马克思

数学手稿

马 克 思

数 学 手 稿

北京大学《数学手稿》编译组编译

人 民 出 版 社

马 克 思

数 学 手 稿

北京大学《数学手稿》编译组编译

*

人民出版社出版 新华书店发行

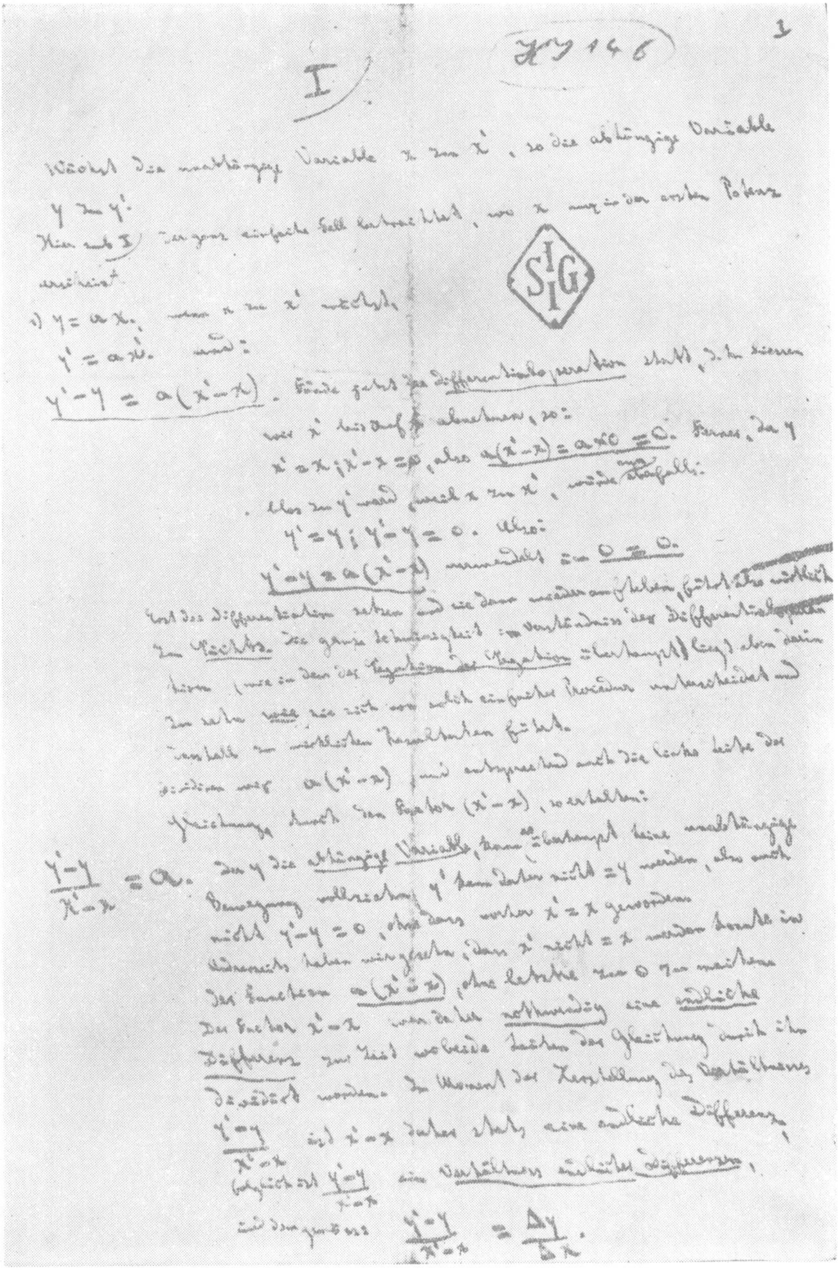
