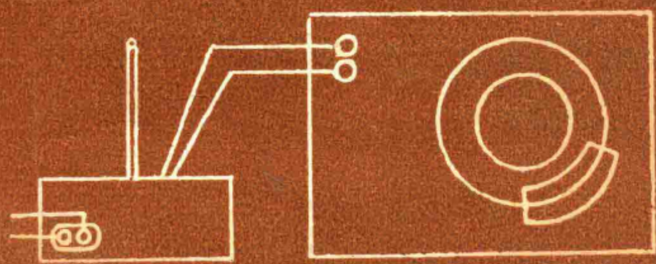
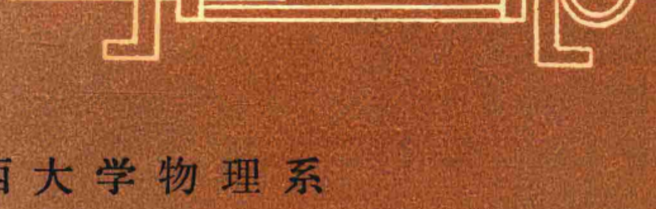
普通物理实验

（非物理专业用）





江西大学物理系

目　录

物 理 实 验

总 论

§1 物理实验的目的要求

物理学是自然科学中最重要的部门之一。它是以实验为基础的科学。实验就是通过测量或验证现象间定量的关系，从而确定物理学定律，每一定律的正确与否是由实践或实验来决定的。由此可知实验在物理学中有何等重要的意义！

物理实验是物理学的主要基础课之一。它的目的主要是：

1、学习物理实验的基础知识，基本方法，培养实验技能（包括仪器使用，测量技术，实验方法，有效数字及数据处理，实验结果的判断和分析）。

2、通过实际的观察、测量，从理论和实际的结合上深入认识物理现象，学习和掌握基本的物理概念和规律。

3、培养认真严肃，实事求是的科学态度和工作作风。

为了达到上述目的，要求在实验开始前，必须细心阅读实验教材中的有关部分和课堂讲授中的有关理论部分，必要时还要参考一些有关的文献(由教师指定)。在充分了解所做实验的原理，目的、要求、程序，以及仪器的构造及其用法，实验进程中要注意的事项等后，方可开始实验，决不可只按指导中所列的手续不开动脑筋，机械地去进行实验，也不能急于求成，草率了事。做实验不在乎多，而在于对每一有代表性的实验能够充分体会它所代表的装置上，操作上和计算上的特点。做实验的主要目的更不在于仅仅求得实验结果（数据），而在于对原理、方法的理解和正确的实验态度的培养。

有些人因盲目地进行实验，当得到不满意的结果或所得数据和书上所说的不符时，便埋怨仪器不好或因而丧失信心，这是由于不明白上面所说的物理实验的目的要求的缘故。没有明确的目的要求，没有正确的方法和态度，即使使用最高级的精密仪器，也得不到好的结果。相反地，如果我们在实验时有明确的目的性，在实验的进程中能够使用正确的方法和保持正确的态度，那么，尽管仪器差一些，也可以发挥仪器的最大效率，在一定的仪器性能的条件下，求得尽可能准确的数据，甚至能够进一步对所给的仪器作一些检验、校准和修理的工作，（这些工作非经指定，不要随便去做！）

有一句话，在实验中我们始终不要忘记："做实验的是人而不是仪器"。

§2 实验时应注意的事项

实验时注意的事项很多，在这里只能按上节所说的目的要求将一般性的较基本的问题说

一说，每一物理实验可以分为下列几个步骤来进行。

（一）实验的准备工作；

（二）进行观测和读数；

（三）数据的整理和计算

（四）实验报告；

（五）使用仪器。

现将以上五个步骤中要注意的事项列举如下：

（一）实验的准备工作

（1）实验开始前必须将有关教材（指导书等）仔细阅读。要做到明确这实验的目的要求，实验所根据的原理，实验的装置每一步的做法及其意义，并估计可能发生的困难，误差的避免或减少，及其它应注意的地方。

（2）必须准备一本实验笔记本，以备及时记录实验过程中的心得体会，异常现象以及进行原始数据的计算等。

（3）为了实验时便于记录数据，应予先按实验所需记录的物理量画制表格，以备实验时填用。

（4）实验开始前先要将实验所需用的仪器加以检点，如发现用具、零件或材料等不够，可向仪器管理员补领。如发现仪器有破损，须向教师申明，由教师检查后处理。

（5）如有各组共同使用的仪表，各组事前可商定使用时间的先后，然后来安排自已的实验，且使用时要尽可能节省时间，以免妨碍他组进行实验。

（6）仪器的安装是实验中的一件重要工作，仪器必须正确地安置，应注意实验时的各种外部与内部的情况及测量的条件。例如：温度、湿度、压力的响影，水平及竖直方向，电路中的连接，操作上的便利等等，事先必须加以仔细地考虑。

