北大考典

自主招生
数学考典

(SHUXUE)

范端喜◎编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

北大考典

自主招生数学考典

范端喜　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书共26章，内容覆盖高中数学各个知识点.本书特点是便于自学，取材广泛，难度跨度比较大，例题全书统一编号，部分例题提供了多种解答，便于读者学习和举一反三使用.

本书适合参加各名校自主招生考试的莘莘学子阅读，对广大教师来说，参考和学习本书也一定会有所收获.

图书在版编目(CIP)数据

自主招生数学考典/范端喜编著.—北京:北京大学出版社，2013.10
(北大考典)
ISBN 978-7-301-23253-8

Ⅰ.自… Ⅱ.①范… Ⅲ.①中学数学课-高中-升学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第225940号

书　　名：自主招生数学考典
著作责任者：范端喜　编著
策 划 编 辑：陈斌惠
责 任 编 辑：陈斌惠
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-23253-8/G·3709
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路205号　100871
网　　址：http://www.pup.cn　新浪官方微博:@北京大学出版社
电 子 信 箱：zyjy@pup.cn
电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672
编辑部 62756923　出版部 62754962
印　刷　者：北京鑫海金澳胶印有限公司
经　销　者：新华书店
787毫米×1092毫米　16开本　27印张　637千字
2013年10月第1版　2013年10月第1次印刷
定　　价：49.00元

序

高校自主选拔录取改革试点自2003年启动以来，对于完善高校考试招生制度、促进基础教育阶段实施素质教育、选拔培养拔尖创新人才发挥了积极作用. 它是高校考试招生制度的有机组成部分，是我国高校招生多元录取的重要方式之一，招收的主要对象是具有学科特长和创新潜质的优秀学生.

目前，参加自主招生考试的院校不断增多，由2003年的22所扩大到2012年的80所，而且各院校自主招生人数录取比例也在不断增加，以复旦大学为例，2012年复旦大学在上海通过高考裸分录取的人数占6%. 近几年，自主招生呈三足鼎立之势：由清华大学、上海交通大学、中国科技大学、南京大学等学校组成的联盟称为“华约”；由北京大学、香港大学、北京航空航天大学、武汉大学等学校组成的联盟称为“北约”；由上海同济大学、北京理工大学等学校组成的联盟称为“卓越联盟”. 全国综合排名靠前的高校大多在这三大联盟中.

与此同时，国内有关自主招生的书籍也雨后春笋般地出现. 与目前市场上的辅导参考书相比，范端喜老师编著的这本书有以下几个特点：

1. 便于自学，这是本书最大的特色. 本书的体例是每一道例题后都配套了至少一道与此题相关且类型相似的问题. 每一道习题都配有很详细的解答，并且标有试题难度（以星号表示）和解答提示.

2. 取材广泛. 例题和习题所覆盖到的学校有“华约”“北约”“卓越联盟”、复旦大学、南开大学、武汉大学、华南理工大学、华东师范大学、中南财经大学、上海财经大学等. 此外还有各省市的数学竞赛题，清华大学、北京大学保送生考试题和日本自主招生试题等.

3. 知识拓展内容详细. 知识拓展部分一般是高考不考而自主招生可能考到的内容. 大部分拓展知识点都配有一道例题及至少一道模仿训练，为的是便于读者进一步巩固和举一反三使用.

自主招生考试实际是考“三度”，即深度、广度和速度. 本书在深度和广度方面都进行了相应的拓展，在速度方面，只要读者配合一定量的练习，相信认真阅读此书后会有所收获.

范端喜老师研究生毕业后就在华东师范大学第二附属中学担任理科班数学老师，一直从事数学竞赛辅导和自主招生考试的教学和研究工作，所教的学生大多进入了国内外著名高校. 本书中很多问题的解法和思路是作者多年教学经验的积累，凝聚了作者的教学理念，其中有不少独到的见解，我认为参加自主招生考试的学生和从事中学数学教学的教师都会从中有所收获.

熊　斌
2013年5月

熊斌　华东师范大学数学系教授、博士生导师，中国数学奥林匹克国家队领队、主教练.