北京新华印刷厂印刷

850×1168毫米 32开本 7.5印张 163,000字

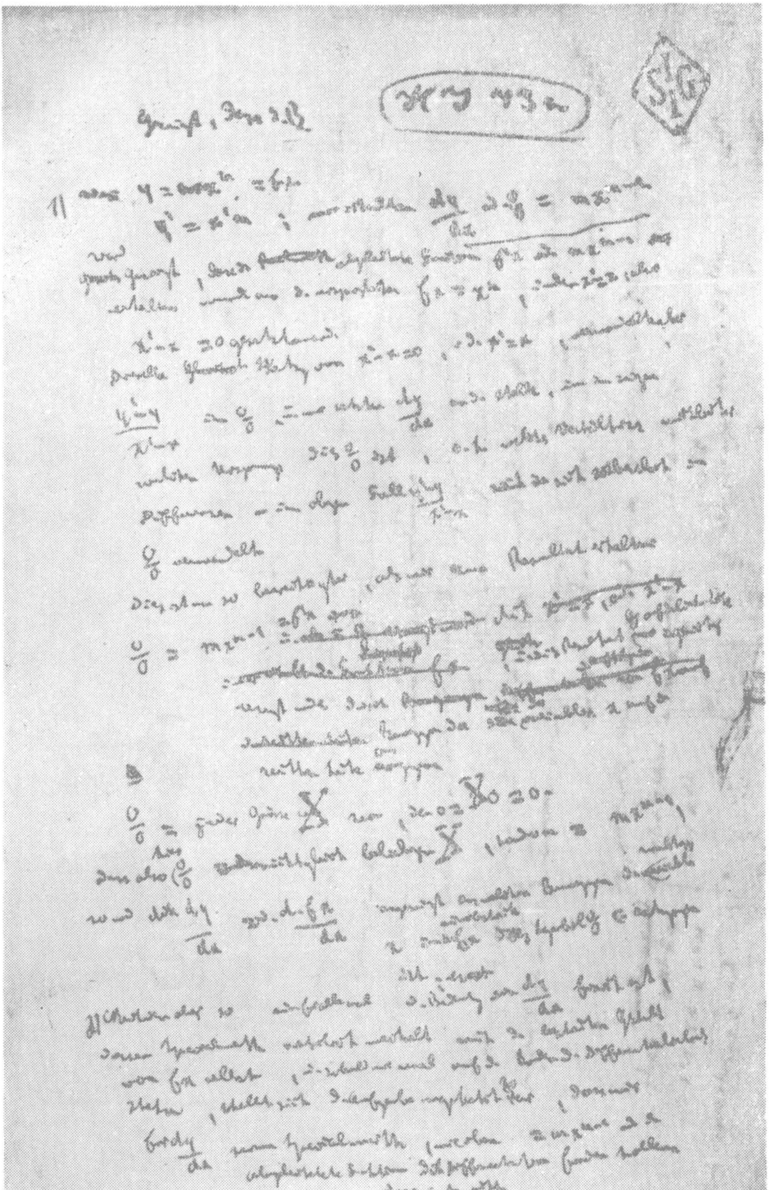
1975年7月第1版 1975年7月北京第1次印刷

