{1}{2}, & x=1\\ 1, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$ 求 $f(0)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(1)$，$f\left(\dfrac{5}{4}\right)$，$f(2)$

解 $f(0)=0$ $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$ $f(1)=\dfrac{1}{2}$ $f\left(\dfrac{5}{4}\right)=1$ $f(2)=1$

10.27. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0\\ 2, & 0\leqslant x<1\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$

求 $\varphi(3)$，$\varphi(2)$，$\varphi(0)$，$\varphi(0.5)$，$\varphi(-0.5)$。

解 $\varphi(3)=2$，$\varphi(2)=1$，$\varphi(0)=2$，$\varphi(0.5)=2$，$\varphi(-0.5)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

10.28. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<|,\\ 0, & |x|\geqslant|,\end{cases}$ 求 $\varphi(1)$，$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-2)$

解 $\varphi(1)=0$，$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{4}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\varphi(-2)=0$

函数的定义域

在题10.29—10.58中指出函数的定义域：

10.29. $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$

解　　$y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$　　∵　$x^2-3x+2\neq 0$　　∴　$x\neq 1,\ 2,$

故所求定义域为　$(-\infty,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ +\infty)$

10.30．$y=\dfrac{1}{x^2+1}$

解　　$y=\dfrac{1}{x^2+1}$　　∵　x可为任何实数　　∴　定义域为$(-\infty,\ +\infty)$

10.31．$y=\sqrt{3x+4}$

解　　$y=\sqrt{3x+4}$　　∵　$3x+4\geqslant 0$　　故　$x\geqslant -\dfrac{4}{3}$

∴　定义域为　$\left[-\dfrac{4}{3},\ +\infty\right)$

10.32．$y=\sqrt{x^2-1}$

解　　$y=\sqrt{x^2-1}$　　∵　$x^2-1\geqslant 0$

∴　定义域为　$(-\infty,\ -1]$，　　$[1,\ +\infty)$

10.33．$y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$

解　∵　$y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$，　　∴　由$\begin{cases}x\neq 0\\1-x^2\geqslant 0\end{cases}$，　　得$\begin{cases}|x|\leqslant 1\\x\neq 0\end{cases}$

故所求定义域为　$[-1,\ 0),\ (0,\ 1]$

10.34．$y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

解　∵　$y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$，　　∴　由$\begin{cases}\dfrac{1+x}{1-x}\geqslant 0\\x\neq 1\end{cases}$，得定义域为$[-1,\ 1)$

10.35．$y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$

解　∵　　$y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$　　∴　由$\begin{cases}1-x^2\neq 0\\x+2\geqslant 0\end{cases}$

得　$x\geqslant -2$，和　$x\neq \pm 1$

故定义域为　$[-2,\ -1)$　$(-1,\ 1),\ (1,\ +\infty)$

10.36．$y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-2}}$

解　∵　$y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-2}}$　　故　所求定义域为　$[0,\ 2),\ (2,\ +\infty)$

10.37．$y=\sqrt{x^2-4x+3}$

解 $\because$ $y=\sqrt{x^2-4x+3}$, 解 $x^2-4x+3\geqslant 0$

得定义域为 $(-\infty, 1]$, $[3, +\infty)$

10.38. $y=\dfrac{1}{\lg(1-x)}$

解 $\because$ $y=\dfrac{1}{\lg(1-x)}$ $\therefore$ 须有 $0<1-x<1$ 和 $1<1-x<+\infty$

故所求定义域为 $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$

10.39. $y=\lg\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$

解 由 $\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}>0\\ x+2\geqslant 0\end{cases}$ 得 $-2\leqslant x<1$ 故定义域为 $[-2, 1)$

10.40. $y=\dfrac{1}{2}\lg\dfrac{1+x}{1-x}$

解 由 $\dfrac{1+x}{1-x}>0$, 解得定义域为 $(-1, 1)$

10.41. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-2}}-\log_a(2x-3)$, $(a>1)$

解 由 $\begin{cases}x-2\neq 0\\ 2x-3>0\end{cases}$ 解得定义域为 $\left(\dfrac{3}{2}, 2\right)$, $(2, +\infty)$

