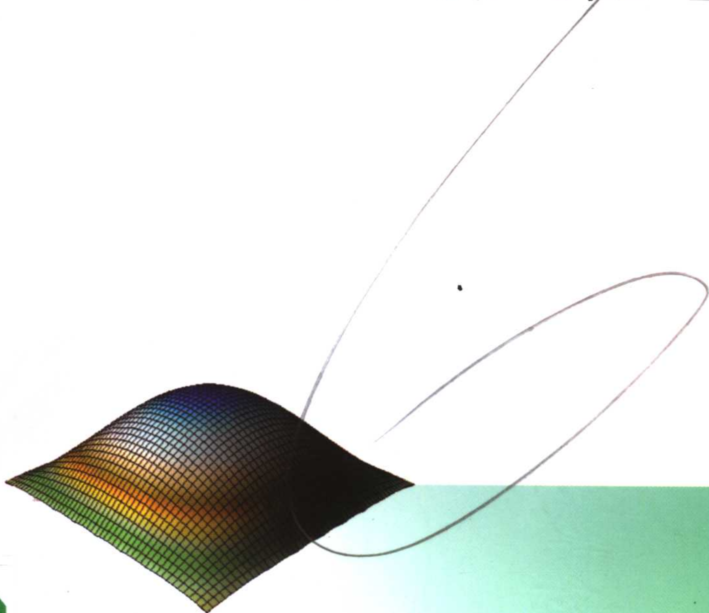
高等代数学习方法与解题指导

李晓奇　王晓敏　王书田　主编



NEUPRESS
东北大学出版社

高等代数学习方法与解题指导

主　编　李晓奇　王晓敏　王书田
副主编　王新心　刘艳杰　张重阳
姜玉山

东北大学出版社
·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

高等代数学习方法与解题指导 / 李晓奇，王晓敏，王书田主编 .— 沈阳 ：东北大学出版社，2005.11（2006.3 重印）
ISBN 7-81102-206-0

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①李…　②王…　③王…　Ⅲ. 高等代数-高等学校—教学参考资料　Ⅳ. O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 126991 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress.com
http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳市第六印刷厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
幅面尺寸：140mm × 203mm
字　　数：333 千字
印　　张：9.875
出版时间：2005 年 11 月第 1 版
印刷时间：2006 年 3 月第 2 次印刷
责任编辑：任彦斌　　责任校对：刘　毅
封面设计：唐敏智　　责任出版：秦　力

定　　价：27.00 元

前　言

高等代数是数学专业学生最重要的基础课之一，同时也是入学后学生们遇到的第一门内容抽象的课程。因此，如何把握课程的内容，掌握正确的学习方法显得至关重要。出于这样的目的，我们编写了这本参考书。

我们先从代数学的概念与演变说起，这样可以更好地理解高等代数与初等代数之间的关系。

一、代数学的初等时期

代数学是数学最重要、最基础的分支之一。

代数之前我们接触的是算术。算术是日常生活中的计算问题，主要是整数和分数的计算。而代数与算术的区别主要在于引进了未知数，根据问题的条件列出方程或方程组，然后求解。17～18 世纪中期，代数学被理解为“在代数符号上进行计算的科学”，用来研究与解方程有关的问题。“代数学是解方程的科学”这一观念一直持续到 19 世纪末。

初等代数中有著名的二、三、四次方程的求根问题。其中三、四次方程求根到 16 世纪上半叶才解决。这也是初等数学发展成熟的标志之一。18 世纪末（1799 年），高斯给出了“代数基本定理”的第一个证明。

二、高等代数的结构体系

高等代数由三部分内容构成：多项式、线性代数、代数基本概念。

回顾一下初等数学的发展史，可以看出以下几方面问题。

1. 对方程求解的进一步研究，需要我们对多项式作进一步探讨

解方程的办法之一是对多项式进行因式分解，因为这样可以降低方程的次数。而在初等数学中，我们注重的是因式分解的具体方法，属于“就事论事”。但实际问题要求我们必须在理论上给出问题的可行性结论和一般结果，于是需要对此进行探讨。正是在人们熟悉的整数除法中的一系列相关结论的基础上，引出了多项式的带余除法、整除、最大公因式、因式分解等一系列概念和结论。

2. 对线性方程组的进一步研究，导致线性代数部分的产生

求解一般的线性方程组是高等代数的主要内容。初等数学求解的是二元一次方程组和三元一次方程组，而且总是可以得到惟一的解。其直观意义为：平面内的两条直线在一点处相交；空间中的三个平面在一点处相交。这其实就是线性方程组的最特殊情形。