书号 1001·942 定价 0.55 元

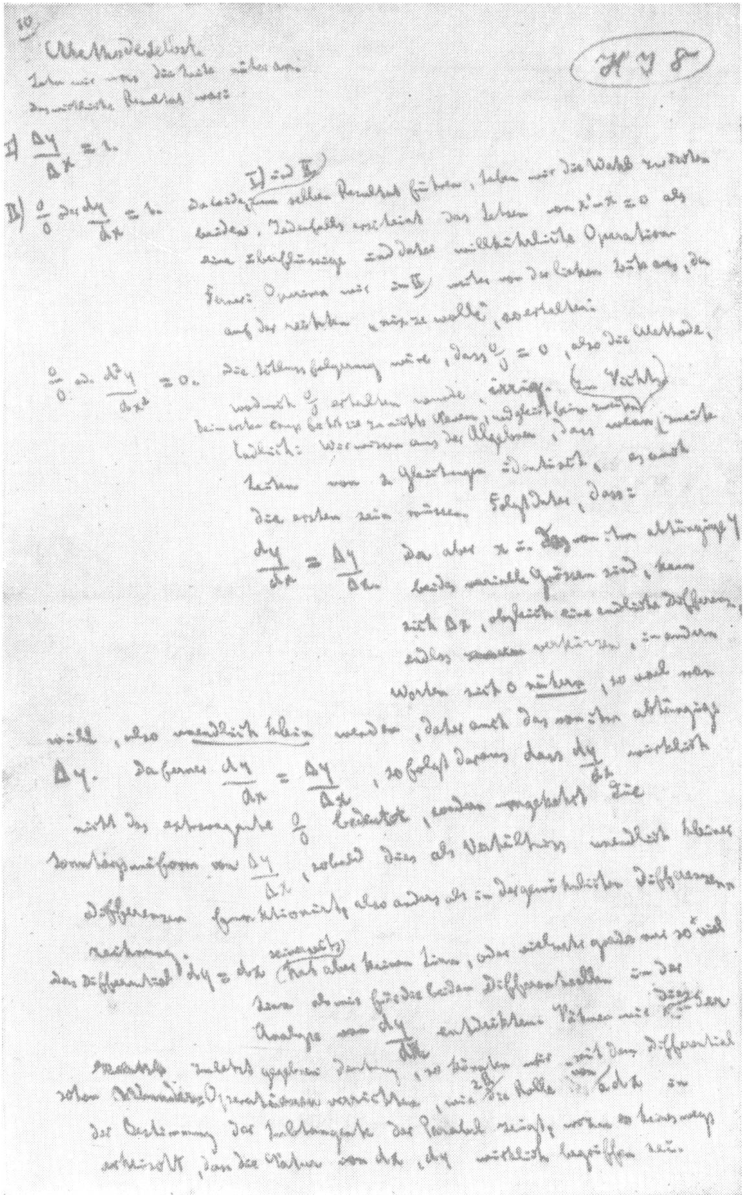
全世界无产者，联合起来！



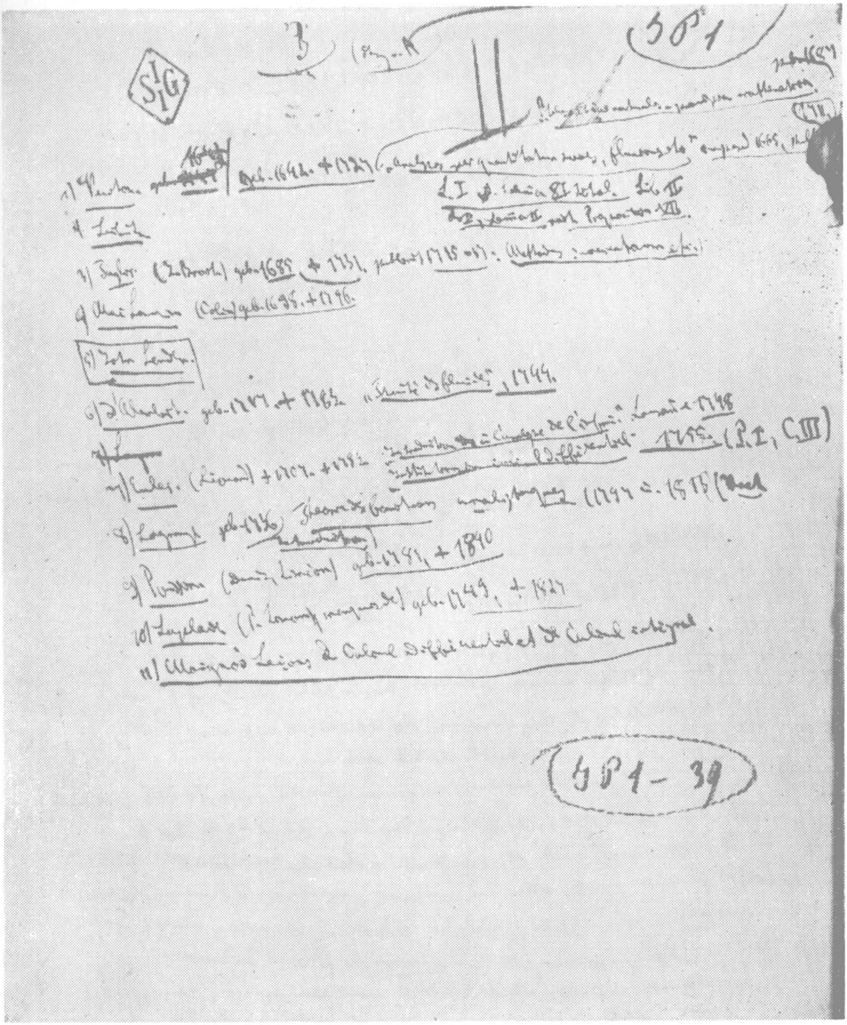
关于导函数的一页手稿(见第 1 页)