（二）进行观测和读数

（1）实验必须亲自动手，充分发挥独立的工作能力，每一动作必须在理解有关实验的基本知识之后，才能进行。

（2）在观测过程中，应注意仪器的性能、使用方法和操作技术。

（3）遇有困难或发生问题，必须开动脑筋，寻求解决，不能解决时，才问教师。必须在困难问题解决之后，方可继续实验。

（4）每一操作阶段完毕，应作检查（如原始数据的计算，方法的正确与否等），然后再进行下一阶段操作。

（5）观察时应集中注意力，保持冷静客观的态度来进行，一切主观上的偏见，都会妨碍读数的准确性。

（6）读数时要设法尽可能减少“视差”。

（7）实验中所观察的现象及测得的数值（原始数据）须及时记录在予先画制好的记录表格上。无论如何简单的运算，都不应仅记其运算结果而略去原始数据。

（8）每一参加实验的成员都要有自已的数据，所以在某些实验中观测与记录的两项工作最好轮流来做；在规定的实验时间内不能做两次的实验（如热学方面的实验），则须事先考虑如何使每人对于每一物理量都有观测和读数的机会。

（9）一切实验要在规定时间内完成，必要时可在另外时间补做或重做。

（10）每次实验完毕即将实验原始数据交指导教师审查并鉴字。

（11）实验完毕在离实验室前应将所用仪器检查整理，并请指导教师清点，如有损坏，应登记赔偿。

（三）数据的整理及计算

（1）实验结果的整理与计算，必须在实验时间内完成。如遇有比较麻烦的实验，在实验时间内不能完成的，亦要在当晚计算，不可搁置。

（2）计算的主要过程要在实验笔记簿上进行，并要写入实验报告上。

（3）在计算开始时及演算中，要注意测定的误差及有效数字（见14）。

（4）计算务必要层次分明，井井有条，如此可以避免错误，即使有错误亦容易查出。

（四）实验报告

（1）实验报告须于实验后在规定时间内交指导教师批阅，如经发现修改原始数据者，须于退还，一周内重做。并给予批评。

（2）实验报告按照规定格式填写，注意条理、整齐、明确并注意把演算过程写上。

（3）实验报告一般书写项目

①实验名称；

②实验目的；

③实验原理（包括主要公式——不要推导）

④记录表格（填写原始数据）；

⑤演算过程及结果；

⑥回答实验讲义上提出的问题，或分析实验结果，或分析误差来源，或写做实验感受。

（五）使用仪器

在这里再谈谈使用仪器应注意事项。实验室内设置的一切仪器、工具、材料都是国家的宝贵财产，从事实验者必须加以爱护合理使用，严禁一切以粗暴的态度对待仪器及浪费材料等行为。

使用每一件仪器前，都应先了解其性能及用法、然后方可使用，每一种仪器使用时都有它应注意的事项，这些事项和用法只能在实验中去学习，不能在这里一一列举。现在只能将使用仪器时一般应注意的事项，列举如下：

（1）一般地说，愈高级的精密仪器，则构造愈复杂和愈灵敏，因而愈容易弄坏(失灵)，故使用时要特别小心。

（2）调节任何仪器的任何部分，都不能生硬地使用腕力。

（3）精密仪表上的固定螺旋不可随便旋动。

（4）仪器的金属部分的刻度，游标等切不可用手摸。

（5）光学仪器的透镜及棱镜等不可用手摸。

（6）搬动高级或较重的仪器时必须用双手。

（7）不可将电表直接插入电源。

§3 关于测量的误差

测量可分直接测量和间接测量。直接测量就是要直接测定某一量，要知道它等于单位量

的多少倍。例如以直尺测长度，用天平测质量等。但在大多数的情形中，直接测出的不是所求的量，而是若干个与它有着已知关系的其他各量，然后根据这些直接测得的量值与待测量的函数关系求出待测量。例如重力加速度可以由摆长和摆周期来测定，这种测量称为间接测量。

物理量数值的测定，不能单靠人类易于变化的感觉（如视觉听觉等）来实施，而必须利用适当的仪器去测定才能得到客观的判断，但是无论使用如何精密的仪器，无论选择什么良好的实验方法和提高实验技术，测定值的最后决定，仍基于观察的感觉（主要是视觉）来作最后的判断。这是所有的观测都不可避免的事情，所以观测中经常带有一定程度的不正确性。观测所得的值叫做观测值。观测值所带的不准确度叫做误差，设某物理量的观测值为N，其真值（通常是不知道的）为M，则其误差△N为：

$$\triangle N = |M - N|$$

（一）误差产生原因

1、系统误差

（1）个人的误差：是由于观察者的习惯和实验修养不好生成的误差。例如用秒表测时间时，有人常常按表过早，也有人按表稍迟。

（2）理论的误差：当求不能直接测量的物理量时，必先测定与该量有关而可以测定的其他量，然后利用这些量之间的关系，把要寻求的物理量计算出来。如果所用关系式含有理论上的误差，则无论怎样精密地去测量这些有关的量，其计算结果必然存在着误差，这种误差称为理论上的误差。

例：如在推出单摆中的周期T，摆长l和重力加速度g的关系式时，曾假定摆角θ甚小，则$\sin\theta$可用θ代之。如θ角在2°以下，则误差在万分之几以内，若θ在10°左右其理论误差几乎达百分之一。又如测量物体重量时，没有考虑空气对物体产生的浮力。