高等代数中求解的是形如

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

的一般方程组。具体说来需要解决三个问题：解的存在性问题；解的结构问题；具体求解方法。

而这些问题的提出使得初等数学的工具远远不够用了。新的工具：行列式理论、矩阵理论、向量代数正是在这种背景下产生的。

3. 对五次及五次以上方程的求解的研究，导致代数基本概念的产生

人们在“轻易”地得到一元二次方程的求根公式之后，又经过艰苦的努力，在 16 世纪上半叶得到了三、四次方程的求根公式。很自然，人们还要继续追求更高的目标。挪威数学家阿贝尔（1802—1829）还是一个中学生的时候，就按照高斯（1777—1855）对二项式方程的处理方法探讨高次方程的可解性问题。起初，他认为自己用根式已经解决了一般的五次方程，但很快就发现了自己的错误。进大学后他继续研究这一问题，终于在 1824 年证明了一般

五次方程是不能像低次方程那样用根式求解的，从而解决了困惑数学家 300 年之久的一个难题。他与另一位天才青年，法国的伽罗华（1811—1832）共同创立了群的理论，开辟了数学发展的新纪元。

三、分析、代数、几何的关系

如果比较一下代数与分析的特点，不难发现，分析研究的是“连续”变化的问题，而代数研究的是“离散”的变量。相对而言，高等代数与解析几何的关系更加密切。从内容来看，两门课确有许多重复的内容，如向量空间、向量及其线性运算、线性相关与线性无关、欧氏空间、内积、向量的坐标、坐标变换、线性变换、特征方程、特征值、正交变换等等。从内容的联系来看，二者存在着工具与对象的关系。就整体而言，解析几何是以代数为工具的；从局部章节来看，解析几何的许多概念、方法也是应用代数的知识来定义、刻画、描述和表达的；从概念的内涵与外延来看，二者存在着特殊与一般的关系。空间解析几何中的一、二、三维空间是代数中 n 维空间的特例，而代数中的各种变换正是解析几何中相应的具体变换的抽象。代数中的许多概念都是概括了几何、力学中的一些概念而产生的更抽象、更本质的概念。

按照上述想法，我们可以把这门课的内容分为两大块：

代数块（或称高等代数的“解析理论”）：多项式、行列式、矩阵代数、线性方程组、代数基本概念；

代数几何结合块（或称高等代数的“几何理论”）：二次型、线性空间、线性变换、欧氏空间。

四、学习本课程需注意的问题

1. 注重课程中数学思想的把握

注意数学思想的把握有利于快速把握课程内容的实质，具体说来需注意以下几方面。

① 注意课程中抽象内容的“原型”。高度的抽象性是代数，也是整个数学突出的特点之一。正是因为高度的抽象，才使得它站得更高、看得更远，更能洞察事物的本质，从而具有更广泛的应用。

如高等代数中的向量空间就是一个典型的抽象例子。人们在认识、研究各种空间后，抛开那些具体的对象，将其共同点加以抽象概括，便形成了数域 P 上的向量空间或称线性空间。在抽象的线性空间中，向量完全失去了“有向线段”的概念，V 中的加法成了 $V\times V\to V$ 的映射；而数量乘法成了 $P\times V\to V$ 的映射。只有遇到具体的例子时，我们才知道向量具体是什么样子的，其中的运算是如何进行的。这里的概念和方法都是抽象的。在认识这点的同时，又要随时结合具体的空间，以便对课程的概念有一个清楚的理解。

② 变换的思想贯穿始终。变换的思想是现代数学思想的集中体现。线性变换是最简单、最直观的变换，它统一了几何空间中的坐标变换，刻画了几何的核心问题——曲线（曲面）的标准形问题。它可以解释线性方程组的实质，使得许多抽象、复杂的概念和方程变得简单明了。而抽象的变换又经常通过直观的矩阵来表现，使得我们更容易把握它。

③ 在高等代数中，分类思想、模型的思想、集合的思想、符号的思想贯穿始终。

2. 注重总结课程中的常用方法

高等代数中，无论是概念的引入，还是定理的证明，都有许多的数学方法得以体现和应用。如公理化方法、类比方法、归纳方法、构造方法、标准化方法等。

3. 加强课外练习

上述强调的两个问题都是以认真听课和大量的课外练习为基础的。如果没有大量的课外练习，那么对上述两点的理解只能是“思而不学”，不会有真正的效果。只有经过大量的练习，逐步的积累，到一定的时候，才会产生量变到质变的飞跃。如果确实想要学好这门课程，我们建议采用“加倍练习”的标准要求自己。即不论你采用哪个版本的教材，都要争取做到课后习题练习量加倍。比如某版本的教材课后习题总量为 300 题，那么在学习过程中要做 600 道左右的习题。当然也要因人而异，注意随时对自己的学习状况进行分