10.42. $y=\lg(\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x})$

解 由 $\begin{cases}x-4\geqslant 0\\ 6-x\geqslant 0\end{cases}$ 解得定义域为 $[4, 6]$

10.43. $y=\sqrt{\lg\left(\dfrac{5x-x^2}{4}\right)}$

解 由 $\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 1$, 解得定义域为 $[1, 4]$

10.44. $y=\log_2(\log_2 x)$

解 由 $\log_2 x>0$ 得 $1<x<+\infty$ 故定义域为 $(1, +\infty)$

10.45. $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$

解 由 $\begin{cases}\sin x\geqslant 0\\ 16-x^2\geqslant 0\end{cases}$ 解得所求定义域为 $[-4, -\pi]$, $[0, \pi]$

10.46. $y=\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$

解 由 $\sin x-\cos x\neq 0$ 解得 $x\neq\dfrac{\pi}{4}+n\pi$, $(n=0, \pm 1, \pm 2\cdots\cdots)$

10.47. $y=\operatorname{tg}(x+1)$

解 $x \neq \dfrac{2n+1}{2}\pi-1 \quad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots\cdots)$

10.48. $y=\operatorname{ctg}\sqrt{x}$

解 $x>0$，且$x \neq (n\pi)^2$，$(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

10.49. $y=\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$

解 由 $\cos x>0$ 解得定义域为 $\left(\dfrac{4n-1}{2}\pi,\ \dfrac{4n+1}{2}\pi\right)$

$(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots\cdots)$

10.50. $y=\arccos\sqrt{2x}$

解 由$0 \leqslant \sqrt{2x} \leqslant 1$ 解得定义域为 $\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right]$

10.51. $y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}$

解 由 $-1 \leqslant \dfrac{x-3}{2} \leqslant 1$ 解得定义域为 $[1,\ 5]$

10.52. $y=\arcsin(2+3^x)$

解 $\because$ $2+3^x>1$ 故所给函数无意义

10.53. $y=\lg\sin x$

解 由 $\sin x>0$ 解得定义域为 $(2k\pi,\ \overline{2k+1}\pi)$ $(k=0, \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots\cdots)$

10.54. $y=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$

解 由 $x+\sqrt{x^2+1}>0$ 解得定义域为 $(-\infty,\ +\infty)$

10.55. $y=\sqrt{3-x}+\arccos\dfrac{x-2}{3}$

解 由 $\begin{cases}3-x \geqslant 0\\ -1 \leqslant \dfrac{x-2}{3} \leqslant 1\end{cases}$ 解得定义域为$[-1,\ 3]$

10.56. $f(x)=\begin{cases}-1 & 0<x<1\\ 1 & x>1\end{cases}$

解 定义域为 $(0,\ 1)$，$(1,\ +\infty)$

10.57. $y=\begin{cases}x^2+1 & -1<x<2\\ x^3-3 & 2<x \leqslant 4\end{cases}$

解 定义域为 $(-1,\ 2)$，$(2,\ 4]$

10.58. $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & x<0\\ x & 0<x<1\\ 2 & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$

解 定义域为 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ 2]$

10.59. 设 $y=f(x)$的定义域是 $[0,\ 1]$，问：

(a) $f(x^2)$ (b) $f(\sin x)$ (c) $f(x+a)$, $(a>0)$

(d) $f(x+a)+f(x-a)$, $(a>0)$ 的定义域是什么？

解 (a) $f(x^2)$的定义域为 $[-1,\ 1]$

(b) $f(\sin x)$的定义域为 $[2n\pi,\overline{2n+1}\pi]$ $(n=0,\ \pm1,\ \pm2\cdots\cdots)$

(c) $f(a+x)$, $(a>0)$的定义域为 $[-a,\ 1-a]$

(d) $f(x+a)+f(x-a)$, $(a>0)$的定义域为

若 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$时 是$[a,\ 1-a]$

若 $a>\frac{1}{2}$时 不存在

10.60. 已知从高为h处落下的重物所经过的路程是由公式 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 来确定，问(a)此函数的定义域如何？(b)解析式$S=\frac{1}{2}gt^2$的定义域又如何？

解 (a) 所给函数的定义域为 $\left[0,\ \sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$

