高等数学试题库

试题及选解

上 册

赵崇诰 莫仲卿 杨志响
杨期澄 尹 群 杨 军 编

上海科学技术文献出版社

高等数学试题库

试题及选解

上册

赵崇诰 莫仲卿 杨志响
杨期澄 尹 群 杨 军 编

上海科学技术文献出版社
1993.8.

(沪) 新登字 301 号

内 容 提 要

本书中的试题是由江苏省"CJS-1 高等数学试题库系统"(第三版，约6500题) 中选出，重新作了补充、加工整理、编排. 选出的部分试题，尽量在内容、试题类型以及难度等方面，具有代表性；每题都给出参考答案；部分典型题或较难题给出解答或提示.

本书是广大数学教师以及学习高等数学的学生的一本很好的参考书.

高等数学试题库
试题及选解

赵崇诰 莫仲卿 杨志响
杨朔澄 尹 群 杨 军 编

*

上海科学技术文献出版社出版发行
(上海市武康路 2 号)
镇江新光印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 24.25 字数 545 千字
1993 年 8 月第一版 1993 年 8 月第一次印刷
印数 1-10000
ISBN 5439-0330-X/G·152
定价 (上、下两册)：12.00 元

序

高等数学是各类高等工科院校学生必修的一门重要的基础理论课，也是选拔工科研究生时要考的主要基础课程之一. 本书是为青年大学生们检验、巩固和深化所学高等数学内容而出版的.

1986 年，华东工学院（现南京理工大学）数学教研室高等数学试题库组开始研制高等数学试题库；1988 年开始，华东工学院高等数学试题库组与江苏省高等学校数学研究会联合研制高等数学试题库第二版，即“CJS-1 高等数学试题库系统”. 参加人员除华东工学院高等数学试题库组外，还有南京航空学院（现南京航空航天大学）的唐月红，东南大学的罗庆来、王文蔚，河海大学的丁莲珍、王海鹰，南京林业大学的辛克礼和南京化工学院的蒋企华等. “CJS-1 高等数学试题库系统”，于 1990 年 5 月，通过了江苏省教育委员会的鉴定.

试题库中包含了大量不同类型、不同难度的试题，第二版总题量为 6021 题，第三版中，又增加了近几年的研究生入学考题以及可供数学竞赛用的练习题. 南京理工大学数学系试题库组的老师们，在教学实践中积累了许多宝贵经验，现在他们把试题库中典型试题整理出版，这无疑是一件大好事.

我阅读之后，深感书中取材恰当，题型多样，并伴有选解和答案，这将为青年学生在高等数学学习上登堂入室铺平道路.

我愿向广大读者推荐此书. 希望它将帮助你更好地学好

高等数学这门课，提高你的数学水平，在各类考试中，取得好成绩.

许有信

一九九三年八月

编者的话

近年来，随着微型计算机的普及，利用试题库来命题的学校愈来愈多. 自1987年，我们研制的高等数学试题库系统向全国销售后，很想把试题库中有代表性的试题编印成书，以供有关人员参考，经过多方努力，这一愿望终于实现了.

“CJS-1高等数学试题库系统”的第三版，总题量约6500题，由于篇幅限制，我们仅选用了其中的一部分. 所选出的试题，力求具有代表性. 要求内容尽量覆盖高等数学课程所讲授的所有方面. 试题类型包括：是非、选择、填充、计算、证明、应用、综合等各种类型；难度包括：很容易[1]、容易[2]、一般[3]、稍难[4]、较难[5]、很难[6]六个等级.

本书分上下两册，上册内容为：第一章函数、极限、连续；第二章一元函数微分学；第三章一元函数积分学；第四章向量代数与空间解析几何；下册内容为：第五章多元函数微分学；第六章多元函数积分学；第七章级数（含傅里叶级数）；第八章常微分方程. 每册都包含三大部分，即试题部分；试题选解部分以及参考答案.