（3）仪器的误差；这是由于所用仪器不正确而产生的。例如天平的两臂不等长，米尺的制作是在0℃，而使用在10°C等，温度计的零点不够正确等。

以上三种误差均可按其产生原因的不同，分别加入适当的注意或用适当的办法加以修正或纠正。例如米尺因温度变化而不正确时可按米尺材料的胀膨系数作温度的修正。

2、偶然误差：

在实验中，如果选择了精密的仪器，利用了恰当的方法和正确的理论，经过细心测定，免除了上述的误差，但是同一个人使用同一仪器，以同样的注意程度反复测定一物理量，所得测定的最末一两位数字往往是不一样的。这是因为我们进行的实验决不可能与外界所有的事物都不发生关系，而外界的事物又在时刻变化着，这些变化着的周围事物使实验过程中的现象发生变化，其对于仪器精密度的影响也随时在变化，其次也是由于每次读数不准确而产生，这种不准确是任何实验者都完全可能无意地引入的，其产生原因是由于我们的感觉有缺陷。所有这些变化或缺陷是难制以控或确定的，因此这种误差也必然是不可避免的。这些误差一般称为偶然误差。偶然误差服从或然率的定律。这就是说，如果在某次测量得到的结果较真值为大，那么在其后每次测量中得到的结果就有同样可能较真值为小。在这种情形之下，完全可以看出，多次反复进行同一测量就可减少这种偶然误差的影响，因为我们没有根据认为测量结果对真值的偏差在某一方面比另一方面更为可能。所以无疑的，由多次测量结果而得的算术平均值比所有各次测量结果更接近于所测量的真值。

除了上述的系统误差和偶然误差之外，尚有因为实验不小心将指针的示度读错（例如指针的示度为3.4而误读为8.4），或记录数据时将数字或小数点的位数弄错等。这些都是由于实验者的粗枝大叶而产生的过错或错误，一般称之为粗差（或称过失误差）。实验必须小心注意才能使观测不犯错误、并使误差在可能范围内减至最小。

一般在误差理论中所述的误差，皆属上面所说的偶然误差。

（二）误差的估计和表示

在测量中总会有估计的数，例如：用米尺测量长度，米尺上最小的刻度是毫米，观测者在测量时发现物体的长度是在6.4厘米与6.5厘米之间，还可以估计物体的长度到十分之几毫米，这时，就得到比毫米更小的一位数字。但这个估计的数字，例如是0.3毫米。很可能比实际长度大一些或小一些（假定实际上是0.2毫米或0.4毫米），这样，我们就说这一长度的误差是0.1毫米，而表示为：

$$6.43\pm0.01\text{厘米}$$

误差有绝对误差和相对误差两种，兹举例说明如下：

设N_1N_2、$N_3\cdots$，N_K是各次测量的结果，K是测量的总次数，则

$$\overline{N}=\frac{N_1+N_2+\cdots\cdots+N_K}{K} \tag{1}$$

是最接于被近于被测量之真值，各次测量数值与这平均值之差，即

$$\triangle N_1=|\overline{N}-N_1|\text{、}\triangle N_2=|\overline{N}-N_2|,\ \cdots\cdots,\ \triangle N_K=|\overline{N}-N_K|$$

叫做各次测量的绝对误差。而

$$\triangle\overline{N}=\frac{\triangle N_1+\triangle N_2+\cdots+\triangle N_K}{K} \tag{2}$$

则叫做平均绝对误差。

又把比值$\frac{\triangle N_1}{N_1}$，$\frac{\triangle N_2}{N_2}$，…，$\frac{\triangle N_K}{N_K}$叫做各次测量的相对误差，而把

$\frac{\triangle\overline{N}}{\overline{N}}$叫做平均相对误差，或叫测量结果的相对误差。

通常以百分数表平均相对误差，用δN表示，即

$$\delta N=\frac{\triangle\overline{N}}{\overline{N}}\times100\% \tag{3}$$

在实际运算中，一般是考虑误差的最大值。例如，我们用最小刻度为毫米的尺量长度，测得结果中误差的最大值不超过0.5毫米。量值为3.65厘米，则表示其真值在〔3.65±0.05〕厘米之间。也就是我们用仪器的精确度的$\frac{1}{2}$刻度可以定出最大的绝对误差；同时也可以得到最大的相对误差，即用绝对误差的最大值比上测量的近似值。在上例中，相对误差的最大值为：

$$\frac{0.05}{3.65}=\frac{5}{365}=\frac{1}{73}=0.01$$

这种算法可以帮助我们确定在四则运算中的有效数字个数，此问题在后面再详细来说明。

用百分数表相对误差是比较重要的，它可以表示出测量结果的好坏，而仅仅考虑绝对误差就不能做到这一点。例如，称得两物体的质量为[489.5±0.1]克和[5.06±0.01]克，在绝对误差来说，第一量的误差为第二量误差的十倍，但如用百分数的相对误差来表示时，第一量的相对误差为0.02或2%，而第二量的相对误差为0.2或20%。由此可见测量值的准确度不在于绝对误差的大小，而决定于相对误差的大小。所以相对误差在判断实验结果的准确度时有更大的实际意义。

（三）误差的计算

实验中常需要对所测得的量进行计算，因此就有必要研究总结果中的误差。现在把误差的计算方法简单介绍如下：

（1）两量之和或差的绝对误差，等于各分量绝对误差之和。

设 $N=A+B$ （5）

式中A，B是被测量的平均值，它们的平均绝对误差各为$\pm\Delta A$及$\pm\Delta B$，（要引起注意的是，在这里N、A、B、ΔA、ΔB及符号上方的平均值符号“—”为了书写简便起见，都省去了）设和的平均绝对误差为ΔN，则