前　　言

近几年随着自主招生规模的逐步扩大，高校自主招生考试越来越受到社会的关注．与此同时有关自主招生参考的书籍也越来越多．与目前市场上的辅导参考书相比，本书各章的知识框架及体例如下：

- 一、知识拓展
  - 知识拓展 1
    - 内容
    - 方法
    - 例题　（☆☆☆）（注①）
    - 模仿训练
  - 知识拓展 2
  - ⋮
- 二、重要例题
  - 例
    - 题目
    - 指针　（注②）
    - 解答
    - 反思　（注③）
  - ⋮
- 三、练习
  - 1. 题目　→例×（注④）
  - 2. 题目
  - ⋮
- 四、综合练习
  - 1.
    - 题目
    - HINT　（注⑤）
  - 2.
  - ⋮
- 五、解答
  - 模仿训练解答
  - 练习解答　（注⑥）
  - 综合练习解答

注①　星级：表示题目的难度系数，五星最难．

注②　指针：表示例题的问题核心、题眼，以及问题解决的思路与方法．

注③　反思：表示例题的解答检验，关联内容的比较，拓展内容的点拨，使学生理解解题过程．

注④　表示与例×相仿的问题．

注⑤　HINT：提示．

注⑥　模仿训练是与知识拓展相匹配的习题；练习是与重要例题相匹配的习题；综合练习题目比较综合，比较难的题目大多放在综合练习．

考虑到自主招生难度介于高考和竞赛之间，每一章节前都做了“知识拓展”，并配有相关例题及练习．除了常规高考考纲范围，后面章节也延伸到竞赛难度，如组合、数论等．考虑到自主招生的特殊性，第 26 章是杂题选讲，如矩阵、行列式（目前只有复旦大学自主招生有涉及）等．

本书例题及习题取材绝大多数是往届自主招生真题，少数是近两年各省市竞赛题，还有少数来自日本自主招生考试．之所以选取这些题目，一是题目比较典型，二是其难度和自主招生相当．

本书的试题难度跨度比较大，从一“☆”到五“☆”．五“☆”就完全达到竞赛难度．建议读者遇到难题时不要急于看解答，可以先参看指针或 HINT（提示），养成独立思考的习惯对提高解题能力很重要．

书中不足之处，恳请读者批评指正．

目　录

第 1 章 集合与命题

集合与命题在自主招生考试中所占的分数比例不高，一般以小题形式出现.

知识拓展 1　容斥原理

令 $n(A)$ 表示集合 A 的元素个数(有时也记为 $|A|$)，则 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$，$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$.

更一般地，令 $n(A)$ 表示集合 A 中元素的个数，则 $n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m)=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant m}n(A_i)-\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant m}n(A_i\cap A_j)+\sum\limits_{1\leqslant i<j<k\leqslant m}n(A_i\cap A_j\cap A_k)-\cdots+(-1)^{m-1}n(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m)$.

例 1　U 为全集，$A,B\subseteq U$，$n(U)=100$，$n(A)=60$，$n(B)=48$，求：

(1) $n(A\cap B)$ 的最大值及最小值；

(2) $n(\complement_U A\cap B)$ 的最大值及最小值.

指针：$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=60+48-n(A\cup B)$，等价于求 $n(A\cup B)$ 的最大值和最小值.

解：(1) 如图 1.1 所示，$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=60+48-n(A\cup B)$，下面求 $n(A\cup B)$ 的最大值和最小值.

易见 $\max\{n(A),n(B)\}=60\leqslant n(A\cup B)\leqslant n(U)=100$，故 $n(A\cap B)$ 的最大值为 48，最小值为 8.

(2) $n(\complement_U A\cap B)=n(B)-n(A\cap B)=48-n(A\cap B)$. 由(1)知，$n(\complement_U A\cap B)$ 的最小值为 $48-48=0$；最大值为 $48-8=40$.

反思：经常借助文氏图解决与集合有关的问题.