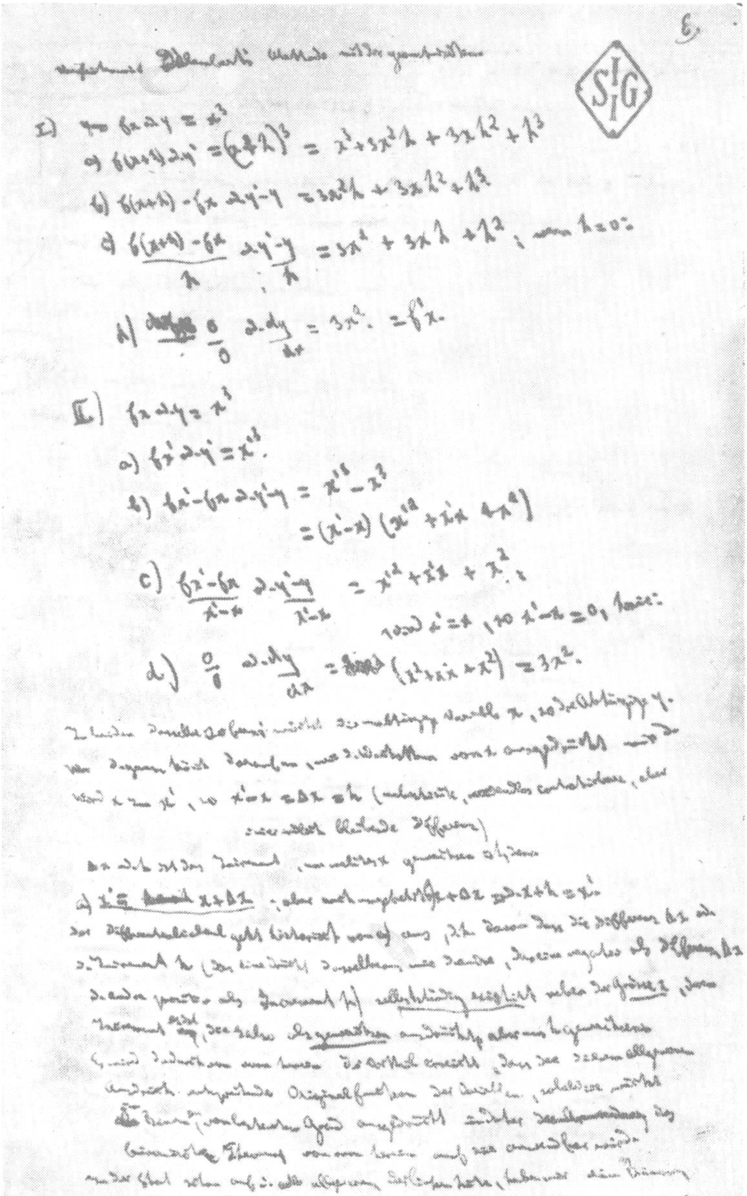
关于用符号 $\frac{dy}{dx}$ 代替 $\frac{0}{0}$ 的一页手稿（见第 12 页）



关于微分的一页手稿(见第38页)



关于微分学的历史的一页手稿(见第 94 页)


I) $f x$ or $y = x^3$

a) $f(x+h)$ or $y' = (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$

b) $f(x+h) - fx$ or $y' - y = 3x^2h + 3xh^2 + h^3$

c) $\frac{f(x+h) - fx}{h}$ or $\frac{y'-y}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$, wenn $h = 0$:

d) $\frac{0}{0}$ or $\frac{dy}{dx} = 3x^2 = f'x$.