$N\pm\Delta N=(A\pm\Delta A)+(B\pm\Delta B)$

在计算中应该考虑到最坏的情况，所以我们取ΔA，ΔB为同号故

$\pm\Delta N=\pm(\Delta A+\Delta B)$ （6）

得 $\Delta N=\Delta A+\Delta B$

即和的绝对误差等于加数的绝对误差之和。

两量之和的相对误差为：

$$\frac{\Delta N}{N}=\frac{\Delta A+\Delta B}{A+B} \qquad (7)$$

同理、如$N=A-B$ （8）

则$N\pm\Delta N=(A\pm\Delta A)-(B\pm\Delta B)$

考虑ΔA，ΔB为异号，则有

$\pm\Delta N=\pm(\Delta A+\Delta B)$ （9）

得 $\Delta N=\Delta A+\Delta B$（即为两量绝对误差之和）

故两量之差的相对误差，为：

$$\frac{\Delta N}{N}=\frac{\Delta A+\Delta B}{A-B} \qquad (10)$$

（2）两量之积或商的相对误差，等于各个量的相对误差之和。

设 $N=A\cdot B$ （11）

则积的绝对误差为$\Delta N=A\cdot\Delta B+B\cdot\Delta A$

相对误差为$\dfrac{\Delta N}{N}=\dfrac{\Delta A}{A}+\dfrac{\Delta B}{B}$

如果设 $\Delta N = \frac{A}{B}$ （13）

则 $\triangle N = \frac{B\triangle A + A\triangle B}{B^2}$

故 $\frac{\triangle N}{N} = \frac{\triangle A}{A} + \frac{\triangle B}{B}$ （14）

由上我们看到，积与商的相对误差具有相同的形式。

此外，我们也可求出乘方、开方和三角函数的绝对误差及相对误差。

列表如下：

数学运算形式	绝对误差$\triangle N$	相对误差$\frac{\triangle N}{N}$
$N = A + B$	$\triangle N = \triangle A + \triangle B$	$\frac{\triangle N}{N} = \frac{\triangle A + \triangle B}{A + B}$
$N = A - B$	$\triangle N = \triangle A + \triangle B$	$\frac{\triangle N}{N} = \frac{\triangle A + \triangle B}{A - B}$
$N = A \times B$	$\triangle N = B\triangle A + A\triangle B$	$\frac{\triangle N}{N} = \frac{\triangle A}{A} + \frac{\triangle B}{B}$
$N = A^m$	$\triangle N = mA^{m-1}\triangle A$	$\frac{\triangle N}{N} = m\frac{\triangle A}{A}$
$N = \frac{A}{B}$	$\triangle N = \frac{B\triangle A + A\triangle B}{B^2}$	$\frac{\triangle N}{N} = \frac{\triangle A}{A} + \frac{\triangle B}{B}$
$N = \sqrt[n]{A}$	$\triangle N = \frac{1}{n}A^{\frac{1}{n}-1}\triangle A$	$\frac{\triangle N}{N} = \frac{1}{n}\ \frac{\triangle A}{A}$
$N = \mathrm{Sin}A$	$\triangle N = \mathrm{Cos}A \cdot \triangle A$	$\frac{\triangle N}{N} \mathrm{Cot}A \cdot \triangle A$
$N = \mathrm{Cos}A$	$\triangle N = \mathrm{Sin}A \cdot \triangle A$	$\frac{\triangle N}{N} = \tan A \cdot \triangle A$
$N = \tan A$	$\triangle N = \frac{\triangle A}{\mathrm{Cos}^2 A}$	$\frac{\triangle N}{N} = \frac{2\triangle A}{\mathrm{Sin}^2 A}$

§4 关于有效数字

我们掌握了上面的规律和公式，就不难求出计算结果中的总误差。

根据前节所述，实验所得的测定值代表一定的精确程度，因此在记数值时，应以表示能测到的位数为限，切不可随意增加或减少。这样写出的数字，除以表示小数点的位置的“0”以外，所有的数字位置称为有效数字，而小于最小刻度的估计数（即在测量时只能用目力估计得到的部分）叫做可疑数字，有效数字的最后一位数是包括了这一位可疑数字。例如：用

最小刻度为厘米的尺来测量某两点间的距离得185.4厘米或1.854米。这时最后的数字“4”是用眼力估计的可疑数字也包括在测定值中，故这数值的有效数字为四位。

设以毫米分度的尺量长约数十厘米的长度时，眼力估计可达0.01厘米，则测定值的有效数字共有四位，比如说36.88厘米、若是少记一位、粗略地采用四舍方法记作36.9厘米，将使读者以为测定值的准确度仅达0.1厘米，这样便没有正确地把测定值的准确度表达出来。反之如果在小数后多记一位零，写作36.880厘米、即使加上的是一个“〇”（在数学上，小数点数字后虽可以任意加减“〇”，但物理学上的数字则不能如此），实际上就使数值的准确度增加十倍，这和测量的实际情况不符，因而失去其所代表的真实性。

有效数字的位数不受小数点位置的影响，也就是说在计算时，与所取的单位无关。如果测量某长度得68.40厘米，是四位有效数字的测定值，若改写为684.0毫米，或0.6840米，或0.0006840千米、则此三数的有效数字均仍为四位，测定值的准确度不变。但须注意，若将76千米改写为76.000米，或7600.000厘米时、则意义有很大的不同。因此时后两数各表五位和七位有的效数字。在此情况下，应分别写7.6×10^4米和7.6×10^6厘米，表示有效数字仍为两位。同样，过小的量可用10的乘方相乘来表示，如红色光的波长写作6.660×10^5厘米。这种写法的好处不但能够把有效数字的位数准确的表示，而且计算简结，易于查看，可以避免错误，并且在用对数表时很方便（用10的指数可作为对数的首数）。