析。

五、本书的编排结构

本书以北京大学数学系几何与代数教研室代数小组编写的《高等代数》（第三版）的课后习题解答为主线，通过对解题过程的分析，达到理解内容和掌握学习方法的目的。考虑到一般院校的教学基本要求和考研的要求，书中略去了 λ-矩阵、双线性函数以及代数基本概念介绍三部分内容。符号的使用作了适当的调整。

本书内容分为基本概念、多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换、欧几里得空间，共九章。其中的基本概念一章主要突出映射的概念、数域的概念以及高等代数中常用的数学归纳法，特别是第二归纳法的介绍。

各章的结构体系分为基本要求、主要概念和结论、常用解题方法和典型例题（题目，分析，解答，注释（包括易犯错误））、综合例题四部分内容。书后的附录 1 给出了教材的习题解答。

为了满足进一步深造的同学的要求，我们选择了部分考研真题作为附录 2。

本书侧重于要点提示、学习方法及解题分析和指导，可供学习本课程的学生作为参考书，也可作为考研同学的复习用书。

本书由李晓奇、王晓敏、王书田（河北工业职业技术学院）主编。王新心、刘艳杰、张重阳、姜玉山任副主编。

由于作者水平有限，加之时间仓促，不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

编著者

2005 年 7 月

于东北大学秦皇岛分校

目　录

第一章　基本概念

一、基本要求

1. 掌握集合的概念与运算.
2. 掌握映射的概念及几种特殊的映射.
3. 掌握数域的概念及常见的数域，会构造数域.
4. 能熟练运用第一数学归纳法和第二数学归纳法计算和证明.

二、主要概念和结论

1. 映射及相关概念

(1) 设 M 与 M' 是两个非空集合，如果对于 M 中的每个元素 a，按照某一对应法则 σ，都有 M' 中一个确定的元素 a' 与之对应，则称 σ 为集合 M 到 M' 的一个映射. 并记 $\sigma(a)=a'$，称 a' 为 a 在映射 σ 下的像，a 为 a' 在映射 σ 下的原像.

(2) 集合 M 到自身的映射称为 M 上的一个变换.

(3) 设 σ 为集合 M 到 M' 的一个映射，用 $\sigma(M)$ 表示 M 在映射 σ 下的像的全体，称为 M 在映射 σ 下的像集合. 如果 $\sigma(M)=M'$，则称 σ 为映上的或满射. 如果 $a_1\neq a_2$ 就一定有 $\sigma(a_1)\neq\sigma(a_2)$，则称 σ 为 $1-1$ 的或单射. 如果一个映射既是单射又是满射，就称为 $1-1$ 对应或双射.

(4) 若 σ 和 τ 都是集合 M 到 M' 的映射，且对每个 $a\in M$，都有 $\sigma(a)=\tau(a)$，则称 σ 与 τ 相等，记为 $\sigma=\tau$.

(5) 设 σ 为集合 M 上的一个变换，如果对每个 $a\in M$，都有 $\sigma(a)=a$，则称 σ 为 M 上的恒等变换或单位变换，记为 1_M.

(6) 设 σ 为集合 M 到 M' 的一个映射，τ 是集合 M' 到 M'' 的映射，乘积 $\tau\sigma$ 定义为

$$(\tau\sigma)(a)=\tau(\sigma(a)),\ \forall a\in M,$$

则 $\tau\sigma$ 是 M 到 M'' 的一个映射．映射的乘法一般不满足交换律，只满足结合律，即若 σ，τ，φ 分别是集合 M 到 M'，M' 到 M''，M'' 到 M''' 的映射，则有