试题顺序，基本上以内容为依据，客观题相对集中，排在有关内容的最前面.试题分章统一编号，选解与答案中的编号与试题中的编号一致. 试题难度，在答案的方括号中给出，从易到难，分别用[1]～[6]代表. 作解答的试题，在其编号的左上角标有★号. 关于向量的表示方法，考虑到教学中的习惯，本书中的向量，用西文字母顶上加箭头表示.

在试题库研制过程中，南京理工大学数学系的教师以及

参加试题库研制的其他高校的数学教师们，都直接或间接地为试题库献了题，有些老师还参加了审题及校对等工作. 由于人数较多，就不一一列出了. 在本书的编辑出版过程中，南京理工大学的俞军等参加了编排、录入等工作，特此表示感谢.

由于题解来自题库，解题步骤比较简略，解题方法与技巧并非最佳.

限于编者水平，同时编写时间比较仓促，因而一定存在不妥之处，恳请广大读者给予批评指正.

编　者

一九九三年八月

目　　录

第二部分　试题选解

第三部分　参考答案

第一部分

试题

第一章　函数 极限 连续

客观题

判别正误:(1.1 − 1.16)

1.1　若 $y = f(x)$ 的定义域为 X, 值域为 Y, 且在 Y 内存在单值反函数 $x = \varphi(y)$, 则 $f[\varphi(y)] = y$.

1.2　若 $f(x)$ 的定义域是 $[-1,0)$, 则 $f(x^2 + 2x)$ 的定义域是 $(-2,0)$.

1.3　若 $u = u(x)$ 在其定义域 X 内单调减少 ,$y = f(u)$ 在 $u = u(x)$ 的值域内也单调减少 , 则 $y = f[u(x)]$ 在 X 内单调减少 .

1.4　若 $f(x)$ 在 (a,b) 内无界 ,$g(x)$ 在 (a,b) 内有界 , 则 $f(x)g(x)$ 在 (a,b) 内无界 .

1.5　若 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义 , 且其图形

对称于直线 $x=1$, 则 $y=f(x+1)$ 必为偶函数.

1.6 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}=0,\cdots,$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}=0$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=0.$$

1.7 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x+x^2+\cdots+x^n)$ $(|x|<1)$ 是 x 的函数.

1.8 若对任给 $\varepsilon>0$, 必存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有不等式 $|f(x)-A|<2\varepsilon$ 成立, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

1.9 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\lim\limits_{x\to 1}\sin\dfrac{1}{x-1}$

$=0\cdot\lim\limits_{x\to 1}\sin\dfrac{1}{x-1}=0.$

★1.10 若复合函数 $f[g(x)]$ 中, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$, $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=B$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=B$.

1.11 当 $x\to 0+0$ 时, $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ 与 $x^{\frac{1}{8}}$ 是等价无穷小.

1.12 无穷小量乘以无穷大量,或者为无穷小量,或者为无穷大量,或者为某常数 A, 三者必居其一.

1.13 设 $f^2(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续,则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必连续.

1.14　设函数 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上，$f(x)$ 取遍 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意值，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必连续.

★1.15　假设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，且 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$，$\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$ 均存在，又 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) \lim\limits_{x\to b-0} f(x) < 0$，则存在 $\xi \in (a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

1.16　已知 $f(x)=\mathrm{tg}x$，$f(\frac{\pi}{4})=1$，$f(\frac{3\pi}{4})=-1$，则在 $(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$ 内存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

选择填充(只有一个正确答案)：(1.17－1.28)

1.17　函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是________函数.

(A) 非奇非偶　　(B) 奇　　(C) 偶.

1.18　假设 $f(x)=\begin{cases} x, & x\text{为有理数} \\ -x, & x\text{为无理数} \end{cases}$，则 $f(x)$ 是________.

(A) 非奇非偶函数　(B) 奇函数　(C) 偶函数.

1.19　如果数列 $\{x_n\}$ 有界，则________.

(A) 存在 $M>0$，对一切 x_n 有 $|x_n| \leqslant M$

(B) 任给 $M>0$，存在 $N>0$，仅当 $n>N$ 时 $|x_n| \leqslant M$

(C) 任给 $M>0$，任给 $N>0$，当 $n>N$ 时，$|x_n| \leqslant M$

(D) 任给 $M>0$，仅有有限个 x_n，使 $|x_n| > M$.