（一）有效数字的计算

为了确定二量实行加减或乘除后所得数值的有效数字，可运用下列二规则。

（1）凡求两个或两个以上的各数之和或之差时，所得结果的可疑位数，应以各数中的最大可疑位数为准（单位当然要相同）。

例：$176.\underline{5}$ 厘米 $+ 0.29\underline{4}$ 厘米 $= 176.\underline{8}$ 厘米

$$\begin{array}{r} 176.\underline{5} \\ +\quad 0.29\underline{4} \\ \hline 176.\underline{7}9\underline{4} \end{array}$$

因为$\underline{7}$已是可疑，所以94两位就没有意义。所以完全可以省略它，在省略时要四舍五入，结果应写为176.8厘米。

（2）在乘除法中计算结果的有效数字的位数是以有效数字位数最少的来决定。

例1：$121.2\underline{3}\times1.2\underline{4}=1.5\underline{0}\times10^2$

$$\begin{array}{r} 121.2\underline{3} \\ \times\quad 1.2\underline{4} \\ \hline \underline{4}\,\underline{8}\,\underline{4}\,\underline{9}\,\underline{2} \\ 2\,4\,2\,4\,\underline{6} \\ 1\,2\,1\,2\,\underline{3} \\ \hline 1\,5\,\underline{0}.\underline{3}\,\underline{2}\,\underline{5}\,\underline{2} \end{array}$$

因此由于$\underline{4}$是可疑数字，那么它所乘出的数字都是可疑数字，所以在结果中只有三位有效数字，即所得结果的有效数字的位数与乘数（1.2 4）的有效数字的位数相同。但是由于要正确表明小数的位置和应得的有效数字位数，所以把它写成指数的形式：

（1.50×10^2）

例2：$176.6\underline{8}\div0.05\underline{4}=3.\underline{3}\times10^3$

```
           3.27
0.054 ) 176.68
        162
        ----
         146
         108
         ----
          388
          378
          ---
           1.0
```

因为商里边的2已经是第一位可疑数字，再得的7就应四舍五入，而商数中也只应该有两位有效数字。

（3）测量值和常数相乘除时，以测量值的位数为准。

如　　$72.\underline{4}\times 3 = 217$

式中72.4为测量值，3为常数，结果217为三位，因为它本身不是测量得到的数值，而是一个常数，它本身就没有有效位数可言。

（4）测量值和已知量相乘时，要依测量的位数来选择已知量的位数。

例：$0.25\times\pi$时，则π只要3.14三位，较测量值多取一位（理由见（二）（2））即可：

$$0.25\times 3.14 = 0.7\underline{9}$$

但如　　$1.02\underline{3}\times\pi$时，则$\pi$需要取3.1416五位才成：

$1.023\times 3.1416 = 3.221$

（5）对数的尾数的位数与真数的有效数字的位数相同。

（二）实验过程中的记录与计算

（1）直接读数

是指由仪器直接读出的测量值，这些数值就限制了以后的计算过程中有效数字位数取舍。有效数字的取法：是在仪器的最小分度后，再用目力估计一位为止。

（2）在计算过程中加减乘除按照前节所述的方法选取有效数字的位数，但是为了避免在繁锁的计算过程中由于四舍五入次数太多时，积累的结果会引起较大的误差，故在计算过程中（即在未得出结果以前）常在可疑数字后再留一位，以免引起较大的误差。

（3）在计算结果的数值中，可疑数字仍只留一位。

（4）表示误差时一般只取一位有效数字，至多不能超过两位有效数字。

如误差$=\dfrac{980-978}{980}\times 100\%$

其结果要写成0.2%而不可写成0.204%

（三）用相对误差判断有效数字的位数

在上面我们曾经规定，在乘除运算中积或商的有效数字的位数与运算的各数中有效数字位数最少的相同、实际上，有些情况不是这样，即有时比有效数字位数最少的一个还要少一位。

下面我们介绍一种用相对误差来判断有效数字位数的方法。

1．乘法　　　　$N = A\times B$

那么

$$\frac{\Delta N}{N}=\frac{\Delta A}{A}+\frac{\Delta B}{B}$$

若 $\frac{\Delta A}{A} >> \frac{\Delta B}{B}$， 则 $\frac{\Delta N}{N} \geqslant \frac{\Delta A}{A}$

〔例1〕 $N = 13.1 \times 62.115$

对于数据13.1，最末一位0.1为估计数字，第二位为准确数位，即仪器的最小刻度，此值按测量数据的绝对误差小于或等于0.5（仪器最小分度的一半）。因此13.1的相对误差为 $\frac{0.5}{13.1}$，62.115的相对误差为 $\frac{0.005}{62.115}$，显然 $\frac{0.005}{62.115}$ 比 $\frac{1}{26.2}$ 小得多，可以忽略，$\frac{\Delta N}{N} \geqslant \frac{1}{26.2}$。今平均值$N$的第一位有效数字为8，若取三位有效数字，则相对误差 $\frac{\Delta N}{N}$ 约为 $\frac{5}{800}$ 不能满足 $\frac{\Delta N}{N} \geqslant \frac{1}{26.2}$，而取二位有效数字时，相对误差 $\frac{\Delta N}{N}$ 约为 $\frac{5}{80}$，能满足 $\frac{\Delta N}{N} \geqslant \frac{1}{26.2}$（即 $\frac{5}{80} = \frac{1}{16} \geqslant \frac{1}{26.2}$），因此只能取二位有效数字，即 $N = 13.1 \times 62.115 = 8.1 \times 10^2$。