$$(\varphi\tau)\sigma=\varphi(\tau\sigma).$$

(7) 设 σ 为集合 M 到 M' 的一个映射，如果存在 M' 到 M 的映射 τ，使得

$$\tau\sigma=1_M,\ \sigma\tau=1_{M'},$$

则称 σ 是可逆映射，并称 τ 是 σ 的逆映射，记为 σ^{-1}．σ 是可逆映射的充分必要条件是 σ 为双射．

2．数环及数域

(1) 数环　设 P 是一个非空集，如果 P 中任意两个数的和、差、积都在 P 内，那么就称 P 是一个数环．

(2) 数域　设 P 是包含 0 和 1 的数集，如果 P 中任意两个数(可以相同)的和、差、积、商(除数不为零)仍是 P 中的数，则称 P 是一个数域．

(3) 任何数域都包含有理数域 Q；在有理数域 Q 与实数域 R 之间存在无穷多个数域；在实数域 R 与复数域 C 之间不存在其他数域．

3．数学归纳法

(1) 最小数原理　正整数集 N^* 的任意一个非空子集 S 必含有最小数．

(2) 第一数学归纳法　设有一个与自然数 n 有关的命题，如果

① 当 $n=1$ 时命题成立；

② 假设 $n=k$ 时命题成立，则 $n=k+1$ 时命题也成立．

那么这个命题对一切自然数 n 都成立．

(3) 第二数学归纳法　设有一个与自然数 n 有关的命题，如果

① 当 $n=1$ 时命题成立；

② 假设命题对一切小于 k 的自然数都成立，则命题对 k 也成立．

那么这个命题对一切自然数 n 都成立．

三、常用解题方法及典型例题

【例 1-1】 用适当的符号($\in$，$\notin$，$=$，$\subseteq$，$\supseteq$)填空：

(1) 1 ____ $\{1\}$；　(2) $\varnothing$ ____ $\{0\}$；

(3) a ____ $\{a, b, c\}$；　(4) $\{a\}$ ____ $\{a, b, c\}$；

(5) $\{a, b\}$ ____ $\{a, b, c\}$；　(6) $\{c, b, a\}$ ____ $\{a, b\}$；

(7) $\{c, b, a\}$ ____ $\{a, b, c\}$;　　(8) 0 ____ $\{1, 2, 3\}$.

【解】 (1) $1 \underline{\in} \{1\}$;　　(2) $\varnothing \underline{\subsetneqq} \{0\}$;

(3) $a \underline{\in} \{a, b, c\}$;　　(4) $\{a\} \underline{\subsetneqq} \{a, b, c\}$;

(5) $\{a, b\} \underline{\subsetneqq} \{a, b, c\}$;　　(6) $\{c, b, a\} \underline{\supsetneqq} \{a, b\}$;

(7) $\{c, b, a\} \underline{=} \{a, b, c\}$;　　(8) $0 \underline{\notin} \{1, 2, 3\}$.

【例 1-2】 证明下列等式:

(1) $A\cup(A\cap B)=A$;

思路:证明等式两边相互包含.

$\forall x\in A\cup(A\cap B)$, 有 $x\in A$ 或 $x\in A\cap B$. 无论哪种情形都有 $x\in A$, 由此可得 $A\cup(A\cap B)\subseteq A$, 反过来 $A\subseteq A\cup(A\cap B)$是显然的.

(2) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

【证明】 $\forall x\in A\cap(B\cup C)$, 有 $x\in A$ 且 $x\in B\cup C$. 也就是 $x\in A$, 且 $x\in B$或 $x\in C$. 若 $x\in B$, 则 $x\in A\cap B$; 若 $x\in C$, 则 $x\in A\cap C$, 故 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$, 因此, $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$. 类似可证: $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$.

【例 1-3】 设 A 是非零的有理数集, 令:

$$\sigma: x \longrightarrow \frac{1}{x},\quad \tau: x \longrightarrow \frac{1}{x^2+1}$$

σ 是不是A 到自身的映射? 单射? 满射? 对 τ 回答同样的问题.

【解】 σ 是A 到自身的映射、单射、满射; τ 是映射, 但不是单射, 因为 x 与 $-x$ 的像相同. τ 也不是满射, 因为 $1\in A$, 而 1 没有原像.

【例 1-4】 设 $A=\mathrm{R}$,

$$\sigma: x \longrightarrow x+b,\ \tau: x \longrightarrow x^2+c,$$

其中 b, c 是 R 中的定数, 试求 $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, 问 σ 是不是双射? 如果是, 求 σ^{-1}.

【解】 $\sigma\tau$: $x \longrightarrow x^2+c+b$, $\tau\sigma$: $x \longrightarrow x^2+2bx+b^2+c$, σ 是双射, σ^{-1}: $x \longrightarrow x-b$.