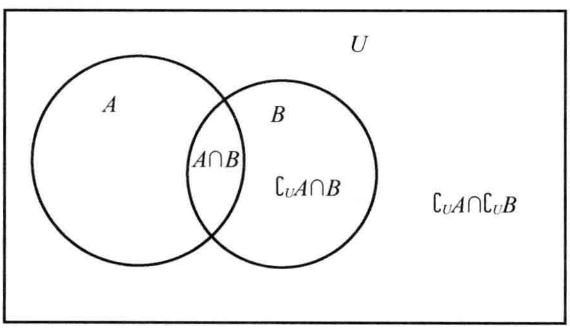

图 1.1

模仿训练：

1.(日本久留米大学)某商场对100位顾客做了一项调查，购买A商品有80人，购买B商品有70人，则两种商品都购买的人数的最大值为________，最小值为________；两种商品都没购买的人数的最大值为________，最小值为________.

知识拓展2　差集与对称差

(1)给定两个集合A,B，称集合$C=\{c\mid c\in A,且\ c\notin B\}$为$A$减$B$，记为$A-B$. 其文氏图如图1.2所示，显然$A-B=A\cap \complement_U B$.

(2)设A,B是两个集合，称$(A-B)\cup(B-A)$为A,B的对称差，有时记为$A\Delta B$. 其文氏图如图1.3所示.

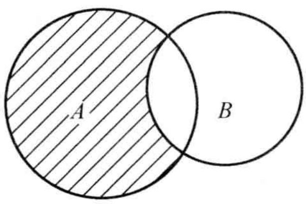

图1.2

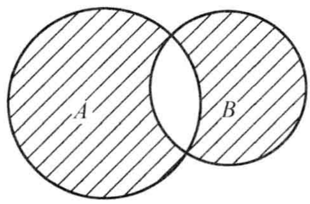

图1.3

根据对称差的定义，易知下述几个性质成立：①$A\Delta B=B\Delta A$；②$A\Delta\varnothing=A$；③$A\Delta A=\varnothing$；④$A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$.

知识拓展3　德摩根定理

U是全集，$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$，$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

重要例题

例2　(2009上海交大)珠宝店丢失了一件珍贵珠宝，以下四人只有一人说真话，且只有一人偷了珠宝. 甲：我没有偷；乙：丙是小偷；丙：丁是小偷；丁：我没有偷，则说真话的人是________，偷珠宝的人是________.　(☆☆)

指针：根据题意，四人中只有一人说真话，对甲、乙、丙、丁四人逐个检验，看是否导出矛盾.

解：四人中有且只有一人说真话，先设甲说的是真话，即甲没有偷. 由于丙说的是假话，故丁不是小偷，另一方面，由于丁说的也是假话，故丁是小偷，矛盾.

设乙说的是真话，即丙是小偷，但由于丁说的是假话，故丁也是小偷，矛盾.

设丙说的是真话，即丁是小偷，但由于甲说的是假话，故甲也是小偷，矛盾.

故只有丁说的是真话，且由于甲说的是假话，故甲是小偷.

反思：本题属于逻辑推理问题，用的是排除法；此外，图表法等也是解决这类问题常用的方法.

例3　(2010复旦)设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的函数,如果对任意满足 $a\leqslant x<y\leqslant b$ 的 x,y 都有 $f(x)\leqslant f(y)$,则称 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的递增函数,那么,$f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非递增函数应满足(　　).

(A)存在满足 $x<y$ 的 $x,y\in[a,b]$,使得 $f(x)>f(y)$

(B)不存在 $x,y\in[a,b]$ 满足 $x<y$ 且 $f(x)\leqslant f(y)$

(C)对任意满足 $x<y$ 的 $x,y\in[a,b]$,都有 $f(x)>f(y)$

(D)存在满足 $x<y$ 的 $x,y\in[a,b]$,使得 $f(x)\leqslant f(y)$　　(☆☆☆)

指针:考虑原命题的等价命题.

解:问题等价于命题"如果对于任意满足 $a\leqslant x<y\leqslant b$ 的 x、y 都有 $f(x)\leqslant f(y)$,则称 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的递增函数"的逆否命题,即"存在满足 $x<y$ 的 $x,y\in[a,b]$,使得 $f(x)>f(y)$",故选A.

反思:"任意"的否定形式是"存在".