〔例2〕 $N = 91.21 \times 2.15$

91.21的相对误差为 $\frac{0.05}{91.21}$，而2.15的相对误差为 $\frac{0.05}{2.15}$，显然后者大于前者，我们只考虑2.15的相对误差 $\frac{0.05}{2.15} = \frac{5}{215}$，$\frac{\Delta N}{N} \geqslant \frac{5}{215}$，今平均值$N$的第一位有效数字为1，取三位有效数字，其相对误差 $\frac{\Delta N}{N}$ 约为 $\frac{5}{100}$，能满足 $\frac{\Delta N}{N} \geqslant \frac{5}{215}$ 即 $\frac{5}{100} \geqslant \frac{5}{215}$ 成立，此题可取三位有效数字，即

$$N = 91.21 \times 2.15 = 196$$

2、除法

$$N = \frac{A}{B}$$

那么

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}$$

若 $\frac{\Delta A}{A} \geqslant \frac{\Delta B}{B}$，则 $\frac{\Delta N}{N} \geqslant \frac{\Delta A}{A}$

〔例3〕 $N = \frac{10.2}{112.365}$

据上同样理由，因为 $\frac{0.5}{10.2} >> \frac{0.005}{112.365}$，应有 $\frac{\Delta N}{N} \geqslant \frac{0.5}{10.2}$，今$N$的第一位有效数字为9，故只能取二位有效数字，即

$$N=\frac{10.2}{112.365}=0.091=9.1\times10^{-2}$$

〔例 4〕 $N=\frac{10.2}{1.12}$

$\frac{\Delta A}{A}+\frac{\Delta B}{B}=\frac{0.5}{10.2}+\frac{0.05}{1.12}=0.049+0.045=0.094=\frac{9.4}{100}$，今$N$的第一位有效数字为 9 ，故应只有两位有效数字

$$N=\frac{10.2}{1.12}=9.1$$

3 、连续乘除

$N=\frac{A\times B}{C}$， 则$\frac{\Delta N}{N}=\frac{\Delta A}{A}+\frac{\Delta B}{B}+\frac{\Delta C}{C}$

〔例 5〕 $N=\frac{12.1\times3.89}{10.1}$

$$\frac{\Delta A}{A}+\frac{\Delta B}{B}+\frac{\Delta C}{C}=\frac{0.5}{12.1}+\frac{0.05}{3.89}+\frac{0.5}{10.1}$$

$=0.041+0.013+0.050=0.104=\frac{10.4}{100}$，今$N$的第一位有效数字为 4 ，故只能取二位有效数字，即

$$N=\frac{12.1\times3.89}{10.1}=4.7$$

当仅出现乘除运算时，可以得出结论：

第一、间接测量数值的有效数字的位数与直接测量值的有效数字位数最小的相同，有时还少一位。

第二、间接测量数值若要达到N位有效数字，则各直接测量值至少要有N位，一般应保证有$N+1$位。例如，用单摆来测重力加速度g时，有公式$g=4\pi^2\frac{L}{T}$，如g要求有三位有效数字，则L和T应有四位有效数字，若已知L约为 3 米左右，T为 2 秒左右，则L应准确到毫米，T应准确到千分之一秒，才能保证有四位有效数字，显然较困难的问题在于测周期。

（四）用绝对误差来表示正确数值的方法

用有效数字来表示和运算误差的方法，尽管很简单，但是却不严格，它往往将误差放大了。此外，有效数字中规定其绝对误差为最末一位准确数字的一半（即最小分度值的一半）也是不恰当的，实际情形是有些比这大，有些比这小。例如当由直径计算半径时，15.32/2 = 7.66，四位有效数字只有三位有效数字，这是说不通的，实际上因为15.32被2除后，其绝对误差也变小了一半，所以7.66的相对误差并没有变，这就是用绝对误差来表示正确数值的方法。这种方法较严密，但运算较复杂。

〔例 1〕 $A=13.12\pm0.01$，$B=1.20\pm0.05$

求其和

$\because \quad \Delta N=\Delta A+\Delta B=0.01+0.05=0.06$

$\therefore \quad N=14.41\pm0.06$

即$14.35\leqslant N\leqslant14.47$

〔例2〕 $A=63.842\pm0.002$，$B=1.3\pm0.1$，求其积。

相对误差 $\dfrac{\Delta N}{N}=\dfrac{\Delta A}{A}+\dfrac{\Delta B}{B}=\dfrac{0.002}{63.842}+\dfrac{0.1}{1.3}\approx\dfrac{1}{13}$

而平均值$\overline{N}=63.842\times1.3=82.99\approx83.0$

$\therefore \Delta N=\overline{N}\cdot\dfrac{\Delta N}{N}=\overline{N}\left(\dfrac{\Delta A}{A}+\dfrac{\Delta B}{B}\right)=8.30\times\dfrac{1}{13}=6.4$