【例 1-5】 设 $\sigma: A \longrightarrow B$, $\tau: B \longrightarrow C$ 是映射, 又令 $h=\tau\sigma$, 证明:

(1) 如果 h 是单射, 那么 σ 也是单射;

(2) 如果 h 是满射, 那么 τ 也是满射;

(3) 如果 σ, τ 都是双射, 那么 h 也是双射, 且

$$h^{-1}=(\tau\sigma)^{-1}=\sigma^{-1}\tau^{-1}.$$

【证明】 (1)反证法. 设 σ 不是单射, 则存在 x_1, $x_2\in A$, $x_1\neq x_2$, 但

$\sigma(x_1)=\sigma(x_2)$. 因此 $\tau(\sigma(x_1))=\tau(\sigma(x_2))$, 即 $h(x_1)=h(x_2)$, 与 h 是单射矛盾.

(2) 对任意 $c\in C$, 存在 $a\in A$, 使 $h(a)=c$, 即 $\tau(\sigma(a))=c$, 令 $b=\sigma(a)\in B$, 有 $\tau(b)=c$. 所以 τ 是满射.

(3) 对任意 $c\in C$, 由 τ 是满射知, 存在 $b\in B$, 使 $\tau(b)=c$; 对这个 b, 由 σ 是满射知, 存在 $a\in A$, 使 $\sigma(a)=b$. 因此有 $h(a)=\tau(\sigma(a))=\tau(b)=c$, 所以 h 是满射.

由 σ, τ 都是单射容易得出: h 是单射.

最后证: $h^{-1}=(\tau\sigma)^{-1}=\sigma^{-1}\tau^{-1}$.

$$(\tau\sigma)(\sigma^{-1}\tau^{-1})=\tau\sigma\sigma^{-1}\tau^{-1}=\tau 1_B\tau^{-1}=1_C,$$

$$(\sigma^{-1}\tau^{-1})(\tau\sigma)=\sigma^{-1}\tau^{-1}\tau\sigma=\sigma^{-1}1_B\sigma=1_A.$$

【例 1-6】 设 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 是有限集, σ 是 A 到自身的映射, 证明: σ 是满射的充分必要条件是 σ 为单射.

【证明】 令 $\sigma(A)=\{\sigma(a_1), \sigma(a_2), \cdots, \sigma(a_n)\}$, 显然有 $\sigma(A)\subseteq A$.

必要性: 因为 σ 是满射, 所以 $\sigma(A)=A$. 如果 σ 不是单射, 必存在 $a_i\neq a_j(i\neq j)$, 而 $\sigma(a_i)=\sigma(a_j)$, 从而 $\sigma(A)$ 的元素个数小于 n, 与 $\sigma(A)=A$ 矛盾, 故 σ 是单射.

充分性: 因为 $\sigma(A)\subseteq A$, σ 是单射, 所以 $\sigma(A)$ 的元素个数也是 n, 故 $\sigma(A)=A$, 即 σ 是满射.

【例 1-7】 判断以下数集是否是数环:

(1) $P=\{a\sqrt{3}\mid a\in \mathbb{Z}\}$;

(2) $P=\{a\neq 0\mid a\in \mathbb{Q}\}$;

(3) $P=\{a+b\sqrt{3}\mathrm{i}\mid a, b\in \mathbb{Q}\}$;

(4) $P=\{a+b\sqrt{5}\mid a, b\in \mathbb{Z}\}$;

(5) $P=\{2+3k\mid k\in \mathbb{Z}\}$.

【解】 (1) 不是数环, 因为 $\sqrt{3}\in P$, 但 $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3\notin P$.

(2) 不是数环. 因为 $2\in P$, $-2\in P$, 但 $2+(-2)=0\notin P$.

(3) 是数环. 因为若取 $a=1$, $b=0$, $1=1+0\sqrt{3}\mathrm{i}\in P$, 故 $P\neq\varnothing$. 设 $a+b\sqrt{3}\mathrm{i}$, $c+d\sqrt{3}\mathrm{i}\in P$, 由于 a, b, c, d 都是有理数, 故 $a\pm c$, $b\pm d$, $ac-3bd$, $ad+bc$ 也都是有理数, 于是

$$(a+b\sqrt{3}\mathrm{i})\pm(c+d\sqrt{3}\mathrm{i})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{3}\mathrm{i}\in P,$$
$$(a+b\sqrt{3}\mathrm{i})(c+d\sqrt{3}\mathrm{i})=(ac-3bd)+(ad+bc)\sqrt{3}\mathrm{i}\in P.$$

这样 P 对加、减、乘均封闭，故 P 是数环.

(4) 是数环. 证明同(3)类似.