1.20　假设 $x_n=(\sqrt{n})^{(-1)^n}$，当 $n\to\infty$ 时，下述结论中，________是正确的.

(A) x_n 有极限　　　　(B) x_n 是有界量

(C) x_n 是无界量　　　　(D) x_n 是无穷大量.

1.21　设$0 < a < b$,则 $\lim\limits_{n \to \infty} (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} =$ ________.

(A) a　　(B) b　　(C) 1　　(D) $a+b$.

1.22　$\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\operatorname{tg} x}{\pi - x} =$ ________.

(A) 1　　(B) -1　　(C) ∞　　(D) 0.

1.23　当 $x \to 0+0$ 时，下列无穷小量中，________ 的阶数最高.

(A) $1 - \cos\sqrt{x}$　　　　(B) $\sqrt{x} + x^4$

(C) $x\sin\sqrt[3]{x}$　　　　(D) $x\sqrt{x + \sqrt{x}}$.

1.24　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ 是 $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |a|$ 的 ________ 条件.

(A) 充分　　　　(B) 必要

(C) 充要　　　　(D) 既不充分又不必要.

1.25　当$x \to +\infty$时,函数$f(x) = x\sin x$是________.

(A) 无穷大量　　　　(B) 无穷小量

(C) 无界变量　　　　(D) 有界变量.

1.26　若函数$f(x)$在x_0点连续,则________.

(A) $f(x)$在x_0的某邻域内连续

(B) 存在 $\{x_n\}$, 使 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, 并且 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$

(C) 存在$\varepsilon > 0$,使得对一切$\delta > 0$,当$|x - x_0| < \delta$时,有$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

1.27　设$f(x)=(\cos x)^{\frac{1}{x}}$,则定义$f(0)=$ ________ 时, $f(x)$在$x=0$连续.

(A) 0　　(B) 1　　(C) e　　(D) -1.

1.28　设$f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$, $g(x)=1+x^2$,则$g[f(x)]$在 ________.

(A) $(-\infty,+\infty)$上连续　　(B) $x=0$有第一类间断

(C) $(-\infty,+\infty)$上无界.

填　充:(1.29－1.36)

1.29　设 $f(x)$ 是定义在 (0,1) 上的函数, 则 $f(\ln x)$ 的定义域是 ________.

1.30　若 $f(u)$ 的定义域为 (0,1), 则 $f(\sin 2x)$ 的定义域是 ________.

★1.31　设$f(x)=\begin{cases}x^2-\mathrm{arctg}x, & 1\leqslant x\leqslant 2\\ xe^x, & 0\leqslant x<1\end{cases}$,则$f(x+1)$ $=$ ________.

1.32　假设函数 $f(x)\ (-\infty<x<+\infty)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 且当 $-\pi<x<\pi$ 时, $f(x)=x$, 则 $f(\frac{3\pi}{2})$ $=$ ________.

1.33　设$F(x)$是以2π为周期的奇函数,而且$F(x)=\cos x$ $(0<x<\pi)$,则在$(-\pi,\pi)$上$F(x)$的表达式为$F(x)=$ ________.

1.34　设 $f(x)=1+x\quad(0<x\leqslant 1)$, 在 $[-1,0]$ 上补充定义 $f(x)$, 使补充定义后的函数 $F(x)$ 在 $[-1,1]$ 上为偶函

数，则 $F(x) =$ ________.

1.35　已知 $F(x)$ 是以 2π 为周期的偶函数，而且 $F(x) = \sin x \quad (0 < x \leqslant \pi)$，则在 $[-\pi, \pi]$ 上 $F(x)$ 的表达式为________.

1.36　当 $x \to 0 + 0$ 时，$e^{\sqrt{x}} - 1$ 是 x 的________阶无穷小.