(b) 解析式$S=\frac{1}{2}gt^2$的定义域为 $(-\infty,\ +\infty)$

在题10.61—10.64中，$f(x)$与$\varphi(x)$是否表同一函数？说明其理由，并在哪一区间内，它们是相同的。

10.61. $f(x)=\frac{x}{x}$, $\varphi(x)=1$

解 不表示同一函数，因定义域不同，在 $x\neq0$ 时它们是相同的。

10.62. $f(x)=\lg x^2$ $\varphi(x)=2\lg x$

解 不表示同一函数，因定义域不同，在$x>0$时它们是相同的。

10.63. $f(x)=x$ $\varphi(x)=(\sqrt{x})^2$

解 不表同一函数，因定义域不同，在 $x\geqslant0$ 时它们是相同的。

10.64. $f(x)=x$ $\varphi(x)=\sqrt{x^2}$

解 不表同一函数，因函数值域不同，在 $x\geqslant0$ 时它们是相同的。

建立函数关系

10.65．温度计上摄氏 0 度时对应华氏32度，摄氏100度时对应华氏 212 度，将摄氏温标表为华氏温标的函数。

解 由两已知点可决定一条直线，设该直线的方程为：$y=kx+b$

$\because \begin{cases} \text{当} \quad x=32 \quad \text{时} \quad y=0 \\ \quad\ \ x=212 \quad \text{时} \quad y=100 \end{cases}$ 代入后求得 $k=\frac{1}{9}$　$b=-\frac{5}{9}\times 32$

$\therefore \quad y=\frac{5}{9}(x-32)$ 为所求函数关系

（其中 y 为摄氏温标，x 为华氏温标。）

10.66．设 M 为密度不均匀细杆 OB 上的一点，若 OM 的质量与 OM 的长度平方成正比，又已知 OM 等于 4 寸时其质量为 8 单位，试求 OM 的质量与长度间的关系。

解 由所设条件知 $m=kx^2$　$\because$ 当 $x=4$ 时

$m=8$，代入上式求得 $k=\frac{1}{2}$　$\therefore \quad y=\frac{x^2}{2}$ 为所求函数关系，其中 y 表示质量，x 表示长度。

10.67．一物体作直线运动，已知阻力的大小的物体运动的速度成正比，但方向相反，当物体以 1 米/秒速度运动时阻力为 2 克，建立阻力与速度间的函数关系。

解 可设函数关系为 $f=-kV$

$\because$ 当 $V=1$ 时　$f=-2$　故得 $k=2$

$\therefore \quad f=-2V$　为所求函数关系，f 表示阻力，V 表示速度，“$-$”号表示阻力与速度方向相反。

10.68．电压在某电路上等速下降，在实验开始时电压为12伏特，经过 8 秒后电压降落到6.4伏特，试把电压 V 表为时间 t 的函数。

解 可设函数关系为 $V=kt+b$

$\because \begin{cases} t=0\text{时} \quad V=12 \\ t=8\text{时} \quad V=6.4 \end{cases}$ 解得 $b=1$　$k=-0.7$

$\therefore \quad V=-0.7t+12$　$(t\geqslant 0)$为所求函数关系。

10.69．已知三角形中有两边长分别为 a 与 b，设 γ 为该两边之间的夹角，试将三角形的面积表为 γ 的函数，并求其定义域。

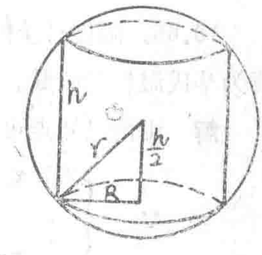
解 由三角形面积公式得：

$$S=\frac{1}{2}a\cdot b\sin\gamma，\text{函数的定义域为}\ (0,\ \pi)$$

10.70．在半径为 γ 时球内嵌入一个内接圆柱，试将圆柱的体积表为其高的函数，并求

此函数的定义域。

解 由图知，内接圆柱体的体积为：



$$V=\pi R^2\cdot h=\pi\left[r^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2\right]\cdot h$$

$$\therefore\quad V=\pi\left[r^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2\right]h,\text{ 定义域为}(0,2r)。$$

10.71. 已知圆锥的体积为 V，试将圆锥的底半径 γ 表为其高 h 的函数，并求此函数的定义域。

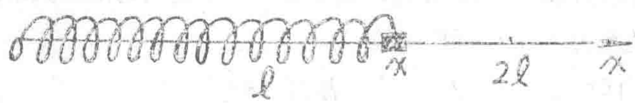
解 $\because$ 圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$

$$\therefore\quad r=\sqrt{\frac{3V}{\pi h}}，\text{定义域为：}(0,\infty)$$

10.72. 一物体受压缩弹簧的推力而运动，如这弹簧一端固定于原点，原长 $2l$，压缩后长为 l，弹性系数为 k，试将物体所受之力表为距离之函数(只考虑弹簧长度由 l 变至 $2l$ 的过程)。