(5) 不是数环. 因为 $2\in P$(取 $k=0$)，$5\in P$(取 $k=1$)，但不存在整数 k，使 $7=2+3k$，所以 $2+5=7\notin P$.

【例 1-8】 证明：$P=\{a+b\sqrt{3}\mathrm{i}\mid a,\ b\in\mathbf{Q}\}$是数域.

【证明】 由上题知 P 是一个数环，且含有一个不为 0 的数 1(取 $a=1$，$b=0$). 当 $c+d\sqrt{3}\mathrm{i}\neq 0$ 时，c，d 不同时为 0，于是 $c-d\sqrt{3}\mathrm{i}\neq 0$，因此 $(c+d\sqrt{3}\mathrm{i})(c-d\sqrt{3}\mathrm{i})=c^2+3d^2\neq 0$，

$$\frac{a+b\sqrt{3}\mathrm{i}}{c+d\sqrt{3}\mathrm{i}}=\frac{(a+b\sqrt{3}\mathrm{i})(c-d\sqrt{3}\mathrm{i})}{(c+d\sqrt{3}\mathrm{i})(c-d\sqrt{3}\mathrm{i})}=\frac{(ac+3bd)+(bc-ad)\sqrt{3}\mathrm{i}}{c^2+3d^2}$$
$$=\frac{ac+3bd}{c^2+3d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+3d^2}\sqrt{3}\mathrm{i}$$

由于$\frac{ac+3bd}{c^2+3d^2}$，$\frac{bc-ad}{c^2+3d^2}$都是有理数，所以$\frac{a+b\sqrt{3}\mathrm{i}}{c+d\sqrt{3}\mathrm{i}}\in P$，故 P 是一个数域.

【例 1-9】 $P=\{a+b\sqrt{5}\mid a,\ b\in\mathbf{Z}\}$是否是一个数域?

【解】 不是数域，因为 $2=2+0\sqrt{5}\in P$，$3=3+0\sqrt{5}\in P$，但$\frac{2}{3}\notin P$.

【例 1-10】 证明：$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$ 对一切自然数 n 均成立.

【证明】 因为 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，所以只需证 $1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

(1) 当 $n=1$ 时，左边$=1^3=1$，右边$=\left(\frac{1\times 2}{2}\right)^2=1^2=1$，故 $n=1$ 时命题成立；

(2) 假设 $n=k$ 时命题成立，即

$$1^3+2^3+\cdots+k^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

那么当 $n=k+1$ 时，由归纳假设得：

$$
\begin{aligned}
1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3 &= \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3 \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4}+\frac{4(k+1)^3}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2[k^2+4(k+1)]}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\
&= \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2,
\end{aligned}
$$

所以命题对一切自然数 n 均成立.

【例 1-11】 证明：对任意自然数 $n>1$，都有

$$2^{n-1}(a^n+b^n)>(a+b)^n. \tag{1}$$

这里 $a+b>0$，$a\neq b$.

【证明】 (1) 验证 $n=2$ 时，不等式(1)成立.

因为$(a-b)^2>0$，两边同时加上$(a+b)^2$，得

$$(a-b)^2+(a+b)^2>(a+b)^2,$$

由此得

$$2(a^2+b^2)>(a+b)^2.$$

因此当 $n=2$ 时，不等式(1)成立.

(2) 假设 $n=k(k\geqslant 2)$时，不等式(1)成立，即有

$$2^{k-1}(a^k+b^k)>(a+b)^k. \tag{2}$$

现证 $n=k+1$ 时不等式(1)成立，即证

$$2^k(a^{k+1}+b^{k+1})>(a+b)^{k+1}. \tag{3}$$

因为 $a+b>0$，在不等式(2)两边同时乘以 $a+b$，得

$$2^{k-1}(a^k+b^k)(a+b)>(a+b)^{k+1}.$$

要证不等式(3)，只需证明不等式

$$2^k(a^{k+1}+b^{k+1})>2^{k-1}(a^k+b^k)(a+b).$$

将上式依次变形为

$$
\begin{gathered}
2(a^{k+1}+b^{k+1})>(a^k+b^k)(a+b), \\
a^{k+1}+b^{k+1}>a^kb+ab^k, \\
(a^k-b^k)(a-b)>0,
\end{gathered}
\tag{4}
$$

现证(4)式成立. 若 $a>b$，而且题设 $a+b>0$，则 $a^k>b^k$. (4)式左边是两个正数之积. 若 $a<b$，而且题设 $a+b>0$，则 $a^k<b^k$，(4)式左边是两个负数之积.