故 $N=83.0\pm6.4$

即 $76.6\leqslant C\leqslant89.4$

〔例3〕 $A=63.84\pm0.02$，$B=20\pm1$，求A/B之值。

$$\frac{\Delta N}{N}=\frac{\Delta A}{A}+\frac{\Delta B}{B}=\frac{0.02}{63.84}+\frac{1}{20}\approx\frac{1}{20}$$

而 $\overline{N}=\dfrac{A}{B}=\dfrac{63.84}{20}=3.19$

$\therefore \quad \Delta N=3.19\times\dfrac{1}{20}\approx0.16$

故 $N=3.19\pm0.16$

即 $3.03\leqslant N\leqslant3.35$

〔例 4〕用伸长法测细钢丝的杨氏模量的公式为$E=\dfrac{Fl}{\pi r^2\ \Delta l}$，式中$l$为钢丝的长度，$r$为钢丝的半径，$\Delta l$为在力$F$的作用下的绝对伸长，今已知$l=76\pm1$厘米，$r=0.250\pm0.005$毫米，$F=400\pm10$克，$\Delta l=0.76\pm0.01$毫米。

$$\frac{\Delta E}{E}=\frac{\Delta F}{F}+\frac{\Delta l}{l}+\frac{\Delta 2r}{r}+\frac{\Delta(\Delta l)}{\Delta l}=\frac{10}{4000}+\frac{1}{78}+\frac{2\times0.005}{0.250}+\frac{0.01}{0.76}\approx0.067$$

$$\overline{E}=\frac{Fl}{\pi r^2\ \Delta l}=\frac{4000\times780}{3.142\times0.250^2\times0.76}=2.04\times10^4\text{千克力/毫米}^2$$

$$\Delta E=\overline{E}\cdot\frac{\Delta E}{E}=2.04\times10^4\times0.067=0.14\times10^4\text{千克力/毫米}^2$$

$\therefore E=(2.04\pm0.14)\times10^4$千克力/毫米^2

以上四个例题是解决第一类问题，即已知直接测量值的误差求间接测量值的误差。下面来讲第二类问题，即已知间接测量值要求达到一定的相对误差，求各直接测量值的相对误差

如何？

1.加减法

若 $N=A\pm B$，则 $\Delta N=\Delta A+\Delta B$，假若 ΔA 和 ΔB 相等（或近似相等），则 $\Delta A=\Delta B=\frac{1}{2}\Delta N$

2.乘除法

若 $N=A\times B$，或 $N=\frac{A}{B}$，皆有 $\frac{\Delta N}{N}=\frac{\Delta A}{A}+\frac{\Delta B}{B}$，假若 $\frac{\Delta A}{A}$ 与 $\frac{\Delta B}{B}$ 为相等误差，则

$$\frac{\Delta A}{A}=\frac{\Delta B}{B}=\frac{1}{2}\frac{\Delta N}{N}$$

〔例〕单摆测重力加速度的公式为 $g=4\pi^2\frac{l}{T^2}$，今 g 的相对误差要求达到1/1000，求摆长 l 和和周期长的相对误差。

$\because \frac{\Delta g}{g}=\frac{\Delta l}{l}+\frac{2\Delta T}{T}$，设 $\frac{\Delta l}{l}=\frac{2\Delta T}{T}$，则 $\frac{\Delta l}{l}=\frac{1}{2}\times\frac{\Delta g}{g}=\frac{1}{2000}$

$$\frac{\Delta T}{T}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\Delta g}{g}=\frac{1}{4000}$$

若 l 为 3 米，T 为 2 秒，则 $\Delta l=3\times\frac{1}{2000}$ 米 $=1.5$ 毫米，而 $\Delta T=2\times\frac{1}{4000}$ 秒 $=0.0005$ 秒。

注意，在计算绝对误差时，我们最多只取二位有效数字，而平均值的最末二位与绝对误差对齐。例如：52.1657，若绝对误差为0.015，则结果应写为52.166±0.015。

（五）误差计算对实验的指导意义

1、能确定实验准确度的限度及提高改进实验的方向。

例如在用伸长法测杨氏模量中，看出钢丝的半径的相对误差最大 $\frac{1}{50}$，而杨氏模量 E 又与 r^2 有关，因此相对误差增加一倍，变为1/25，所以在我们这个实验中，最重要的是提高半径的精确度，其次才是绝对伸长 Δl 和钢丝长 l 的问题。

2、能指导我们如何处理数据

例如，在例 4 中，我们是取 4 千克力的平均伸长为0.76毫米来计算的，其相对误差为1/76，如果我们仍用同样的仪器和同样的方法（即绝对误差仍为0.01毫米），而取 1 千克的平均伸长时 $\Delta l\approx 0.19$ 毫米，即相对误差为变 $\frac{0.01}{0.19}=\frac{1}{19}$，即增加 4 倍。

由此可见，测量仪器和方法完全相同，但不同的计算方法得出来的准确度却可以大不相同，通过误差的计算可以指导我们选择正确的处理数据的方法。

最后，我们再强调一次，误差理论主要是解决偶然误差的问题，至于系统误差和过失误差都应假设已减少到可以忽略不计。

我们这里讲的误差是最初等的，还有其他的很多方法，例如用均方根误差，或然误差及最小二乘法等来表示和计算偶然误差，这些将在以后的教学中贯彻。

§5 数据的图示法

实验所得的两相关物理量的几组读数，可用曲线表示于方格纸上（又叫坐标纸），较为明晰，先立纵横坐标轴，令横量坐标表示某一量，纵坐标表示另一量，以各对立的数值标点于方格纸上，联接诸点大约成为一光滑曲线，此曲线若与已知某函数曲线相似，则该两物理量即有该函数的关系，故利用图示法可籍以探求两物理量的关系，推定两量间的关系定律，即所谓实验定律或实验式。