例4　(2008复旦)40名学生参加数学奥林匹克竞赛,他们必须解决一个代数学问题、一个几何学问题以及一个三角学问题,具体情况如表1.1所述.

表1.1

问题	解决问题的学生数
代数学问题	20
几何学问题	18
三角学问题	18
代数学问题和几何学问题	7
代数学问题和三角学问题	8
几何学问题和三角学问题	9

其中有三名学生一个问题都没有解决,则三个问题都解决的学生数是(　　).

(A)5　　(B)6　　(C)7　　(D)8　　(☆☆)

指针:运用容斥原理.

解:令 $A=\{$解决代数学问题的学生$\}$,$B=\{$解决几何学问题的学生$\}$,$C=\{$解决三角学问题的学生$\}$.依题意,$n(A)=20$,$n(B)=n(C)=18$,$n(A\cap B)=7$,$n(A\cap C)=8$,$n(B\cap C)=9$.由容斥原理,$n(A\cap B\cap C)=n(A\cup B\cup C)-n(A)-n(B)-n(C)+n(A\cap B)+n(A\cap C)+n(B\cap C)=40-3-20-18-18+7+8+9=5$,故选A.

反思:本题属于应用题,解决这类问题的第一步是把它转化为数学问题.

例5　(日本滋贺大学)$f(x)=ax^2+bx+c$,试证明:对任意整数 x,$f(x)$ 的值为偶数的充要条件是 $a+b,a-b,c$ 都是偶数.　　(☆☆☆)

指针:必要性,令 $x=0,x=\pm1$ 即可;充分性,设 $a+b=2p,a-b=2q,c=2r$,将 $f(x)$ 恒等变形.

证明:(1)必要性.由于对任意整数 x,$f(x)$ 的值都是偶数,故 $f(0)=c$,$f(1)=a+b+c$,$f(-1)=a-b+c$ 都是偶数,从而 $c=f(0)$,$a+b=f(1)-f(0)$,$a-b=f(-1)-f(0)$ 都是偶数.

(2)充分性. 若 $a+b, a-b, c$ 都是偶数,可设 $a+b=2p, a-b=2q, c=2r, p, q, r\in \mathbf{Z}$,则 $a=p+q, b=p-q, c=2r$. $f(x)=ax^2+bx+c=(p+q)x^2+(p-q)x+2r=p(x^2+x)+q(x^2-x)+2r=px(x+1)+qx(x-1)+2r$,对任一整数 x,$x(x+1)$,$x(x-1)$都是偶数,故 $f(x)$必为偶数.

反思:对于"充要条件"的问题的证明,一般分"充分性"和"必要性"两步证明. 两个连续的整数的乘积必为 2 的倍数,更一般地,n 个连续整数的积是 $n!$ 的倍数.

例 6 (2009 复旦)定义全集 X 的子集 $A\subseteq X$ 的特征函数为 $f_A(x)=\begin{cases}1, x\in A\\ 0, x\notin A\end{cases}$. 那么,对 $A, B\subseteq X$,下列命题中不正确的是( ).

(A)$A\subseteq B \Leftrightarrow f_A(x)\leqslant f_B(x), \forall x\in X$ (B)$f_{\complement_X A}(x)=1-f_A(x), \forall x\in X$

(C)$f_{A\cap B}(x)=f_A(x)f_B(x), \forall x\in X$ (D)$f_{A\cup B}(x)=f_A(x)+f_B(x), \forall x\in X$

(☆☆☆)

指针:逐项排除,牢牢把握"特征函数"的定义.

解:对于选项 A,$\forall x\in X$,若 $x\in A$,由 $A\subseteq B$,必有 $x\in B$,此时 $f_A(x)=f_B(x)=1$;若 $x\notin A$,则 $x\in B$ 或 $x\notin B$,此时 $f_A(x)=0$,$f_B(x)=1$ 或 0,显然 $f_A(x)\leqslant f_B(x)$;反之,也成立. 故选项 A 正确.

对于选项 B,$\forall x\in X$,$x\in A$ 与 $x\in \complement_X A$ 居且仅居其一,故$\{f_A(x), f_{\complement_X A}(x)\}=\{0,1\}$,从而 B 选项也正确.