II) fx or $y = x^3$

a) fx' or $y' = x'^3$

b) $fx' - fx$ or $y' - y = x'^3 - x^3$
$= (x' - x)(x'^2 + x'x + x^2)$

c) $\frac{fx' - fx}{x' - x}$ or $\frac{y'-y}{x'-x} = x'^2 + x'x + x^2$;

wird $x' = x$, so $x' - x = 0$, hence:

d) $\frac{0}{0}$ or $\frac{dy}{dx} = (x^2 + xx + x^2) = 3x^2$.

关于达兰贝尔的方法的一页手稿(见第 121 页)

编 译 说 明

伟大的革命导师马克思，从无产阶级革命斗争的需要出发，十分注意研究自然科学。自上一世纪的五十年代起，他配合政治经济学、哲学的研究，开始钻研数学。以后，数学始终是马克思经常关心和从事研究的一个专门领域。在几十年间，他写下了许多读书笔记和研究手稿，其中对于微积分，特别是对微分学的发展过程、微分运算的辩证本质等作了精湛的研究，写成了关于导函数、微分等问题的论文。 正如恩格斯所说："**马克思是精通数学的**"(《反杜林论》)，并且在这个领域"**有独到的发现**"(《在马克思墓前的讲话》)。马克思的数学手稿是珍贵的马克思主义文献，是用唯物辩证法研究自然科学的光辉典范。

马克思很重视这些手稿，生前曾嘱咐女儿爱琳娜，要她和恩格斯处理他的全部文稿，"**并关心出版那些应该出版的东西，特别是第二卷**[①] **和一些数学著作**"(恩格斯 1883 年 6 月 24 日致劳拉・拉法格的信)。恩格斯曾经明确表示希望有机会将自己在自然辩证法方面的研究成果汇集起来，"**同马克思所遗留下来的极其重要的数学手稿一齐发表**"(《反杜林论》)。但是，由于领导国际工人运动和整理《资本论》的更紧迫的任务，占去了恩格斯的全部时间，这个愿望没有

① 指后来编成的《资本论》第二卷和第三卷。

来得及实现。恩格斯逝世以后，德国社会民主党的修正主义头目伯恩施坦等把马克思、恩格斯的重要手稿长期扣压，不予发表。直到十月革命胜利以后，在列宁、斯大林领导下，才由联共(布)中央的研究机构拍摄了这些手稿的照片，加以整理和翻译。一九二五年出版了恩格斯的《自然辩证法》(德俄对照本)。一九三三年，马克思数学手稿的部分重要内容(关于微分学的几篇论文和一些较完整的论述)的俄译文，首先发表在联共(布)的理论刊物《在马克思主义旗帜下》，随后又编入文集《马克思主义与自然科学》。

在我国，曾有不少同志关心和从事马克思数学手稿的翻译，然而也经历了曲折和斗争。仅就我们北京大学来说，一九五八年在教育革命群众运动的高潮中，数学力学系的师生为了学习用马克思主义统帅数学，渴望读到马克思的数学手稿，经过多方寻找，终于找到了一套手稿(一九三三年俄译文)的微型胶卷，满腔热情地组织了学习和翻译。但是，由于刘少奇的反革命修正主义路线对教育革命的猖狂反扑，这件有重大意义的工作很快就被中途扼杀了。无产阶级文化大革命粉碎了修正主义教育路线对学校的统治，工人阶级登上了上层建筑斗、批、改的舞台，批林整风、批林批孔运动大大提高了广大群众学习马克思主义的自觉性，数学力学系的师生重新找出了这些照片，进行了学习。复旦大学等兄弟单位翻译和学习数学手稿，给了我们很大推动。我们在学校党委领导下，从德文原文翻译了马克思数学手稿。最近在有关部门的帮助下，得到了手稿德文原件的照片，又对译文作了校核。现在将其中关于微积分的大部分论述以及一部分有关的初等数学札记，编印成这本书。