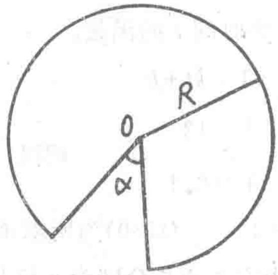
解 由虎克定律：弹性力与位移成正比，设弹簧位置在 x 处时，即位移为 $(2l-x)$ 时，物体所受之力为 F，$\therefore$ 有：

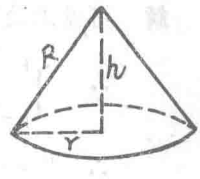
$$F=k(2l-x)，\text{定义域为：}l\leqslant x\leqslant 2l$$



10.73. 把一圆形铁片圆中心处剪去中心角为 α 的一扇形后围成一无底圆锥，试将这圆锥的体积表为 α 的函数。

解 圆锥的体积为：$V=\frac{\pi r^2h}{3}$





又
$$r=\frac{R(2\pi-\alpha)}{2\pi},$$

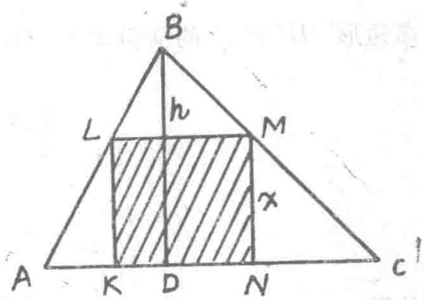
$$r^2=\frac{R^2(2\pi-\alpha)^2}{4\pi^2}$$

$$h=\sqrt{R^2-r^2}=\frac{R\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}}{2\pi}$$

$$\therefore\quad V=\frac{R^3}{24\pi^2}(2\pi-\alpha)^2\cdot\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2},\qquad 0<\alpha<2\pi$$

10.74. 底 $AC=b$，高 $BD=h$ 的三角形 ABC 中内接矩形 $KLMN$，其高记为 x，将矩形之

周长 P 和其面积 S 表为 x 的函数。



解 设 $LM=a \qquad AC=b$

$\because \quad \Delta BLM \backsim \Delta BAC$

$\therefore \quad \dfrac{a}{b}=\dfrac{h-x}{h} \qquad \therefore a=\dfrac{b(h-x)}{h}$

$\therefore$ 矩形周长

$$P=2a+2x=\frac{2}{h}\left[bh+(h-b)x\right],\ 0<x<h$$

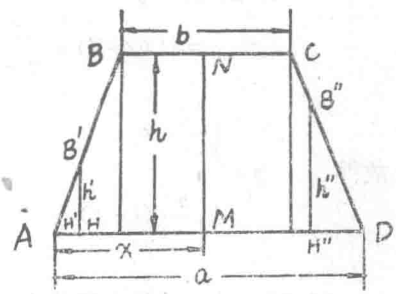
$$\text{矩形面积 } S=a\cdot x=\frac{b}{h}(h-x)x,\ 0<x<h$$

10.75. 在三角形 ABC 中，$AB=6$ 厘米，$AC=8$ 厘米，$\angle BAC=x$，试将边 $BC=a$ 表为变量 x 的函数。

解 由余弦定理得：

$$a=\sqrt{6^2+8^2-2\cdot 9\cdot 8\cos x}=\sqrt{100-96\cos x},\ 0<x<\pi$$

10.76. 等腰梯形 $ABCD$（如图），其两底分别为 $AB=a$ 和 $BC=b(a>b)$，高为 $HB=h$，引直线 $MN\,/\!/\,BH$，MN 与顶点 A 的距离 $AM=x(0\leq x\leq a)$，将梯形内位于直线 MN 之左的面积 S 表为x的函数。



解 ① 当 x 点在 H' 时，$\Delta AH'B'$ 的面积：$S=\dfrac{1}{2}x\cdot h'$

而$\dfrac{h'}{h}=\dfrac{x}{\dfrac{a-b}{2}} \qquad \therefore \quad h'=\dfrac{2hx}{a-b}$

$\therefore \quad S=\dfrac{h}{a-b}x^2,\ \left(0\leq x\leq\dfrac{a-b}{2}\right)$

② 当 x 点在 M 时，梯形 $AMNB$ 的面积为$\dfrac{h(AM+BN)}{2}$

$\because \quad AM=x \qquad BN=x-\dfrac{a-b}{2}$

$\therefore \quad S=h\left(x-\dfrac{a-b}{4}\right) \qquad \left(\dfrac{a-b}{2}<x<\dfrac{a+b}{2}\right)$