对于选项 C,$\forall x\in X$,若 $x\in A$ 与 $x\in B$ 同时成立,则 $x\in A\cap B$,$f_A(x)=f_B(x)=f_{A\cap B}(x)=1$;若 $x\in A$ 与 $x\in B$ 不同时成立,则 $x\notin A\cap B$,$f_{A\cap B}(x)=\min\{f_A(x), f_B(x)\}=0$. 均有 $f_{A\cap B}(x)=f_A(x)f_B(x)$成立,故 C 选项也正确.

对于选项 D,$f_{A\cup B}(x)=f_A(x)+f_B(x)$左边最大值为 1,而右边最大值能取到 2. 故不成立. 综上所述,选 D.

反思:这是一道学习型问题,涉及以往没有学习过的概念、定理、公式或方法等,要求考生在当前情境下通过阅读理解、即时学习,解决相关的问题. 学习型问题是复旦大学自主招生考试中常常出现的问题.

练　习　1

1. (2007 武大)运动会上,甲、乙、丙三名同学各获得一枚奖牌,其中一人得金牌、一人得银牌、一人得铜牌. 王老师曾猜测"甲得金牌,乙不得金牌,丙不得铜牌",如果王老师只猜对了一人,那么甲、乙、丙分别获得________、________、________牌. (☆)→例 2

2. (2010 复旦)对于原命题"单调函数不是周期函数",下列陈述正确的是( ).

(A)逆命题为"周期函数不是单调函数"

(B)否命题为"单调函数是周期函数"

(C)逆否命题为"周期函数是单调函数"

(D)以上三者都不正确 (☆☆☆)→例 3

3. 分母是 810,分子是 1～809 的分数构成的集合$\left\{\frac{1}{810}, \frac{2}{810}, \cdots, \frac{809}{810}\right\}$,其中有多少个最

简分数？　　(☆☆☆)→例 4

4.（日本大阪教育大学）$f(x)=a+bx+cx^2$，求证：对任意整数 x，$f(x)$ 的值为整数的充要条件是 $a,b+c,2c$ 为整数.　　(☆☆☆)→ 例 5

5.（2010 复旦）设集合 X 是实数集 $\mathbf{R}$ 的子集，如果点 $x_0\in\mathbf{R}$ 满足：对任意 $a>0$，都存在 $x\in X$，使得 $0<|x-x_0|<a$，那么称 x_0 为集合 X 的聚点. 用 $\mathbf{Z}$ 表示整数集，则在集合：①$\left\{\dfrac{n}{n+1}\,\middle|\,n\in\mathbf{Z},n\geqslant 0\right\}$，②$\mathbf{R}\backslash\{0\}$，③$\left\{\dfrac{1}{n}\,\middle|\,n\in\mathbf{Z},n\neq 0\right\}$，④整数集 $\mathbf{Z}$ 中，以 0 为聚点的集合有（　　）.

(A)②③　　(B)①④　　(C)①③　　(D)①②④

(☆☆☆)→例 6

综合练习 1

一、选择题

1.（2006 复旦）若非空集合 $X=\{x\,|\,a+1\leqslant x\leqslant 3a-5\}$，$Y=\{x\,|\,1\leqslant x\leqslant 16\}$，则使得 $X\subseteq X\cap Y$ 成立的所有 a 的集合是（　　）.

(A)$\{a\,|\,0\leqslant a\leqslant 7\}$　　(B)$\{a\,|\,3\leqslant a\leqslant 7\}$　　(C)$\{a\,|\,a\leqslant 7\}$　　(D)空集　　(☆☆)

2.（2011 吉林预赛）设集合 $M=\{x\,|\,x=\dfrac{7}{6}\pi+2k\pi$ 或 $x=\dfrac{5}{6}\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x\,|\,x=\pm\dfrac{7}{6}\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，则 M 与 N 的关系是（　　）.