绘图时应注意的事项有如下数点：

（1）应在坐标轴端注明各轴所代表的物理量及其单位，每横格与每纵格所代表的数量不必相同，以划出的曲线不太峻直，不太水平为准。

（2）纵横坐标不一定从零开始，即纵横坐标的起点不必一定代表物理量的零值，但须将所得的数据都能在图中表示出来，且所作的曲线约占纸上的全部而不偏于一边。

（3）坐标轴上每格所代表的数值，其大小相当于能表出数据所能达到的准确程度为主，不可过大，亦不过小，如每格所代表的数值过大，其结果将挤在一起而影响其准度，反之，如每格所代表的数过小，则标点过于分散，以致无法绘制曲线。

（4）每格所代表的数值既已决定，便可将实验数据点于方格纸上，并且以“×”标明，以表示其确实位置，绘制连接各点的曲线或直线。此时应注意不可联成折线，应为光滑曲线，或平整直线，并尽量要使所划曲线（或直线）的两旁具有同样数目的标点。所示各点，因其所代表的数据均带有误差，故其分布为规则形，自属当然之理。

练　　习

一、有效数字运算

1、以下数据各有几位有效数字：

（1）3.2700　　（5）0.004563　　（9）0.007

（2）0.00385　　（6）0.456300　　（10）100.1

（3）1.39×10^{6}　　（7）470×10^{-5}　　（11）9.80×10^{2}

（4）4.003　　（8）10.70　　（12）7600

2、运用有效数字运算规则计算下列结果

（1）$4.237+3.14=?$　　（6）$1.5436-1.54=?$

（2）$18.856-9.24=?$　　（7）$121+0.1003-111=?$

（3）$1.5435-1.5421=?$　　（8）$2.58\times3.7=?$

（4）$1.54-1.5421=?$　　（9）$9.34\times4.2=?$

（5）$1.54+0.00312=?$　　（10）$9.54\div2.83=?$

（11）$182.2\times6.9-27.4\times3.14=?$

（12）$7.520\div2.15+1.3=?$

（13）$2.56\times9.34\div1.27=?$

（14）$12.1\times10^{-3}+1.0\times10^{-4}-12\times10^{-5}=?$

（15）$(4440\times10^{2}\div0.001\times10^{7})+15.2=?$

(16) $\dfrac{19.239}{5.11}=?$

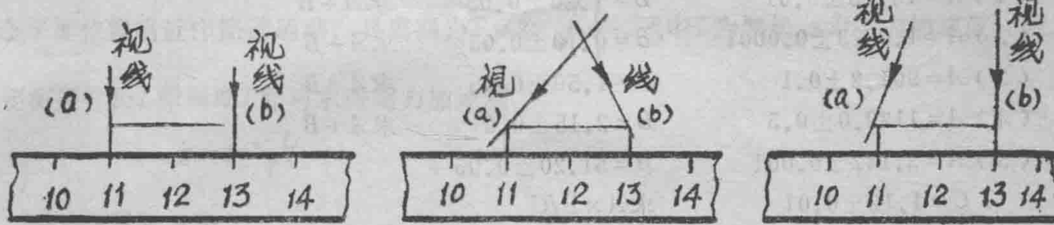
)17) $\dfrac{3.142\times 51.2}{1.12}=?$

(18) $901.2\times 1.5=?$

(19) $\dfrac{11.2}{33.15\times 2.11}=?$

(20)计算园周周长$C=2\pi R$，其中，$R=1.10\times 10^2 mm$，$\pi=3.14159$

二、(1)下列为分别用分度值1 Cm的钢尺量度小钢棒的三组实验现场的简图，试判断哪一组的观测是正确的？哪些组的观测是错误的？说明之。



(甲)尺(Cm)　　(乙)尺(Cm)　　(丙)尺(Cm)

(　　)　　(　　)　　(　　)

(2)下列为上述三组测量中的观测数据，请判断它们的正确与错误，并更正其错误。

(注意：判断时不考虑不正确观测引起的误差)

(a) $L_1=13Cm-11Cm=2\ Cm$ (　　)

(b) $L_2=(13.0-10.0)\ Cm=3.0Cm$ (　　)

(c) $L_3=(13.0-10.7)\ Cm=2.3Cm$ (　　)

(3)将下列数据表示成其他单位的数据：

25(千米)=(　　)米=(　　)毫米

(4)有人说下列二个实验结果的准确度一样高，对吗？

(a) $M_1=(2.20\pm 0.22)$克　(b) $M_2=(22.00\pm 0.22)$克

三、计算

(1)在温度不变条件下，用米尺(木制)连续测量一木棒长度共6次，其原始数据如下表所示，求算此测量结果。

次　数	1	2	3	4	5	6
L(cm)	12.24	12.23	12.22	12.25	12.26	12.24

(2)比重瓶法测重液体的密度公式 $D=\dfrac{m_1-m_2}{a^3}$

(式中$m_1 m_2$系两次称衡质量；a是正立方体空腔的边长)

已知：$m_1=(20.00\pm 0.8)$克；$m_2=(12.00\pm 0.16)$克