③ 当 x 位于 H'' 时，则$\dfrac{h''}{h}=\dfrac{a-x}{a-\dfrac{a+b}{2}} \qquad \therefore \quad h''=\dfrac{2h(a-x)}{a-b}$

$$\Delta DH''B''\text{的面积}=\frac{1}{2}(a-x)\cdot\frac{2h(a-x)}{a-b}=\frac{h(a-x)^2}{a-b}$$

多边形 $AH''B''CB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}h(a+b)-\frac{h(a-x)^2}{a-b}$

$$=h\left[\frac{a+b}{2}-\frac{(a-x)^2}{a-b}\right],\ \left(\frac{a+b}{2}\leqslant x\leqslant a\right)$$

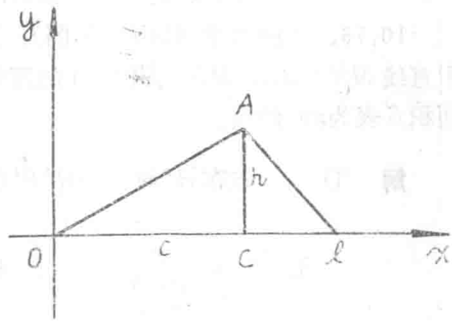
故得
$$S=\begin{cases}\frac{h}{a-b}x^2 & 0\leqslant x\leqslant\frac{a-b}{2}\\ h\left(x-\frac{a-b}{4}\right) & \frac{a-b}{2}<x<\frac{a+b}{2}\\ h\left[\frac{a+b}{2}-\frac{(a-x)^2}{a-b}\right] & \frac{a+b}{2}\leqslant x\leqslant a\end{cases}$$

10.77. 长为 l 的弦，两端固定，在 C 点处，将弦提高 h 后呈图中的形状，设提高时弦上各点仅沿着垂直于两端点连结线方向移动，以 x 表示弦上点的位置，y 表 x 点处升高的高度，试建立 x 与y间的函数关系。

解 依题意须建立 OA 及 Al 的方程

OA 的方程为
$$y=kx=\frac{h}{c}x \qquad (0\leqslant x\leqslant c)$$

Al 的方程为
$$y=k'(x-l)=\frac{h}{c-l}(x-l)\ (c<x\leqslant l)$$

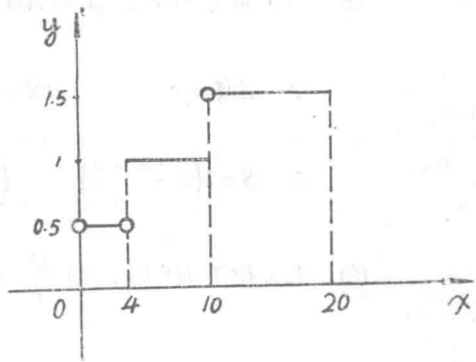


故得
$$y=\begin{cases}\frac{h}{c}x & 0\leqslant x\leqslant c\\ \frac{h}{l-c}(l-x) & c^2<x\leqslant l\end{cases}$$

10.78. 某公共汽车路线全长为 20 公里，票价规定如下：乘坐 4 里以下者收费 5 分，乘坐 4 —10公里，收费 1 角，10公里以上收费 1 角 5 分，试将票价表成路程之函数，并作图。

解 如右图，建立函数关系为：

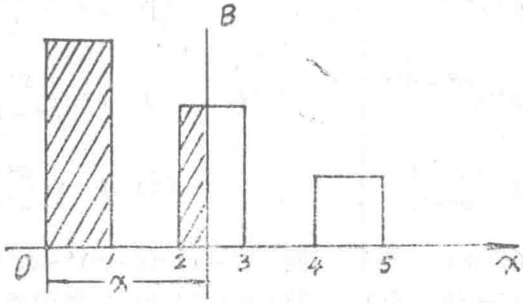
$$y=\begin{cases}0.5(\text{角}) & 0<x<4\\ 1\ (\text{角}) & 4\leqslant x\leqslant 10\\ 1.5(\text{角}) & 10<x\leqslant 20\end{cases}$$