(A)$M\subseteq N$　　(B)$N\subseteq M$　　(C)$M=N$　　(D)以上都不对　　(☆☆)

3.（2009 复旦）实轴 $\mathbf{R}$ 中的集合 X 如果满足：任意非空开区间都含有 X 中的点，则称 X 在 $\mathbf{R}$ 中稠密，那么，“$\mathbf{R}$ 中的集合 X 在 $\mathbf{R}$ 中不稠密”的充要条件是（　　）.

(A)任意非空开区间都不含有 X 中的点

(B)存在非空开区间不含有 X 中的点

(C)任意非空开区间都含有 X 的补集中的点

(D)存在非空开区间含有 X 的补集中的点　　(☆☆)

4.（2007 武大）某珠宝店失窃，甲、乙、丙、丁四人涉嫌被拘审，四人的口供如下：

甲：作案的是丙；

乙：丁是作案者；

丙：如果我作案，那么丁是主犯；

丁：作案的不是我.

如果四人口供中只有一个是假的，那么以下判断正确的是（　　）.

HINT　（选择题）1. 原条件等价于 $X\subseteq Y$.

2. $2k\pi-\dfrac{7}{6}\pi=2(k-1)\pi+\dfrac{5}{6}\pi,k\in\mathbf{Z}$.

3. 等价于找逆否命题.

(A)说假话的是甲,作案的是乙　　(B)说假话的是丁,作案的是丙和丁

(C)说假话的是乙,作案的是丙　　(D)说假话的是丙,作案的是丙　　(☆☆)

5.(2009复旦)"要使函数 $f(x)\geqslant 0$ 成立,只要 x 不在区间 $[a,b]$ 内就可以了"的意思是(　　).

(A)如果 $f(x)\geqslant 0$,则 $x\notin[a,b]$　　(B)如果 $x\in[a,b]$,则 $f(x)<0$

(C)如果 $x\notin[a,b]$,则 $f(x)\geqslant 0$　　(D)前面三个解释都不准确　　(☆☆☆)

6.(2011辽宁省预赛)已知 $x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}$,则"$|x|<1$ 且 $|y|<1$"是"$|x+y|+|x-y|<2$"的(　　).

(A)充分条件而非必要条件　　(B)必要条件而非充分条件

(C)充要条件　　(D)既非充分条件亦非必要条件　　(☆☆☆)

7.(2010复旦)设集合 $A=\{(x,y)\mid \log_a x+\log_a y>0\}$,$B=\{(x,y)\mid y+x<a$. 若 $A\cap B=\varnothing$,则 a 的取值范围是(　　).

(A)$\varnothing$　　(B)$a>0,a\neq 1$　　(C)$0<a\leqslant 2,a\neq 1$　(D)$1<a\leqslant 2$　　(☆☆☆)

8.(2007复旦)"$a=\dfrac{1}{2}$"是"直线 $(a+2)x+3ay+1=0$ 与直线 $(a-2)x+(a+2)y-3=0$ 相互垂直"的(　　).

(A)充要条件　　(B)充分不必要条件

(C)必要不充分条件　　(D)既不充分也不必要条件　　(☆☆☆)

9.(2009复旦)设 X 是含 $n(n>2)$ 个元素的集合,A,B 是 X 中的两个互不相交的子集,分别含有 $m,k(m,k\geqslant 1,m+k\leqslant n)$ 个元素,则 X 中既不包含 A 也不包含 B 的子集的个数是(　　).

(A)$2^{n-m}+2^{n-k}-2^{n-m-k}$　　(B)2^{n-m-k}

(C)$2^n-2^{n-m}-2^{n-k}+2^{n-m-k}$　　(D)$2^{n+1}-2^{n-m}-2^{n-k}+2^{n-m-k}$　　(☆☆☆)

10.(2010复旦)设集合 A,B,C,D 是全集 X 的子集,$A\cap B\neq\varnothing$,$A\cap C\neq\varnothing$,则下列选项中正确的是(　　).