§1－1　函　数

1.37　已知函数 $y = \dfrac{2x-5}{x-3}$ 的值域是：$y \leqslant 0, y \geqslant -4$，求函数 y 的定义域.

1.38　设 $f(x)$ 是定义在 $(0,1)$ 上的函数，求 $f(\sin x)$ 的定义域.

1.39　求函数 $y = \arccos(2\sin x)$ 的定义域.

1.40　设 $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$，$g(x) = \dfrac{1}{x+1}$，求 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$ 的定义域.

1.41　设 $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x < 1 \\ x, & x \geqslant 1 \end{cases}$，试写出 $f(2+\triangle x) - f(2)$ 和 $f(1+\triangle x) - f(1)$ 的表示式，其中 $|\triangle x| < 1$.

1.42　假设函数 $f(x) = \begin{cases} -1, & x < -1 \\ x, & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$，求 $f(x^2+5)f(\sin x) - 5f(4x - x^2 - 6)$.

1.43　设函数 $f(x) = \dfrac{x}{ax+b}$（其中 a,b 为常数，$a \neq 0$）

满足条件：(1) $f(1)=2$； (2) 方程 $f(x)-x=0$ 有唯一实根，试确定 $f(x)$.

1.44 假设函数 $f(x)=\min\{2x+5, x^2, -x+6\}$ $(-\infty<x<+\infty)$，求 $\max f(x)$.

1.45 已知 $2f(x^2)+f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=x\ (x>0)$，求 $f(x)$.

1.46 已知 $f(\sin x)=\cos 2x+1$，求 $f(\cos x)$.

1.47 已知 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，设 $f_n(x)=f(f(\cdots f(x)))$ (n重)，求 $f_n(x)$ $(n\geqslant 2)$.

★1.48 设 $f(x)$ 的定义域与值域均为 $(0,+\infty)$ 记 $f_0(x)=f(x)$，$f_n(x)=f[f_{n-1}(x)]$，$(n=1,2,3,\cdots)$，且 $f_{n+1}(x)=f_n^2(x)$，求 $f_3(x)$.

★1.49 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f[f(x)]$.

1.50 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & 0\leqslant x=1\\ 2, & 1<x<3\\ x-1, & 3\leqslant x<+\infty\end{cases}$，又设 $s(t)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴，y 轴及 $x=t$ 所围成的面积，试写出 $s(t)$ 的表达式.

1.51 设 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，求 $f(2x)$，$f(x-2)$ 的定义域，并作出其图形.

1.52 作函数 $y=|x|+\left|x^2-1\right|$ 的图形.

1.53 判断下列函数在指定区间内的有界性:

(1) $y=\frac{1}{x^2}\quad(0,2)$; (2) $y=\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\ (x\neq 0)$.

★1.54 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，证明：$f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

1.55 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 皆为 $-\infty<x<+\infty$ 上的单调增加函数，且 $f(x)\leqslant g(x)$，证明：$f[f(x)]\leqslant g[g(x)]$.

★1.56 设$f(x),g(x)$在(a,b)上是单调增加的,证明:

$\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$与$\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$在$(a,b)$上也是单调增加的.

1.57 试证:两个奇函数的乘积是偶函数.

1.58 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<-1\\ x, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & x>1\end{cases}$ 证明 $f(x)$ 是奇函数.

★1.59 已知 $f(x)=\ln x$，补充定义 $x<0$ 时 $f(x)$ 的值，使 $f(x)$ 为奇函数.

★1.60 设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$ (a,b,c 均为常数)，且$|a|\neq|b|$. 证明：$f(x)$ 是奇函数.

1.61 假设 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 是以 2π 为周期的函数，且当 $0\leqslant x<2\pi$ 时，$f(x)=\frac{\pi-x}{2}$. 设 $-\pi<a<\pi$，求 $f(a)$.

★1.62 设 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 是以 2 为周期的函数，且当 $-1<x\leqslant 1$ 时，$f(x)=e^x$，设 $0<a<2$，求 $f(a)$.

1.63 设函数 $f(x)=x\ (0\leqslant x<1)$，将$f(x)$延拓到