当前，伟大的批林批孔运动正有力地推动着教育革命迅猛发

展，促进各门学科沿着为无产阶级政治服务的方向进行改造，也促进我们自己的世界观的改造。毛主席教导我们，学自然科学的，要学会用辩证法。我们必须认真学习马、列和毛主席的一系列哲学著作，学会用唯物辩证法来指导自然科学的教学和研究工作。学习马克思的数学手稿，可以使我们更好地掌握思想武器，在自然科学领域中深入批判资产阶级世界观，深入批判唯心主义和形而上学，为用马克思主义占领阵地而进行战斗。

本书的目录是我们编排的，其中粗体字的标题是马克思手稿中原有的标题。对于一些没有标题的段落，我们根据内容试拟了中文标题。中文编号一、二……，或(一)、(二)……是我们加的。译文中的用语、符号及格式尽量保持马克思手稿原样，只有括号〈 〉内的文字是我们试加的。我们作了一些简注，印在所在页的下端。本书选刊了五张手稿照片，照片上的戳记是原件保藏单位所加。

为了便于读者学习，我们辑录了马克思、恩格斯的通信和《资本论》、《反杜林论》、《自然辩证法》等著作中有关的论述，一并印出。

本书试译稿于今年五月在北京大学学报专刊上发表以后，受到了广大工农兵的热烈欢迎。有关的领导部门，北京、上海和各地的兄弟单位及校内师生给予我们热情的支持和鼓励，许多同志对译文提出了宝贵的修改意见。我们还约请了北京师范大学、中国科学院数学研究所、京字一一六部队等单位的同志帮助我们全部地或部分地对译文进行了校订。

这次付印，我们对译文作了文字修改，在内容方面有一些调整和补充，增添了关于微分、泰勒定理和有关初等数学的一些段

落。由于我们对马克思数学手稿学习不够，水平不高，译文、编目和简注中都会有不妥之处，希望同志们予以指正。

北京大学《数学手稿》编译组

一九七四年十二月

目　　录

一 关于导函数

论导函数概念[①]

I

如果自变量 x 增长到 x_1，那末因变量 y 就增长到 y_1[②].

在 I 这里考虑的是很简单的情形，其中 x 仅以一次幂出现.

1） $y = ax$；当 x 增长到 x_1 时，

$$y_1 = ax_1 \quad 并且 \quad y_1 - y = a(x_1 - x).$$

如果现在进行**微分运算**，就是说，我们让 x_1 减少到 x，那末

$$x_1 = x; \quad x_1 - x = 0,$$

从而

$$a(x_1 - x) = a \cdot 0 = 0.$$

其次，因为 y 变为 y_1 只是由于 x 变为 x_1，所以现在就同样有

$$y_1 = y; \quad y_1 - y = 0.$$

于是

$$y_1 - y = a(x_1 - x)$$

---

① 这份手稿是马克思在 1881 年誊清并寄给恩格斯的. 恩格斯仔细地读了这份手稿，并于 1881 年 8 月 18 日给马克思写了回信(见第 211 页).

② 马克思原来用 x', y' 等表示变量 x, y 改变后的值. 为了避免和导数符号混淆，我们在译文中写成 x_1, y_1 等.

就变成 $0=0$.

首先取差（Differentiation），然后再把它扬弃，这样在字面上就导致**无**. 理解微分运算时的全部困难（正象理解**否定的否定**本身时那样），恰恰在于要看到微分运算是**怎样**区别于这样的简单手续并因此导出实际结果的.

如果我们用因子 x_1-x 去除 $a(x_1-x)$，并且也相应地去除等式的左边，那末就得到

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=a.$$

因为 y 是**因变量**，根本不能进行独立的运动，所以，除非 x_1 预先变为 $=x$，y_1 就不能变为 $=y$，从而也不能有 $y_1-y=0$.

另一方面我们已经看到，在函数 $a(x_1-x)$ 里，除非使函数变为 0，x_1 不能变为 $=x$. 因此，在用因子 x_1-x 去除等式两边的时候，它**必然**是一个**有限差**. 所以，在建立比

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}$$

的时刻，x_1-x 总是一个有限差；从而

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}$$

是**有限差的比**，据此，

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

所以

$$\frac{y_1-y}{x_1-x} \quad \text{或} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=a,$$

这里常量 a 作为两个变量的有限差之比的**极限值**（*Grenzwert*）而