(A)如果 $D\subsetneqq B$ 或 $D\subsetneqq C$,则 $D\cap A\neq\varnothing$

(B)如果 $D\subsetneqq A$,则 $\complement_X D\cap B\neq\varnothing$,$\complement_X D\cap C\neq\varnothing$

(C)如果 $D\supsetneqq A$,则 $\complement_X D\cap B=\varnothing$,$\complement_X D\cap C=\varnothing$

(D)上述各项都不正确　　(☆☆☆)

11.(2011复旦)设 S 是由任意 $n\geqslant 5$ 个人组成的集合,如果 S 中任意4个人当中都至少有1个人认识其余3个人,那么,下面的判断中正确的是(　　).

(A)S 中没有人认识 S 中所有的人

HINT　(选择题)4. 逐个排除.

5. 即找"函数 $f(x)\geqslant 0$"的充分条件.

6. $|x+y|+|x-y|=2|x|$ 或 $2|y|$.

7. 分 $a\in(0,1)$ 和 $a\in(1,+\infty)$ 讨论.

8. 考虑法向量.

9. 容斥原理.

10. 结合文氏图,构造反例.

(B) S 中至少有 1 人认识 S 中所有的人

(C) S 中至多有 2 人不认识 S 中所有的人

(D) S 中至多有 2 人认识 S 中所有的人 (☆☆☆)

12. (2006 复旦)条件甲：$\sqrt{1+\sin\theta}=a$；条件乙：$\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=a$，则(　　).

(A)甲是乙的充要条件　　(B)甲是乙的必要条件

(C)甲是乙的充分条件　　(D)甲既不是乙的必要条件，也不是充分条件

(☆☆☆☆)

二、填空题

1. (2009 中科大)命题"若 $x^2+y^2>2$，则 $|x|>1$ 或 $|y|>1$"的否命题是________. (☆)

2. (2007 武大)来自英、法、日、德的甲、乙、丙、丁四位客人同时参加一个国际会议. 他们除了懂本国语言外，每人还会说其他三国语言中的一种，有一种语言是三个人都会说的，但没有一种语言人人都懂，现在知道：①甲是日本人，丁不会说日语，但他俩能自由交谈；②四个人中，没有一个人既能用日语交谈，又能用法语交谈；③乙不会说英语，当甲与丙交谈时，他都能做翻译；④乙、丙、丁交谈时，找不到共同语言沟通. 由上述可知，丁会说的两种语言是________、________. (☆☆☆☆)

3. (2011 安徽省预赛)以 $|X|$ 表示集合 X 的元素个数. 若有限集合 A,B,C 满足 $|A\cup B|=20$，$|B\cup C|=30$，$|C\cup A|=40$，则 $|A\cap B\cap C|$ 的最大可能值为________. (☆☆☆☆☆)

三、解答题

1. (2008 武大)有 50 名学生参加跳远和铅球两项测试，跳远和铅球测验成绩分别及格的有 40 人和 31 人，两项测验成绩均不及格的有 4 人，两项测验成绩都及格的有多少人？

(☆☆)

2. (2013 北大保送生考试题)称 $\{1,2,3,\cdots,9\}$ 的某非空子集为奇子集；如果其中所有数之和为奇数，则共有几个奇子集？ (☆☆☆)

3. (2003 复旦)定义闭集合 S，若 $a,b\in S$，则 $a+b\in S$，$a-b\in S$.

(1)举一例，真包含于 $\mathbf{R}$ 的无限闭集合.

(2)求证：对任意两个闭集合 $S_1,S_2\subsetneqq\mathbf{R}$，存在 $c\in\mathbf{R}$，但 $c\notin S_1\cup S_2$. (☆☆☆☆)

HINT (选择题)11. (A)、(C)、(D)都容易构造反例.

12. $\sqrt{1+\sin\theta}=\left|\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right|$.

(填空题)1. 否命题的定义.

2. 可结合图表.

3. 结合文氏图.

(解答题)1. 容斥原理.

2. 若某一个集合为奇子集，则它的补集为偶子集.

3. 若 $c_1\notin S_2$，则令 $c=c_1$，结论成立；同理，由 $S_2\subsetneqq\mathbf{R}$ 知，必存在 $c_2\in\mathbf{R}$，$c_2\notin S_2$，若 $c_2\notin S_1$，则结论成立. 否则，$c_1\in S_2$，$c_2\in S_1$. 令 $c=c_1+c_2$ 即可.