10.79. 在三个矩形，其高分别等于3米、2米，1 米，而底皆为 1 米，彼此相距1米放着(如图)，假定 $x(-\infty<x<+\infty)$连续变动(即直线 AB 连续地平行移动)，试将阴影部分的面积 S 表为距

离 x 的函数。

解



$$S=\begin{cases}0 & x\leqslant 0 & (\text{这时没有阴影，故面积为}0)\\ 3x & 0<x\leqslant 1 & (\text{当 } 0<x\leqslant 1 \text{ 时，面积 } S=\text{底}\times\text{高}=3x)\\ 3 & 1<x\leqslant 2 & (\text{当 } 1<x\leqslant 2 \text{ 时，面积仍是第一个矩形})\\ 2x-1 & 2<x\leqslant 3 & (\text{当 } 2<x\leq 3 \text{时，面积 } S=3+2(x-2)=2x-1)\\ 5 & 3<x\leqslant 4 & (\text{这时 } S \text{ 为两个阴影面积之和})\\ x+1 & 4<x\leqslant 5 & (4<x\leq 5\text{时，面积}S=3+2+(x-4)=x+1)\\ 6 & x>5 & (S \text{ 为三个阴影面积之和})\end{cases}$$

10.80. 在区间 $0\leq x\leqslant 2$ 上有 3 克重的物质均匀分布着，此外又有 1 克重的物质集中在 $x=3$ 处，设 x 在 $(-\infty,\ \infty)$ 内变化，试将区间 $(-\infty,\ x)$ 一段的质量M表为x的函数。

解

$$M=\begin{cases}0 & x<0 & (x<0\text{时没有质量，即 } M=0)\\ \dfrac{3}{2}x & 0\leqslant x\leqslant 2 & (\text{因分布是均匀的故密度为}\dfrac{3}{2})\\ 3 & 2<x<3 & (\text{当 } 2<x<3 \text{ 时质量仍为}3)\\ 4 & x\geqslant 3 & (\text{到 } x=3 \text{ 时，质量增加了 } 1 \text{ 克})\end{cases}$$

函 数 性 质 的 讨 论

10.81. 指出下列函数中哪些是奇函数，哪些是偶函数，哪些是非奇非偶函数(在各函数中$a>1$)？

(a) $y=x^4-2x^2$ (b) $y=x-x^2$

(c) $y=\cos x$ (d) $y=2^x$

(e) $y=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$ (f) $y=\sin x$

(g) $y=\sin x-\cos x$ (h) $y=\mathrm{tg}\,x$

(i) $y=e^{-x^2}$

(j) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$

(k) $y=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$

(l) $y=\frac{x}{a^x-1}$

(m) $y=\frac{a^x+1}{a^x-1}$

(n) $y=x\cdot\frac{a^x-1}{a^x+1}$

解 (a) $\because$ $y=f(x)=x^4-2x^2$ 而 $f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2=x^4-2x^2$

$\therefore$ 有 $f(-x)=f(x)$ 故 $y=x^4-2x^2$为偶函数。

(b) $y=x-x^2$，不满足奇函数和偶函数的定义，所以它是非奇非偶函数。

(c) $y=f(x)=\cos x$ 而 $f(-x)=\cos(-x)=\cos x$

$\therefore$ 有 $f(-x)=f(x)$ 故 $y=\cos x$是偶函数

(d) $y=2^x$，非奇非偶函数。

(e) $y=f(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$

$$\text{而}\quad f(-x)=(-x)-\frac{(-x)^3}{6}+\frac{(-x)^5}{120}=-\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)$$

$\therefore$ 有 $f(-x)=-f(x)$ 故 $y=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$是奇函数。

(f) $y=\sin x$ 奇函数

(g) $x=\sin x-\cos x$ 非奇非偶函数

(h) $y=\operatorname{tg} x$ 奇函数

(i) $y=e^{-x^2}$ 偶函数

(j) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$ 偶函数

(k) $y=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$ 奇函数

(l) $y=\frac{x}{a^x-1}$ 非奇非偶函数

(m) $y=\frac{a^x+1}{a^x-1}$ 奇函数

(n) $y=x\frac{a^x-1}{a^x+1}$

$$\text{而}\quad f(-x)=(-x)\cdot\frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=-x\frac{1-a^x}{1+a^x}=x\frac{a^x-1}{a^x+1}$$

$\therefore$ 有 $f(-x)=f(x)$ $\therefore$ $y=x\frac{a^x-1}{a^x+1}$为偶函数